Questão 1.

Prove que se a, b, c e d são números racionais tais que $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c\sqrt{2}+d\sqrt{3}$ então $a=c$ e $b=d$.

UMA SOLUÇÃO

A igualdade $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c\sqrt{2}+d\sqrt{3}$ implica que $(a-c)\sqrt{2}=(d-b)\sqrt{3}$. Suponha que tenhamos $(a,b)\neq(c,d)$. Então teremos $a\neq c$ ou $b\neq d$. Digamos que $b\neq d$ (o caso $a\neq c$ é análogo). Neste caso podemos dividir ambos os lados por $d-b$, e teremos

$$\frac{a-c}{d-b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,.$$

Como a,b,c,d são todos racionais, o lado esquerdo é racional e igual a alguma fração irredutível $\frac{p}{q}$. Mas aí teríamos

$$3q^2=2p^2\,,$$

o que é impossível, pois o lado esquerdo tem um número par de fatores 2 e o lado direito tem um número ímpar (ou: o lado esquerdo tem um número ímpar de fatores 3 e o lado direito tem um número par).

Questão 2.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que, para todo x racional, vale $f(x) = ax + b$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes). Prove que se tem $f(x) = ax + b$ também se x for irracional.

UMA SOLUÇÃO

Dado x irracional, podemos achar r e s racionais com $r < x < s$, sendo $s - r$ tão pequeno quanto desejemos. Como f é crescente, daí vem $f(r) < f(x) < f(s)$, ou seja, $ar + b < f(x) < as + b$. Como f é crescente, então $a > 0$, logo podemos subtrair b de cada termo e dividir por a, sem alterar a direção das desigualdades:

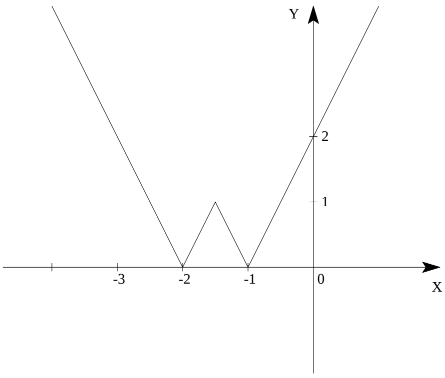
$$r < \frac{f(x) - b}{a} < s\,.$$

Como r e s podem ser escolhidos tão próximos de x quanto desejemos, isto nos obriga a ter $\frac{f(x)-b}{a} = x$ e, portanto, $f(x) = ax + b$.

Questão 3.

(a) Determine uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ||f(x)| - 1|$, tenha o gráfico abaixo.

(b) Expresse g na forma $g(x) = A + \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \ldots + \alpha_n|x - a_n|$, para algum n, explicitando os valores de $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.



UMA SOLUÇÃO

(a)
Observação: Em princípio não é necessário "deduzir" quem é f, basta apresentar uma função candidata e verificar. No entanto, dois argumentos para obtê-la seguem abaixo.

Primeiro argumento: No trecho afim mais à direita, vale $g(x) = 2x + 2$. Portanto para $x \geq -1$, vale, $||f(x)| - 1| = 2x + 2$. Então, no intervalo $(-1, \infty)$, a expressão $|f(x)| - 1$ não se anula, logo ou é sempre negativa, e neste caso ter-se-á $||f(x)| - 1| = -|f(x)| + 1$, ou é sempre positiva, e neste caso ter-se-á $||f(x)| - 1| = |f(x)| - 1$. No primeiro caso, teríamos $-|f(x)| + 1 = 2x + 2$, ou $|f(x)| = -1 - 2x$, em particular $|f(0)| = -1$, o que é impossível. Então só resta segunda opção, e $|f(x)| - 1 = 2x + 2$, de onde $|f(x)| = 2x + 3$, para $x \geq -1$. Concluímos que $f(x) = 2x + 3$ ou $f(x) = -2x - 3$. Ambas as possibilidades são válidas, e escolhemos a primeira $f(x) = 2x + 3$. Aí observamos que essa escolha de $f(x)$ também funciona nos demais trechos afins.

Segundo argumento: Suponha que a taxa de variação de f seja positiva. Então, para x suficientemente afastado para a direita da raiz de f, f é positiva e maior do que 1, de modo que $||f(x)| - 1| = f(x) - 1$. No trecho mais à direita, isso dá $2x + 2$, e daí se conclui que $f(x) = 2x + 3$. Nos outros intervalos, basta verificar.

Verificação: Para verificar que $g(x) = ||f(x)| - 1|$ olha-se a coincidência das funções em cada trecho afim. Os dois lados são afins nos mesmos intervalos: $(-\infty, -2]$, $[-2, -\frac{3}{2}]$, $[-\frac{3}{2}, -1]$ e $[1, \infty)$. Logo basta verificar a coincidência entre as funções em dois pontos de cada intervalo. Basta, portanto, verificar que coincidem em $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0$, o que pode ser feito facilmente.

(b) É natural tomar $a_1 = -2$, $a_2 = -\frac{3}{2}$ e $a_3 = -1$. Então buscamos escrever

$$g(x) = A + \alpha|x+2| + \beta|x+\frac{3}{2}| + \gamma|x+1|\,.$$

Impondo $g(0) = 2$, $g(-1) = 0$, $g(-\frac{3}{2}) = 1$ e $g(-2) = 0$, obtemos quatro equações lineares nas incógnitas A, α, β e γ. Resolvendo o sistema, chegamos em $A = -1$, $\alpha = \gamma = 2$ e $\beta = -2$, logo na função dada por

$$x \mapsto -1 + 2|x+2| - 2|x+\frac{3}{2}| + 2|x+1|\,.$$

Resta ver que essa função é realmente a função g. Essa verificação é feita da mesma maneira que na questão (a).

Questão 4.

Ache uma fração ordinária igual ao número real $\alpha = 3,757575\ldots$

UMA SOLUÇÃO

Se α é o número acima então $100\alpha = 375,757575\ldots$. Subtraindo as duas igualdades, vem $99\alpha = 372,0000\ldots$. Logo $\alpha = \frac{372}{99}$.

Questão 5.

Considere as seguintes possibilidades a respeito das funções afins $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$.

A) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

B) $f(x) \neq g(x)$ seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

C) Existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$.

Com essas informações,

i) Exprima cada uma das possibilidades acima por meio de relações entre os coeficientes a, b, c e d.

ii) Interprete geometricamente cada uma dessas 3 possibilidades usando os gráficos de f e g.

UMA SOLUÇÃO

(i) A possibilidade A) ocorre se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Prova: Se $a = c$ e $b = d$ então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax + b = cx + d = g(x)$. Por outro lado, se $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então, em particular, $f(0) = g(0)$, ou seja, $a \cdot 0 + b = c \cdot 0 + d$, isto é, $b = d$; além disso, $f(1) = g(1)$, implicando $a \cdot 1 + b = c \cdot 1 + d$, ou seja, $a = c$ (usando que $b = d$).

A possibilidade B) ocorre se, e somente se, $a = c$ e $b \neq d$. Prova: Se $a = c$ e $b \neq d$, então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d) = b - d \neq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $f(x) \neq g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $(a - c)x + (b - d)$ não tem raiz. Mas isto só ocorre se $a = c$ e $b \neq d$.

A possibilidade C) ocorre se, e somente se, $a \neq c$. Prova: Se $a \neq c$ então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d)$ tem única raiz igual a $\frac{d-b}{a-c}$, logo este é o único ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Por outro lado, se existe um único ponto x tal que $f(x) = g(x)$ é porque a diferença $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d)$ tem uma única raiz, ou seja, $a - c \neq 0$.

(ii) No caso A), os gráficos de f e g são retas coincidentes. No caso B), os gráficos de f e g são retas paralelas. No caso C), os gráficos de f e g são retas concorrentes.