Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Problema de Equilíbrio: Resultados de Existência e Algoritmo

Lucas Vidal de Meireles

Teresina - 2015

Lucas Vidal de Meireles

Dissertação de Mestrado:

Problemas de Equilíbrio: Resultados de Existência e Algoritmo

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

Teresina - 2015

Meireles, L.V.

Problemas de Equilíbrio: Resultados de Existência e Algoritmo.

Lucas Vidal de Meireles – Teresina: 2015.

Orientador: Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto.

1. Otimização

2. Matemática Aplicada CDD 516.36

Dedico este trabalho a minha mamãe Maria José Vidal Ramos, a minha vovó Maria Vidal Ramos, a toda minha família, a todos meus professores e amigos que me acompanharam nesta jornada e a minha querida Francilayra Adelina.

Agradecimentos

Depois de tantos meses trabalhando nesta dissertação, encerro este trabalho escrevendo estes agradecimentos. São tantas as pessoas a quem sou grato, que este espaço torna-se pequeno e estreito para expor toda a minha gratidão pelos muitos que me ajudaram, me acolheram e me respeitaram. Inicialmente, agradeço a Deus por ter me dado saúde, determinação e força para completar este mestrado. Agradeço aos meus pais Maria José Vidal Ramos, Manoel Vicente e Regiomar Pintos por terem me dado apoio e por terem acredito em mim. Ao meu irmão Tiago Vidal por seu companheirismo, amizade infinitas e, às vezes, por ajudas financeiras em período de graduação, principalmente. E a minha grande irmã Iracema Vidal que amo tanto. Aos meus tios, em especial, ao titio Francisco das Chagas (Manim) por tudo o que fizeram por mim durante os cinco anos em que passei estudando em Teresina. Não posso deixa de agradecer a tia Fransquinha e o tio Francisco Gualberto (Ganchim) e a toda sua família que me receberam muito bem quando morei em sua casa. Aos meus primos por terem sempre acreditado em meu potencial. Gostaria de deixar também meus agradecimentos a todos os amigos e amigas que fiz em minha estadia em Teresina durante graduação e mestrado, sinto muitas saudades de vocês. Aos meus grandes amigos e companheiros de mestrado e graduação: Alberone Fernandes (O Panetone), Andrelino (Adrenalina), Andressa, Alverlany (Lany), Victor (Sacarose), Lucas Quaresma (Quaresminha), Tiago Esteves, Sandoel, Valéria, Carla, Nayara, Cassio, Eduardo (Dudu), Fernanda, Rafael (Gordines), Gilson (Jiboia), Rui (Baliza), Carlos Adriano (Au Au), Yuri Rafael (mais conhecido como Bacharel), Valdinês, Desdemona, Samara (Samyzas), a meu amorzinho Francilayra Adelina (Te adoro demais) e todos os outros amigos e amigas, fica aqui meu profundo agradecimento. Aos Professores da UFPI: Paulo Sérgio, Paulo Alexandre, Jurandir Lopes, Roger Peres, Mario Gomes, Gilvan, Vincente, Ana Claúdia, Barnabé, Marcondes, Liane Mendes, Carlos Humberto, Sissy Sousa, Newton Luis, Isaias, Pedro Soares, Benício, Marcos Vinicius. Um Agradecimento mais que especial ao professor João Xavier da Cruz Neto, por ter sido meu orientador em grande parte da graduação (IC) e durante o mestrado, e me ajudado em muitas situações, não só acadêmicas, mas também por ter sido, juntamente com o professor Paulo Sérgio e Sissy grande amigo e um pai. Ao professor Orizon Pereira Ferreira por ter aceitado, gentilmente, ser membro da minha banca de mestrado. Agradeço a todos que me ajudaram direta e(ou) indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Nosso grande medo não é o de que sejamos incapazes. Nosso maior medo é que sejamos poderosos além da medida. é nossa luz, não nossa escuridão, que mais nos amedronta. Nos perguntamos: "Quem sou eu para ser brilhante, atraente, talentoso e incrível?"Na verdade, quem é você para não ser tudo isso?...Bancar o pequeno não ajuda o mundo. Não há nada de brilhante em encolher-se para que as outras pessoas não se sintam inseguras em torno de você. E à medida que deixamos nossa própria luz brilhar, inconscientemente damos às outras pessoas permissão para fazer o mesmo".

Nelson Mandela.

Resumo

Nesta dissertação, definimos o Problema de Equilíbrio associado a f e C, denotado por $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$, no mesmo cenário da formulação proposta por Blum e Oettli [5], o qual inclui como caso particular, por exemplo: Otimização Convexa, Desigualdades Variacionais, Problema de Complementaridade, Problema de Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos, dentre outros. Estabelecemos condições necessárias e/ou suficientes para existência de solução de tal problema, do qual podemos citar: compacidade, coercividade, viabilidade convexa. Além disso, neste trabalho será analizado o Algoritmo do Ponto Proximal para $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$, proposto por Iusem e Sosa [23]. Assumindo existência de solução para tal problema e sob hipótese de monotonicidade provamos a boa definição e convergência da sequência gerada pelo algoritmo e que a mesma converge para a solução do problema de equilíbrio.

Palavras-Chave: Problema de Equilíbrio, Resultados de Existência, Otimização Convexa, Desigualdades Variacionais, Algoritmo.

Abstract

In this dissertation, we define Equilibrium problem associated to f and C, denoted by $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$, in the same framework of the formulation proposed by Blum and Oettli [5], which includes as particular case, for instance: Convex Optimization, Variational Inequality, Complementarity Problem, Nash Equilibria in Non Cooparative Games, among others. We establish necessary and/or sufficient for existence of solution of such problem, which we can mention: compactness, coercivity, convex feasibility. Moreover, in this work it will analysed the Proximal Point Algorithm for $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$, proposed by Iusem and Sosa [23]. Assuming existence of solution for such problem and under monotonicity properties we prove well definition of the generated sequence by the algorithm and that the same converge to the solution problem.

Key Words: Equilibrium Problem, Existence of Results, Convex Optimization, Variational Inequalities, Algorithm.

Sumário

Introdução

O problema que desenvolveremos nesta dissertação, associado a f e C, chamado de Problema de Equílibrio e denotado por $PE(f,C)$, consiste em

$$PE(f,C)\ :\begin{cases}\text{Encontrar } \ x^* \in \ C \ \text{ tal que}\\ f(x^*,y) \geqslant 0 \ \text{ para } \ \text{todo } \ y \in C,\end{cases}$$

onde

1. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é não-vazio, convexo e fechado;
2. $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção satisfazendo a condição:

   P1: $f(x,x) = 0$ para todo $x \in C$.

Esse problema, na realidade , é definido para ambientes bem mais gerais, como espaços topológicos de Hausdorff. Porém, neste trabalho vamos nos ater ao espaço euclidiano n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, pois desejamos que este trabalho sirva de referência, principalmente para aqueles leitores que têm pouca ou nenhuma familiaridade com esses ambientes mais gerais.

Segundo grande parte da literatura, o problema definido acima foi primeiramente considerado e introduzindo por Ky Fan [13] em 1972. Contudo, segundo Castellani et al [4], Nikaido e Isoda [37], em 1955, caracterizaram Equilíbrio de Nash como solução de $PE(f,C)$ para uma bifunção apropriada f, mas não consideraram o problema em si de forma independente. Vale lembrar aqui que Problema de Equilíbrio só passa a receber esta denominação após o seminal artigo de Blum e Oettli [5], publicado em 1994.

Problema de Equilíbrio é muito geral no sentido que incluem, como casos particulares: Problemas de Otimização Convexa, Problemas de Desigualdade Variacional, Problema de Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos e outras aplicações, veja por exemplo [5,21].

Devido sua vasta aplicabilidade, resultados de existência de soluções para problema de equilíbrio têm sido extensivamente estudados, como pode ser visto em [3,5,7,13,20,21] e nas referências lá citadas.

O objetivo central deste trabalho é apresentar o Problema de Equilíbrio, com destaque a seus casos particulares, e estabelecer condições necessárias e/ou suficientes para existência de solução para $\mathsf{PE}(f, C)$ e apresentar um algoritmo para encontrar uma solução de tal classe de problema.

Para isso, abordaremos no capítulo 1 as definições e resultados básicos que serão úteis no desenvolvimento desta dissertação. Trazemos alguns conceitos e resultados de análise no $\mathbb{R}^n$, conceitos e resultados de otimização convexa, tais como: funções convexas e suas propriedades e subdiferencial. No fim deste capítulo apresentamos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Omitiremos as demonstrações dos resultados as quais podem ser encontradas em [24, 27, 31, 40].

No capítulo 2, vamos nos basear nos trabalhos de Blum e Oettli [5], Iusem e Sosa [21], Isac [18]. Definimos Problema de Equilíbrio e fazemos um breve histórico do mesmo, abordamos alguns de seus casos particulares e mostramos que $\mathsf{PE}(f, C)$ unifica estes problemas de um modo conveniente, no sentido que resultados obtidos para alguns destes problemas podem ser estendidos para a formulação de $\mathsf{PE}(f, C)$ (com modificações adequadas, de fato!) e por fim encerramos tal capítulo mostrando através de exemplo que $\mathsf{PE}(f, C)$ é uma generalização genuína de tais casos particulares, isto é, existem problemas $\mathsf{PE}(f, C)$ os quais não se enquadram no formato de tais casos particulares.

No capítulo 3, baseado nos trabalhos de Ky Fan [13], Brézis et al [7], Blum e Oettli [5], Bianchi e Pini [3], Castellani et al [4], Iusem et al [20] e Iusem e Sosa [21], apresentamos condições necessárias e/ou suficientes para existência de soluções para $\mathsf{PE}(f, C)$, como exemplo, usando compacidade, coercividade e viabilidade convexa. Demonstramos alguns resultados de existências como a famosa Desigualdade Minimax de Ky Fan (Teorema 3.1.1) e o (Teorema 3.1.2) devido a Brézis, dentre outros resultados.

No capítulo 4, abordamos o método do ponto proximal para $\mathsf{PE}(f, C)$ proposto em Iusem e Sosa [23], fazemos sua análise de convergência: geramos uma sequência, onde sob hipóteses convenientes garantimos sua boa definição, resolvendo subproblemas de equilíbrio associado a função regularizada e provamos que tal sequência converge para uma solução de $\mathsf{PE}(f, C)$.

Finalizamos este trabalho fazendo perspectiva de estudos futuros sobre problemas de equilíbrio.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições e resultados básicos que serão úteis no desenvolvimento desta dissertação. Iniciamos com tópicos de análise no $\mathbb{R}^n$. Em seguida, fazemos uma breve seção de conceitos e resultados de otimização, com destaque para convexidade de funções e conjuntos e algumas propriedades. Finalizamos o capítulo com o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

1.1 Conceitos e resultados de Análise no $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, vamos nos basear nos trabalhos de Lima [27] e Munkres [31]. Inicialmente, veremos a definição de produto interno no $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.1. *Um produto interno no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é uma regra que faz corresponder a cada par de vetores* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *um número real, denotado por* $\langle x, y\rangle$, *de modo que, para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *tenhamos:*

I. $x \neq 0$ *implica* $\langle x, x\rangle > 0$;

II. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

III. $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;

IV. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Isto significa que um produto interno é uma função real simétrica, bilinear, positiva definida, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Um exemplo bastante importante é o produto interno canônico do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o qual é dado por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Este será o produto interno que utilizaremos neste trabalho.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. O número $\|x\|$ chama-se a norma euclidiana ou o comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz - DCS) *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.*

Demonstração. Veja Teorema 1, página 5 [27]. □

A norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ goza das seguintes propriedades, onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha|$ significa o valor absoluto do número real α:

N1. $x \neq 0$ implica $\|x\| > 0$;

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

N3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

De um modo geral, uma norma num espaço vetorial E é qualquer função real $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ que cumpra as condições N1, N2 e N3 acima.

Uma norma arbitrária $\|\cdot\|$ num espaço vetorial E pode não provir de um produto interno, isto é, nem sempre existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em E tal que $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ para todo $x \in E$. Se a norma provém de um produto interno, então vale a identidade do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Uma norma em $\mathbb{R}^n$ permite que sejam definidos alguns conceitos. Uma bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x - a\| < r\}.$$

Analogamente, definimos a bola fechada $B_r[a]$ e a esfera $S_r(a)$ da seguinte maneira

$$B_r[a] = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x - a\| \leqslant r\} \ \text{e} \ S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x - a\| = r\}.$$

Uma norma também nos permite falar em distância entre ponto e conjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.2. *Dados conjunto não vazio* $F \subset \mathbb{R}^n$ *e ponto* $y \in \mathbb{R}^n$*, a distância de* y *a* F*, denotado por* $d_F(y)$*, é dada por*

$$d_F(y) = \inf_{z \in F} \|y - z\|.$$

A seguir mostraremos que a distância sempre existe quando o conjunto em questão é não vazio e fechado.

Proposição 1.1.1. *Seja* $F \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto fechado não vazio. Então a distância de* y *a* F *existe para todo ponto* $y \in \mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Veja Corolário 1, página 52 [27]. □

Agora definiremos sequências no espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3. *Uma sequência em* $\mathbb{R}^n$ *é uma aplicação* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *definida nos naturais* $\mathbb{N}$*. O valor que essa aplicação assume no número* k *é indicado por* z^k *e denominado* k*-ésimo termo da sequência. Usaremos a notação* $\{z^k\}$ *para indicar a sequência cujo* k*-ésimo termo é* $z^k \in \mathbb{R}^n$*.*

Uma subsequência de $\{x^k\}$ é a restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots\}$. Uma subsequência será denotada por $\{z^{k_j}\}$.

Diz-se que uma sequência $\{z^k\}$ é limitada, quando existe $c > 0$ tal que $\|z^k\| \leqslant c$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é limite de uma sequência $\{z^k\}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$ implica que $\|z^k - a\| < \varepsilon$. Também dizemos que $\{x^k\}$ converge para a e denotamos por $\lim_{k \to \infty} z^k = a$ ou $z^k \to a$. Caso contrário, diz-se que $\{z^k\}$ é divergente.

Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é valor de aderência ou ponto de acumulação de uma sequência $\{z^k\}$ quando existe uma subsequência de $\{z^k\}$ convergente para a.

Exemplo 1.1.1. *A sequência* $z^k = (-1)^k + \dfrac{1}{k+1}$ *tem dois pontos de acumulação e portanto não é convergente.*
De fato, temos $z^{2i} \to 1$ *e* $z^{2i+1} \to -1$*.*

Exemplo 1.1.2. *A sequência* $\left\{1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \dfrac{1}{6}, \cdots\right\}$ *tem um único ponto de acumulação. Entretanto, não é convergente.*

Definição 1.1.4. *Sejam* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma aplicação:*

(a) f *é dita semicontínua inferiormente no ponto* $\bar{x} \in C$*, denotado por sci, quando para qualquer sequência* $z^k \to \bar{x}$*, tem-se*

$$\liminf_{k\to\infty} f(z^k) \geqslant f(\bar{x}).$$

(b) f *é dita semicontínua superior no ponto* $\bar{x} \in C$*, denotado por scs, quando para qualquer sequência* $z^k \to \bar{x}$*, tem-se*

$$\limsup_{k\to\infty} f(z^k) \leqslant f(\bar{x}).$$

Obs 1.1.1. *A função* f *é semicontínua inferiormente* (*superiormente*) *em* C*, quando ela é semicontínua inferiormente* (*superiormente*) *em todos os pontos de* C*.*

Proposição 1.1.2. *Se* $\{f_i\}_{i\in I}$ *é uma família de funções semicontínuas inferiores, então a função* f *definida por*

$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$

é semicontínua inferior.

Demonstração. Vide página 11 [8]. □

Definição 1.1.5. *f é contínua em* $\bar{x} \in C$*, quando para toda sequência* $\{z^k\} \subset C$*,* $z^k \to \bar{x}$*, temos que* $f(z^k) \to f(\bar{x})$*.*

Exemplo 1.1.3. *Seja* $F \subset \mathbb{R}^n$ *fechado. A função distância,* $d_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, dada por* $d_F(v) = \inf_{z\in F} \|v - z\|$ *é contínua.*

Obs 1.1.2. (*i*) *A aplicação* f *é continua no ponto* $\bar{x} \in C$*, se ela for ao mesmo tempo semicontínua inferior e superiormente em* $\bar{x}$*.*
(*ii*) *A aplicação* f *é contínua em* $\mathbb{R}^n$*, quando ela é contínua em todos os pontos de* C*.*

A seguir, apresentamos a noção de compacidade em $\mathbb{R}^n$ e algumas propriedades destes conjuntos, entre elas: A Propriedade de Interseção Finita, que será muito útil na demonstração do Lema - KKM no capítulo 3.

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. Uma coleção $(F_\lambda)_{\lambda\in J}$ de subconjuntos de C é dita uma cobertura de C se:

$$C \subset \bigcup_{\lambda\in J} F_\lambda.$$

A cobertura $(F_\lambda)_{\lambda\in J}$ é dita finita se tem apenas um número finito de elementos. A cobertura $(F_\lambda)_{\lambda\in J}$ é dita aberta se, todo $F_{\lambda i}$ de $(F_\lambda)_{\lambda\in J}$ é aberto.

Definição 1.1.6. *Um subconjunto* C *de* $\mathbb{R}^n$ *é dito compacto quando toda cobertura aberta de* C *admite uma subcobertura finita.*

Exemplo 1.1.4. *Todo conjunto finito* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto.*

Proposição 1.1.3. *Se* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto e* $F \subset C$ *é fechado, então* F *é compacto.*

Demonstração. Veja página 46 [27]. □

Caminhemos agora para apresentamos a propriedade de interseção finita comentada acima. Primeiramente definamos o que significa dizer que um conjunto tem essa propriedade.

Definição 1.1.7. *Uma coleção* $(F_\lambda)_{\lambda \in J}$ *de subconjuntos de* C *é dito ter a propriedade de interseção finita se para todo subconjunto finito* $\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_m\} \subset J$*, a interseção* $F_{\lambda_1} \cap F_{\lambda 2} \cap \cdots \cap F_{\lambda m}$ *é não vazia.*

Teorema 1.1.2. *Um espaço métrico* C *é compacto se, e so se, para qualquer coleção* $(F_\lambda)_{\lambda \in J}$ *de conjuntos fechados em* C *tendo a propriedade de interseção finita, tem-se* $\bigcap_{\lambda \in J} F_\lambda \neq \emptyset$.

Demonstração. Veja Munkres, páginas 169-170 [31]. □

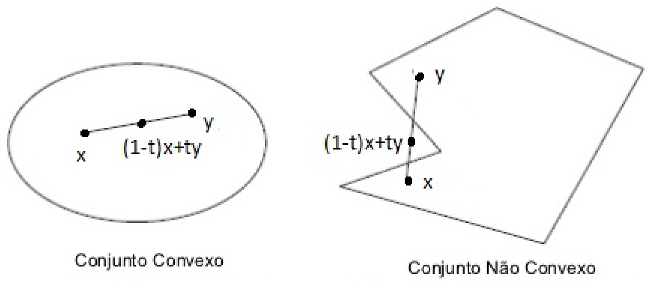
1.2 Conceitos e resultados de Análise Convexa

Nesta seção, veremos alguns conceitos e resultados sobre conjuntos convexos, funções convexas, funções quasi-convexas e subdiferencial de funções convexa, que pode ser encontrados em [24], e que serão úteis nos capítulos seguintes. Omitiremos as demonstrações dos resultados apresentados aqui, as mesmas podem ser encontradas na referência citada acima.

1.2.1 Conjuntos Convexos e Funções Convexas

Um conjunto convexo se caracteriza por conter todos os segmentos cujos extremos pertencem ao conjunto.

Definição 1.2.1. *Um conjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se para quaisquer* $x, y \in C$ *e* $\lambda \in [0, 1]$*, tem se que* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.



Exemplo 1.2.1. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.2. *Uma bola em* $\mathbb{R}^n$, *i.e., um conjunto* $B_r[a] = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x - a\| \leqslant r\}$, *onde* $r \geqslant 0$.

Na sequência, apresentemos algumas propriedades básicas de conjuntos convexos. Temos primeiramente que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

Proposição 1.2.1. *Sejam* $C_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, *conjuntos convexos, onde* I *é um conjunto qualquer* (*possivelmente infinito*). *Então a interseção* $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ *também é um conjunto convexo.*

Demonstração. Veja Proposição 3.2.1, página 80 [24]. □

Outra propriedade interessante é que o interior de um conjunto convexo é conjunto convexo.

Proposição 1.2.2. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Então o interior de* C, *int* (C), *é conjunto convexo.*

Demonstração. Veja Proposição 3.2.2, página 81 [24]. □

Usando a proposição acima podemos conclui que int $B_r[a] = B_r(a)$ é um conjunto convexo.

Definição 1.2.2. *Dados* $z^i \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in [0,1]$, $i = 1, \cdots, m$ *tais que* $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, *o ponto* $\sum_{i=1}^m \lambda_i z^i$ *chama-se a combinação convexa de pontos* $z^i \in \mathbb{R}^n$ *com parametros* λ_i, $i = 1, \cdots, m$.

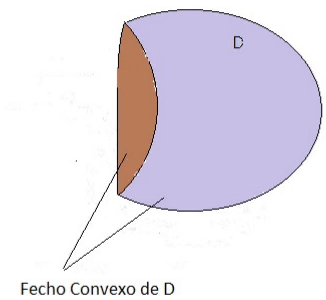
Pela definição 1.2.1, um conjunto convexo contém as combinações convexas de quaisquer dois pontos do conjunto. A seguir, veremos que isso é equivalente a dizer que o conjunto contém todas as combinações convexas de qualquer número de pontos do conjunto.

Teorema 1.2.1. *Um conjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é convexo se, e somente se, para quaisquer* $m \in \mathbb{N}$, $z^i \in C$ *e* $\lambda_i \in [0,1]$, $i = 1, \cdots, m$, *tais que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, *a combinação convexa* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z^i$ *pertence a* C.

Demonstração. Veja teorema 3.2.1, página 83 [24]. □

Apresentemos outro conceito, sobre conjunto convexo, bastante útil neste trabalho.

Definição 1.2.3. *Seja* $D \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer. O fecho convexo de D, denotado conv (D), é o menor conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n$ *que contém D.*



Exemplo 1.2.3. *Se D é convexo, então conv (D)=D.*

Exemplo 1.2.4. *Seja* $S_r(a)$ *como definida na seção* 1.1. *Temos que conv* $(S_r(a)) = B_r[a]$.

Como trata-se de uma interseção de conjuntos convexos, segue da proposição 1.2.1 que conv (C) é um conjunto convexo para qualquer $C \subset \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.3. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer. O fecho convexo de* C *é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de* C.

Demonstração. Veja Proposição 3.2.4, página 88 [24]. □

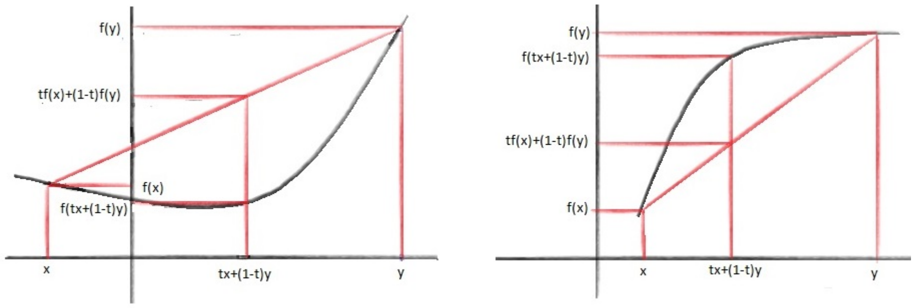
Para finalizarmos essa parte de conjuntos convexos observemos que o fecho convexo de um conjunto compacto é compacto.

Proposição 1.2.4. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto compacto. Então conv (C) é compacto.*

Demonstração. Vide Proposição 3.2.5, página 90 [24]. □

Definição 1.2.4. *Se* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto convexo, dizemos que a função* $f : C \to \mathbb{R}$ *é convexa em* C *quando, para quaisquer* $x, y \in C$ *e* $\lambda \in [0, 1]$, *tem-se*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$



Função Convexa   Função Não Convexa

Uma função f é concava se $-f$ é convexa.

Exemplo 1.2.5. *Toda função linear é convexa.*

Exemplo 1.2.6. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = e^x$ *é função convexa.*

Exemplo 1.2.7. *A função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, *onde* $A \in \mathbb{R}(n, n)$ *é uma matriz simétrica semidefinida positiva, é função convexa.*

Exemplo 1.2.8. *A função* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \ln x$ *é concava.*

Definição 1.2.5. *O epígrafo de uma função* $f : C \to \mathbb{R}$ *é o conjunto*

$$E_f = \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R}\ ;\ f(x) \leqslant \alpha\}.$$

O teorema abaixo estabelece uma relação entre a convexidade de uma função e seu epígrafo.

Teorema 1.2.2. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Uma função* $f : C \to \mathbb{R}$ *é convexa em* C *se, e somente se, o epígrafo de* f *é um conjunto convexo em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja Teorema 3.1.4, página 76 [24] $\square$

Como consequência do Teorema 1.2.2 e do Teorema 1.2.1, obtemos a seguinte propriedade de funções convexas.

Corolário 1.2.1. *Sejam* $C \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma função convexa em* C*. Então para quaisquer* $m \in \mathbb{N}$*,* $z^i \in C$ *e* $\lambda_i \geqslant 0$*,* $i = 1, 2, \cdots, m$*, tais que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$*, tem-se que*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z^i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(z^i). \tag{1.1}$$

Demonstração. Veja Corolário 3.2.2, página 85 [24]. □

Definição 1.2.6. *O conjunto de nível da função* $f : C \to \mathbb{R}$ *associado a* $\alpha \in \mathbb{R}$*, é o conjunto dado por*

$$L_C(\alpha) = \{x \in C \ ; \ f(x) \leqslant \alpha\}.$$

O próximo resultado estabelece que conjuntos de nível de uma função convexa são convexos.

Proposição 1.2.5. *Suponhamos que o conjunto* $C \subset \mathbb{R}^n$ *seja convexo e a função* $f : C \to \mathbb{R}$ *seja convexa em* D*. Então o conjunto de nível* $L_C(\alpha)$ *é convexo para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Veja Teorema 3.4.1, página 142 [24]. □

Observamos que a convexidade dos conjuntos de nível de uma função não é suficiente para garatir a convexidade da função. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ tem conjuntos de nível convexos, porém não é convexa. As funções com a propriedade acima chamam-se quasi-convexas.

Definição 1.2.7. *Seja* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo. Uma função* $f : C \to \mathbb{R}$ *é quasi-convexa em* C *quando os conjuntos* $L_C(\alpha)$ *são convexos para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

A caracterização abaixo será bastante usada no capítulo 3.

Teorema 1.2.3. (*Caracterização de Funções Quasi-Convexas*) *Seja* $f : C \to \mathbb{R}$*, onde* $C \subset \mathbb{R}^n$ *é não vazio e convexo. A função* f *é quasi-convexa se, e somente se,*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \ \ \forall \, x, y \in C, \ \forall \, \lambda \in [0, 1].$$

Demonstração. Veja [39]. □

Na sequência apresentemos algumas propriedades básicas das funções convexas.
Notações: $\mathrm{aff}(C) = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z^i \ ; \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, z^i \in C\}$ e

$\mathrm{ri}(C) = \{x \in C \ ; \ B_r(x) \cap \mathrm{aff}(C) \subset C$ para algum $r > 0\}$.

Proposição 1.2.6. *Sejam* C *um conjunto convexo e* $f_1, f_2, \cdots, f_m$ *funções reais, convexas tal que* $\mathrm{ri}(C) \subset \mathrm{dom}(f_i)$. *Então uma e somente uma das seguintes alternativas é verificada:*

(i) *Existe* $x \in C$ *tal que* $f_i(x) < 0$, *para todo* $i = 1, 2, \cdots, m$;

(ii) *Existem* $\lambda_i \geqslant 0$ *com* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ *tal que* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in C$.

Demonstração. Veja Teorema 21.1, página 186 [40]. □

A propriedade logo abaixo, estabele que somar funções convexas resulta em uma função convexa.

Proposição 1.2.7. *Sejam* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* $f_i : C \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, *funções convexas em* C. *Então para quaisquer* $\mu_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, *a função*

$$f : C \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$$

é convexa em C.

Demonstração. Veja Proposição 3.4.1, página 138 [24]. □

Agora estabeleceremos que o supremo de funções convexas também é uma função convexa.

Proposição 1.2.8. *Sejam* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo e* $f_i : C \to \mathbb{R}$, $i \in I$, *funções convexas em* C, *onde* I *é um conjunto qualquer. Suponhamos que exista* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que* $f_i(x) \leqslant \beta$ *para todo* $x \in C$ *e* $i \in I$. *Então a função*

$$f : C \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$$

é convexa em C.

Demonstração. Veja Proposição 3.4.2, página 138 [24]. □

1.2.2 Subdiferencial de Funções Convexas

Antes de definirmos subdiferencial de uma função convexa, vejamos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.4. *Sejam* $C \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto não vazio e convexo e* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então, para todo* $x \in \mathrm{int}\, C$, *existe* $s = s(x) \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\langle s, y - x \rangle + f(x) \leqslant f(y), \quad \forall\, y \in C.$$

Demonstração. Veja [40]. □

Assim podemos fazer a seguinte definição:

Definição 1.2.8. *Seja* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma função. Dizemos que* $s \in \mathbb{R}^n$ *é um subgradiente de* f *no ponto* $x \in C$ *se*

$$\langle s, y - x \rangle + f(x) \leqslant f(y), \quad \forall\, y \in C.$$

O conjunto de todos os subgradiente de f em x chama-se subdiferencial de f em x e é denotado por $\partial f(x)$.

Teorema 1.2.5. *Seja* $f : C \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Então para todo* x *no interior relativo de* C*,* $\mathrm{ri}(C)$ *, o conjunto* $\partial f(x)$ *é não vazio, compacto e convexo.*

Demonstração. Veja Teorema 3.4.12, página 173 [24] □

1.3 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Para finalizarmos nossas preliminares apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Usaremos este resultado na prova do Lema-KKM. Como em todos os resultados deste capítulo, não provaremos o Teorema de Brouwer.

Um ponto fixo de uma aplicação $f : C \to C$ é um elemento $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Teorema 1.3.1. (*Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*) *Se* $f : C \to C$ *é contínua e convexa, com* $C \subset \mathbb{R}^n$ *convexo, compacto e não vazio, então existe* $x_0 \in C$ *tal* $f(x_0) = x_0$.

Demonstração. Veja Teorema 2.5, páginas 10-11 [25] □

Capítulo 2

Problema de Equilíbrio

Neste capítulo, vamos nos basear, em grande parte, nos trabalhos de Blum e Oettli [5] e Iusem e Sosa[21]. Apresentaremos o problema de estudo deste trabalho e mostramos a importância de estudá-lo, enfatizando em seus casos particulares, como por exemplo: Otimização Convexa, Problemas de Ponto Fixo, Complementaridade, Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos e Problemas de Desigualdade Variacional. Terminamos este capítulo estabelecendo que nosso problema é mais geral, mostrando um exemplo de $\mathsf{PE}(f, C)$ que não se encaixa como nenhum outro acima.

2.1 Definição do Problema

O termo " equilíbrio" tem sido largamente usado em física, química, engenharias e economia dentro de diferentes estruturas, dependendo sobre diferentes modelos matemáticos. Por exemplo, ele pode referir-se à estruturas físicas ou mecânicas, processos químicos, redes de telecomunicações. Em economia, ele geralmente referi-se a dinâmica de oferta e demanda, sistemas competitivos, ao explorar modelos matemáticos em jogos não cooperativos e no correspondente conceito de equilíbrio desenvolvido por Nash [34].

Aqui consideramos Problemas de Equilíbrio, associado f, C e denotado por $\mathsf{PE}(f, C)$, segundo a formulação proposta por Blum e Oettli [5] o qual consiste em

$$\mathsf{PE}(f, C) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \ x^* \in \ C \ \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geqslant 0 \ \text{ para todo } \ y \in C, \end{cases}$$

onde

1. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é não vazio, convexo e fechado;

2. $f : C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção satisfazendo a condição:

   P1: $f(x, x) = 0$ para todo $x \in C$.

O ponto de partida para o estudo deste problema é obter condições necessárias e/ou suficientes para existência de soluções de $PE(f, C)$. E neste contexto, segundo a literatura, tudo começou, em 1972, quando Ky Fan [13] publicou sua famosa desigualdade minimax. Cabe ressaltar que segundo Castellani et al [4], Nikaido e Isoda [37] caracterizaram equilíbrio de Nash como as soluções de $PE(f, C)$ para uma função auxiliar apropriada, mas não consideraram o problema em si de um modo independente, isto por volta de 1955.

Problemas de equilíbrio no formato acima começam a ganhar o real interesse com a publicação do seminal paper de Blum e Oettli [5], onde os autores mostram que, se além de P1 f satisfizer

P2: $f(x, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferior para todo $x \in C$;

P3: $f(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$ é semicontínua superior para todo $y \in C$,

$PE(f, C)$ contém como casos particulares, problemas de otimização convexa, ponto fixo, complementaridade, problemas de equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos, problemas de desigualdade variacional, dentre outros. Dando assim a real importância em estudar $PE(f, C)$.

A seguir mostraremos como modelar os problemas listados acima para o nosso contexto de equilíbrio.

2.2 Casos Particulares e Modelagem

Esta seção será baseada em partes nos trabalhos [5], [21] e [4]. Além dos problemas expostos nesta seção outras classes de problemas podem ser vistas no formato de $PE(f, C)$ como o leitor poderá verificar nas referências citadas acima.

2.2.1 Problema de Otimização Convexa

Sejam $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferior e própria. O problema de otimização convexa é definido como:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } \; x^* \in \; C \; \text{ tal que} \\ h(x^*) \leqslant h(y) \; \text{ para } \; \text{todo } \; y \in C, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

onde $C = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; h(x) < \infty\}$ é um conjunto convexo e fechado.

Este problema surge em diversas aplicações e já possuem uma teoria rica e bem desenvolvida, veja por exemplo o clássico de Rockafellar [40] ou Solodov [24].

Uma das principais vantagens de estudar otimização convexa, ao contrário da não convexa, é que toda solução para este problema é global e também pela vasta gama de métodos computacionais à disposição.

Abaixo apresentemos dois exemplos simples.

Exemplo 2.2.1. (**Fluxo em Rede**) *Considere uma rede (i.e, um grafo orientado) com* n *nós e com arcos (direcionados) ligando cada par de nós. As variáveis do problema são os fluxos em cada arco:* x_{ij} *denota o fluxo do nó* i *para o nó* j. *Dadas as constantes* c_{ij}, *o custo do fluxo ao longo do arco de* i *para* j *é dado por* $c_{ij}x_{ij}$. *Assim, queremos minimizar o custo total do fluxo na rede, dado por*

$$C = \sum_{i,j}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Cada fluxo deve obedecer às cotas inferiores (l_{ij}) *e superiores* (u_{ij}), *ou seja,* $l_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}$. *Em cada nó, existem trocas com o meio externo à rede dadas por* b_i, *onde* $b_i > 0$ *se uma quantidade* b_i *entra na rede no nó* i *e* $b_i < 0$ *se uma quantidade* $|b_i|$ *sai da rede no nó* i. *Assumimos que* $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$, *ou seja, o fornecimento externo é igual à demanda externa. Além disso, em cada nó há a conservação do fluxo, ou seja, o total de fluxo que entra no nó* i *é igual ao fluxo que sai do nó* i.
Se formularmos esse problema como um programa linear, que é caso particular de otimização convexa, chegamos a

$$\begin{array}{rl} \textit{Minimizar} & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \textit{Sujeito a} & l_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}, \\ & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{ki} + b_i - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 0. \end{array}$$

Problemas de fluxo em redes têm várias aplicações em engenharia e logística.

Vamos estabelecer a relação entre Problema de Equilíbrio e Problema de Minimização Convexa através do seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. *Se* $f(x,y) = h(y) - h(x)$ *para todo* $x, y \in C$, *então* f *satisfaz P1–P3. Além disso,* x^* *é uma solução de* (2.1) *se, e somente se,* x^* *é uma solução de* $PE(f, C)$.

Demonstração. Temos que

P1. $f(x,x) = h(x) - h(x) = 0$ para todo $x \in C$.

P2. $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferior para todo $x \in C$.

De fato, primeiramente provemos a convexidade. Sejam $y, z \in C$ e $t \in [0,1]$, desde que h é convexa segue

$$\begin{aligned}
f(x, ty + (1-t)z) &= h(ty + (1-t)z) - h(x) \\
&\leqslant th(y) + (1-t)h(z) - th(x) - (1-t)h(x) \\
&= t\big[h(y) - h(x)\big] + (1-t)\big[h(z) - h(x)\big] \\
&= tf(x,y) + (1-t)f(x,z).
\end{aligned}$$

e assim temos $f(x,\cdot)$ é convexa para todo $x \in C$.

A semicontinuidade inferior de $f(x,\cdot)$ segue também do fato de h ser semicontínua inferior, pois dada $\big(y^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em C tal que $y^k \to y$ tem-se

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty} f(x,y^k) &= \liminf_{k\to+\infty} \big[h(y^k) - h(x)\big] \\
&\geqslant \liminf_{k\to+\infty} h(y^k) - h(x) \\
&\geqslant h(y) - h(x) \\
&= f(x,y).
\end{aligned}$$

provando, portanto que para todo $x \in C$, $f(x,\cdot)$ é semicontínua inferior. Logo, P2 fica verificada.

P3. $f(\cdot,y) : C \to \mathbb{R}$ é semicontínua superior para todo $y \in C$.

Com efeito, dado $\big(z^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em C tal que $z^k \to x$, temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to+\infty} f(z^k,y) &= \limsup_{k\to+\infty} \big[h(y) - h(z^k)\big] \\
&\leqslant h(y) + \limsup_{k\to+\infty} \big(-h(z^k)\big) \\
&= h(y) - \liminf_{k\to+\infty} h(z^k) \\
&\leqslant h(y) - h(x) \\
&= f(x,y).
\end{aligned}$$

assim por definição segue o desejado.

Agora, suponha que x^* resolve o (2.1), ou seja, $h(x^*) \leqslant h(y) \quad \forall\, y \in C$. Daí, tem-se

$$f(x^*,y) = h(y) - h(x^*) \geqslant 0 \;\; \forall\, y \in C.$$

Logo, x^* é solução de $\mathsf{PE}(f, C)$. Reciprocamente, consideremos que x^* é uma solução de $\mathsf{PE}(f, C)$, isto é, $f(x^*, y) \geqslant 0 \ \ \forall \, y \in C$. Então

$$0 \leqslant f(x^*, y) = h(y) - h(x^*) \ \ \Rightarrow \ \ h(x^*) \leqslant h(y) \quad \forall \, y \in C.$$

Donde, x^* é uma solução de (2.1). Assim nosso Teorema fica provado. □

2.2.2 Problema de Ponto Fixo

Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação contínua $T : C \to C$. O problema de ponto fixo consiste em:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } \ x^* \in \ C \ \text{ tal que} \\ \qquad T(x^*) = x^*. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

A teoria de ponto fixo é uma das mais poderosas e importante ferramentas da matemática moderna. Ela é uma linda mistura de análise, topologia e geometria. Em particular, técnicas de ponto fixo têm sido aplicadas em diversos ramos da matemática, assim como em economia e teoria dos jogos.

Em 1912, Brouwer publica [9], onde o autor prova um dos mais conhecidos teorema da teoria e que leva seu nome, já apresentamos uma versão deste resultado neste trabalho. A Teoria de Ponto Fixo apresenta inúmeras aplicabilidades, por exemplos: ele foi utilizado por von Neumann para demonstrar a existência de uma solução minimax em jogos entre dois jogadores (veja páginas 310-311 [35]). E, em 1950, Nash fez uso desta teoria para provar em jogos não cooperativos que todo jogo finito tem um ponto de equilíbrio (Teorema 1, [34]).

Na sequência mostremos como (2.2) pode ser formulado no formato de um problema de equilíbrio.

Teorema 2.2.2. *Assuma que* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f(x, y) = \langle x - T(x), y - x \rangle$. *Então*

(i) f *satisfaz* $\mathsf{P1} - \mathsf{P3}$*;*

(ii) T *tem um ponto fixo se, e somente se,* $S(f, C) \neq \emptyset$*;*

(iii) f *é monótona se, e somente se,* $\langle Tx - Ty, x - y \rangle \leqslant \|x - y\|^2$, $\forall \, x, y \in C$.

Demonstração. (i) Pela definição de f segue

$f(x,x) = \langle x - T(x), x - x\rangle = 0$ donde P1 fica verificada.

Agora, seja $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em C convergindo para y, com isso $y \in C$ já que C é fechado. Da continuidade do produto interno, temos

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} f(x,y^k) &= \liminf_{k\to\infty}\langle x - T(x), y^k - x\rangle \\ &= \langle x - T(x), y - x\rangle \\ &= f(x,y)\end{aligned}$$

e assim $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferior. Considerando uma sequência $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em C convergindo para $x \in C$, pela continuidade de T e do produto interno segue

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} f(z^k,y) &= \limsup_{k\to\infty}\langle z^k - T(z^k), y - x^k\rangle \\ &= \langle x - T(x), y - x\rangle \\ &= f(x,y),\end{aligned}$$

o que implica que $f(\cdot,y) : C \to \mathbb{R}$ é semicontínua superior.

Da linearidade do produto interno obtemos que $f(x,\cdot)$ é convexa. Portanto, P1, P2 e P3 são verificadas.

(ii) Suponha que $x^* \in C$ é tal que $T(x^*) = x^*$. Então para todo $y \in C$ temos

$$f(x^*,y) = \langle x^* - T(x^*), y - x^*\rangle = \langle 0, y - x^*\rangle = 0.$$

Logo $x^* \in S(f,C)$.

Reciprocamente, assuma que $S(f,C) \neq \emptyset$. Considere $x^* \in S(f,C)$ e escolha $y = T(x^*)$, assim segue que

$$\begin{aligned}0 \leqslant f(x^*,y) &= \langle x^* - T(x^*), y - x^*\rangle \\ &= -\|T(x^*) - x^*\|^2.\end{aligned}$$

Implicando $\|T(x^*) - x^*\| = 0$, ou seja, $T(x^*) = x^*$.

(iii) Veja que

$$\begin{aligned}f(x,y) + f(y,x) &= \langle x - T(x), y - x\rangle + \langle y - T(y), x - y\rangle \\ &= \langle T(x) - x + y - T(y), x - y\rangle \\ &= \langle T(x) - T(y), x - y\rangle + \langle y - x, x - y\rangle \\ &= \langle T(x) - T(y), x - y\rangle - \|x - y\|^2, \quad \forall\, x,y \in C. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Portanto, o fato de f ser monótona (i.e. $f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$) é suficiente e necessário para que se tenha $\langle T(x)-T(y),x-y\rangle \leqslant \|x-y\|^2 \ \ \forall\, x,y\in C$. □

Obs 2.2.1. *Em particular, se* T *é não expansivo, i.e.* $\|T(x)-T(y)\|\leqslant\|x-y\|$, *para todo* $x,y\in C$, *então segue que* f *é monótona. De fato, usando* (2.3) *e a desigualdade de Cauchy-Schwartz tem-se*

$$\begin{aligned} f(x,y)+f(y,x) &= \langle T(x)-T(y),x-y\rangle-\|x-y\|^2\\ &\leqslant \|T(x)-T(y)\|\|x-y\|-\|x-y\|^2\\ &\leqslant \|x-y\|^2-\|x-y\|^2\\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x,y\in C$. *Logo,* f *é monótona.*

2.2.3 Problema de Complementaridade

Nesta subseção, definimos problema de complementaridade, tecemos alguns comentários sobre este problema, faremos uma aplicação deste problema que pode ser encontrada em Isac [18] e por fim mostraremos que resolver complementaridade é equivalente a resolver um $PE(f,C)$, para f conveniente.

Seja $T:C\to\mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. O problema de complementaridade consiste em

$$PC(T,C):\begin{cases}\text{Encontrar } x^*\in C \text{ tal que}\\ T(x^*)\in C^\star \text{ e } \left\langle x^*,T(x^*)\right\rangle=0,\end{cases}$$

onde, $C\subset\mathbb{R}^n$ é cone convexo, fechado e $C^\star=\{y\in\mathbb{R}^n \ ; \ \langle y,d\rangle\geqslant 0 \ \ \forall\ d\in C\}$ seu cone polar.

Vários problemas surgidos em matemática e áreas afins, como por exemplo: Economia, Mecânica, Engenharia, dentre outros. Podem ser estabelecidos no formato $PC(T,C)$, o leitor interessado deve consultar [18] para detalhes.

Segundo George Isac[18], a origem do problema de complementaridade está talvez no Teorema Karush–Kuhn–Tucker para programação não–linear (o qual fornece condições necessárias de otimalidade quando certas condições de diferenciabilidade são satisfeitas) ou talvez no paper de Du Val [11]

A teoria de complementaridade extrai sua importância e desenvolvimento do fato dela unificar problemas em várias áreas do conhecimento, tais como: otimização em $\mathbb{R}^n_+$, teoria dos jogos, a teoria de equilíbrio em um economia competitiva, engenharia, teoria de elasticidade, maximização de produção de óleo, cálculo de pontos fixos e etc. Algumas dessas aplicações são encontradas nos trabalhos de George Isac [18] ou Ferris[14].

Na sequência, apresentamos um exemplo que pode ser formulado no formato de $\mathsf{PC}(\mathsf{T},\mathsf{C})$.

Consideremos um sistema com n diferentes mercadorias (bens de consumo) e m comerciantes comprando e vendendo estas mercadorias.

Sejam $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$ funções de utilidade de cada comerciante. Assim, certamente cada comerciante desejará resolver o problema:

$$\max_{s.a\ \langle p,x\rangle \leqslant \langle p,w^i\rangle} u^i(x), \tag{2.4}$$

onde

$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ – vetor preço, i.e, p_i é preço do i-ésima bem ($p_i \geqslant 0$);

$w^i = (w^i_1, w^i_2, \cdots, w^i_n)$ – vetor de mercadorias disponível ao i-ésimo comerciante;

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – vetor de bens que cada comerciante deseja obter.

Portanto, cada comerciante deseja maximizar sua utilidade, u_i, sujeito a uma restrição orçamentária, $\langle p, w^i\rangle$.

Se uma solução de (2.4) é denotado por $x^i(p)$, consideremos a função $\mathsf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathsf{f}(p) = \sum_{i=1}^{m} \big(x^i(p) - w^i\big),$$

a qual chamamos de função excesso de demanda.

Neste caso, a Lei de Walras afirma que, para o preço equilíbrio p temos, $\mathsf{f}(p) \in \mathbb{R}^n_+$ e $\big\langle p, \mathsf{f}(p)\big\rangle = 0$ (Veja Mas-Colell, páginas 580–581 [29]).

Isto é, temos que encontrar o equilíbrio econômico. Neste caso é necessário resolver o seguinte problema de complementaridade:

$$\mathsf{PC}(\mathsf{f},\mathsf{C}) : \left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } p \in \mathbb{R}^n_+ \text{ tal que} \\ \mathsf{f}(p) \in \mathbb{R}^n_+ \text{ e } \big\langle p, \mathsf{f}(p)\big\rangle = 0, \end{array} \right.$$

onde $\mathsf{C} = \mathbb{R}^n_+$ implicando que $\mathsf{C}^\star = \mathbb{R}^n_+$ e $\mathsf{T} = \mathsf{f}$.

Agora sabendo da grande importância do problema de complementaridade em várias áreas do conhecimento, vamos apresentar a relação entre esse problema e o problema de relevância desta dissertação que é o problema de equilíbrio. Veremos que resolver um problema da teoria de complementaridade é equivalente a resolver um problema de equilíbrio.

Teorema 2.2.3. *Sejam* T *e* C *como em* $PC(T,C)$. *Se* $f(x,y) = \langle T(x), y-x \rangle$ *para todo* $x, y \in C$, *então* f *satisfaz* $P1 - P3$. *Além disso,* x^* *é uma solução de* $PC(T,C)$ *se, e somente se,* x^* *é uma solução de* $PE(f,C)$.

Demonstração. Temos que (P1) é óbvio, pois $f(x,x) = \langle T(x), x-x \rangle = \langle T(x), 0 \rangle = 0$ para todo $x \in C$. Agora considere a função $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \langle T(x), y-x \rangle$, (P2) segue das afirmações.

Afirmação 1. $f(x,\cdot)$ é convexa.

Dados $y, z \in C$ e $t \in [0,1]$ como C é cone convexo segue que $(1-t)y + tz \in C$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} f(x,(1-t)y+tz) &= \langle T(x), (1-t)y + tz - x \rangle \\ &= \langle T(x), (1-t)y + tz - (1-t)x - tx \rangle \\ &= \langle T(x), (1-t)(y-x) + t(z-x) \rangle \\ &= (1-t)\langle T(x), y-x \rangle + t\langle T(x), z-x \rangle \\ &= (1-t)f(x,y) + tf(x,z). \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação 1 fica provada.

Afirmação 2. $f(x,\cdot)$ é semicontínua inferior para todo $x \in C$.

De fato, considere $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em C tal que $y^k \to y$, desde que C seja fechado segue que $y \in C$. Daí, pela continuidade do produto interno

$$\liminf_{k\to\infty} f(x,y^k) = \liminf_{k\to\infty} \langle T(x), y^k - x \rangle = \langle T(x), y-x \rangle = f(x,y).$$

Logo, $f(x,\cdot)$ é semicontínua inferior para todo $x \in C$.

Mostremos agora que a função $f(\cdot,y) : C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \langle T(x), y-x \rangle$ é semicontínua superior para todo $y \in C$. Para isso, seja $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência C tal que $z^k \to x$, C sendo fechado temos $x \in C$. Usando a continuidade de T e do produto interno segue,

$$\limsup_{k\to\infty} f(z^k,y) = \limsup_{k\to\infty} \langle T(z^k), y - z^k \rangle = \langle T(x), y-x \rangle = f(x,y).$$

Portanto, $f(\cdot,y)$ é semicontínua superior e assim (P3) fica provada.

Suponha que x^* seja solução do problema de complementaridade, então $T(x^*) \in C^\star$ (i.e,

$\langle T(x^*), y \rangle \geqslant 0, \ \forall\, y \in C$) e $\langle T(x^*), x^* \rangle = 0$. Assim,

$$f(x^*, y) = \langle T(x^*), y - x^* \rangle = \langle T(x^*), y \rangle \geqslant 0.$$

Logo, x^* é solução do problema de equilíbrio.

Reciprocamente, suponha que x^* seja solução de $PE(f, C)$, então $f(x^*, y) = \langle T(x^*), y - x^* \rangle \geqslant 0, \ \forall\, y \in C$. Assim, tomando $y = 2x^*$ temos

$$0 \leqslant \langle T(x^*), y - x^* \rangle = \langle T(x^*), x^* \rangle \tag{2.5}$$

e por outro lado, tomando $y = 0$, segue

$$0 \leqslant \langle T(x^*), y - x^* \rangle = \langle T(x^*), -x^* \rangle = -\langle T(x^*), x^* \rangle. \tag{2.6}$$

Dessa forma de (2.5) e (2.6) tem-se $\langle T(x^*), x^* \rangle = 0$ e portanto $\langle T(x^*), y \rangle \geqslant 0$ para todo $y \in C$, i.e, $T(x^*) \in C^*$. Logo, x^* é solução de $PC(T, C)$. $\square$

2.2.4 Problema de Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos

Segundo Bortolossi et al [6], a Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob situações de conflito.

Ainda segundo Bortolossi et al [6], em seu início, a teoria dos jogos chamou pouca atenção e foi o matemático John von Neumann que mudou esta situação. Quando 1928, ele demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em estratégias mistas [35]. John von Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, mostrou interesse em economia e, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico "The Theory of Games and Economic Behaviour"[36] e, com isto, a teoria dos jogos invadiu a economia e a matemática aplicada.

Na teoria do jogos há uma divisão entre jogos cooperativos e não cooperativos. Nos jogos cooperativos admite-se que os jogadores ajustem entre eles uma escolha de estratégias, assim os jogadores podem fazer acordos/contratos que influenciarão os resultados do jogo. No não cooperativo as decisões dos jogadores são baseadas apenas em seu auto interesse e portanto, cada competidor escolhe sua estratégia sozinho.

Em 1950, o matemático John Forbes Nash publicou importantes artigos para a teoria dos jogos não cooperativos. Em [33, 34], Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não cooperativos, denominado *Equilíbrio de Nash*, e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos a partir de sua redução para a forma não cooperativa.

Caminhemos à estabelecer o problema de equilíbrio de Nash.

Consideremos um conjunto com m-jogadores que denotamos por $I = \{1, 2, \cdots, m\}$. Para cada jogador $i \in I$, associemos um conjunto de estratégias, digamos que $C_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ o qual assumimos ser não vazio, convexo e fechado. Denotemos $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_m$, o conjunto de todas as estratégias dos m-jogadores, o qual chamamos espaço de estratégias do jogo. Para cada competidor $i \in I$, considere uma função contínua

$$\begin{array}{rcccl} f_i & : & C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

a qual é convexa no i-ésimo argumento e que associa o ganho (payoffs ou custo), f_i, do i-ésimo jogador a cada estratégia $x \in C$.

O Problema de Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos associado a $\{C_i\}_{i\in I}$ e $\{f_i\}_{i\in I}$ consiste em:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } \ x^* = (x_i^*)_{i\in I} \in \ C \ \text{ tal que } \ \forall\, i \in I \\ f_i(x^*) \leqslant f_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_m^*) \ \ \forall\, y_i \in C_i. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Em outras palavras, isto nos diz que nenhum jogador tem qualquer ganho por mudar apenas suas estratégias. O ponto x^* é chamado de equilíbrio de Nash.

Em 1994, John Nash recebeu o prêmio Nobel de econômia por suas contribuições para a teoria dos jogos.

A seguir, apresentamos um exemplo bastante conhecido da teoria dos jogos

Exemplo 2.2.2. (**O Dilema dos Prisioneiros**) *A situação é a seguinte: dois ladrões são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicarem entre si, o delegado de plantão faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão. Neste contexto, temos*

$I = \{1, 2\}$, $C_1 = \{\textit{confessar, negar}\}$, $C_2 = \{\textit{confessar, negar}\}$ *e*

$C = \{(\textit{confessar, confessar}), (\textit{confessar, negar}), (\textit{negar,confessar}), (\textit{negar,negar})\}$

As duas funções payoff $\mathsf{f}_1 : \mathsf{C} \to \mathbb{R}$ *e* $\mathsf{f}_2 : \mathsf{C} \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$\mathsf{f}_1(\textit{confessar,confessar}) = -5, \qquad \mathsf{f}_1(\textit{confessar,negar}) = 0,$$

$$\mathsf{f}_1(\textit{negar,confessar}) = -10, \qquad \mathsf{f}_1(\textit{negar,negar}) = -1$$

representa os ganhos do primeiro ladrão e abaixo temos os ganhos do seguno ladrão

$$\mathsf{f}_2(\textit{confessar,confessar}) = -5, \qquad \mathsf{f}_2(\textit{confessar,negar}) = -10,$$

$$\mathsf{f}_2(\textit{negar,confessar}) = 0, \qquad \mathsf{f}_2(\textit{negar,negar}) = -1.$$

Observe que (confessar,confessar) é o Equilíbrio de Nash para este problema, pois se um prisioneiro confessar e o outro não, aquele que não confessou fica preso na cadeia 10 anos, ao invés de 5 anos, se tivesse confessado. Veja também que o equilíbrio de Nash nem sempre é a melhor solução do problema, já que a mesma deveria ser (negar,negar).

Estabeleceremos a seguir a relação entre equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos e problema de equilíbrio.

Teorema 2.2.4. *Se* $\mathsf{f} : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\mathsf{f}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) - \mathsf{f}_i(x)\big),$$

então f *satisfaz* $\mathsf{P1} - \mathsf{P3}$*. Além disso,* $x^* \in \mathsf{C}$ *é um equilíbrio de Nash se, e somente se,* $x^* \in \mathsf{S}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$*.*

Demonstração. Veja que $\mathsf{f}(x, x) = \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) - \mathsf{f}_i(x)\big) = 0$ e assim $\mathsf{P1}$ é verificada.

Da continuidade das f_i segue

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \mathsf{f}(x, y^k) &= \liminf_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i^k, x_{i+1}, \cdots, x_m) - \mathsf{f}_i(x)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_m) - \mathsf{f}_i(x)\big) \\
&= \mathsf{f}(x, y),
\end{aligned}$$

para qualquer sequência $\{y^k\}$ de C convergindo para $y \in \mathsf{C}$ e para qualquer $\{z^k\}$ sequência em C convergindo para $z \in \mathsf{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \mathsf{f}(z^k, y) &= \limsup_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(x_1^k, \cdots, z_{i-1}^k, y_i, z_{i+1}^k, \cdots, z_m^k) - \mathsf{f}_i(z^k)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(\mathsf{f}_i(z_1, \cdots, z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \cdots, z_m) - \mathsf{f}_i(z)\big) \\
&= \mathsf{f}(z, y).
\end{aligned}$$

Agora, sejam $y, z \in C$ e $\lambda \in [0,1]$. Pela convexidade de C e das f_i em cada argumento obtemos

$$\begin{aligned} f(x,(1-\lambda)y+\lambda z) &= \sum_{i=1}^{m}\big(f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},(1-\lambda)y_i+\lambda z_i,x_{i+1},\cdots,x_m)-f_i(x)\big) \\ &\leqslant (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\big(f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_m)-f_i(x)\big)+ \\ &\quad +\lambda\sum_{i=1}^{m}\big(f_i(x_1,\cdots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\cdots,x_m)-f_i(x)\big) \\ &= (1-\lambda)f(x,y)+\lambda f(x,z). \end{aligned}$$

Portanto, P2 e P3 são válidas.

Suponha que $x^* \in C$ é equilíbrio de Nash, isto é, (2.7) é obtida para todo $i \in I$, então segue

$$\begin{aligned} f(x^*,y) &= \sum_{i=1}^{m}\big(f_i(x_1^*,\cdots,x_{i-1}^*,y_i,x_{i+1}^*,\cdots,x_m^*)-f_i(x^*)\big) \\ &\geqslant 0, \qquad \forall\, y_i \in C_i \end{aligned}$$

ou seja, $x^* \in S(f,C)$.

Reciprocamente, Se $x^* \in C$ satisfazendo que $f(x^*,y) \geqslant 0\ \forall\, y \in C$, então para qualquer $i \in I$, tome $y \in C$ tal que $y_j = x_j^*$ para qualquer $j \neq i$, obtemos

$$0 \leqslant f(x^*,y) = f_i(x_1^*,\cdots,x_{i-1}^*,y_i,x_{i+1}^*,\cdots,x_m^*)-f_i(x^*).$$

Logo, x^* é um equilíbrio de Nash. □

2.2.5 Problema de Desigualdade Variacional

Segundo Anna Nagurney [32], a teoria das desigualdades variacionais foi introduzida por Philip Hartman e Guido Stampacchia no artigo [16] para o estudo de equações diferenciais parciais, publicado em 1966. Contudo, segundo o próprio Stampacchia [42] o primeiro teorema de existência para desigualdade variacional foi provado em [41].

Na sequência, definimos o problema de desigualdade variacional e adiante trabalharemos dois modelos deste problema.

Definição 2.2.1. *Sejam* C *um subconjunto não vazio, convexo e fechado de* $\mathbb{R}^n$ *e* T *uma aplicação contínua de* $\mathbb{R}^n$ *em si mesmo. O Problema de Desigualdade Variacional, denotado por* $\mathrm{VIP}(T,C)$, *é encontrar um vetor* $x^* \in C$ *tal que*

$$\langle T(x^*), y-x^*\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, y \in C. \tag{2.8}$$

Desigualdade variacional tem oferecido uma grande possibilidade de aplicações a vários problemas fundamentais da matemática pura e econômica, da física matemática, engrenharia, dentre outras. O leitor que deseje aprofundar seus conhecimentos nesta área, encontrará em [25] um ótimo alicerce para ínicio de trabalho e vasta gama de aplicações.

Exemplo 2.2.3. *Seja* $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável. Buscamos o ponto* $x_0 \in [a, b]$ *para o qual*

$$f(x_0) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

Três situações pode ocorrer:

(i) se $a < x_0 < b$, então $f^{'}(x_0) = 0$;

(ii) se $x_0 = a$, então $f^{'}(x_0) \geqslant 0$;

(iii) se $x_0 = b$, então $f^{'}(x_0) \leqslant 0$.

Consequentemente, o ponto x_0 satisfaz a desigualdade variacional

$$f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Exemplo 2.2.4. *Seja* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *convexo, fechado e* $h : C \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Novamente desejamos caracterizar o ponto* $x_0 \in C$ *tal que*

$$h(x_0) = \min_{x \in C} h(x).$$

Assuma x_0 *é um ponto onde o mínimo é realizado e seja* $x \in C$*. Desde que* C *é convexo, o segmento* $(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$*, pertence a* C*.*
A função

$$\psi(t) = h(x_0 + t(x - x_0)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

atinge seu mínimo em $t = 0$*, assim como no exemplo acima*

$$\psi^{'}(0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geqslant 0, \quad \textit{para qualquer } x \in C.$$

Consequentemente, o ponto x_0 *satisfaz a desigualdade variacional*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in C.$$

Mostremos na sequência a relação entre $VIP(T, C)$ e problema de equilíbrio. Para isto consideremos $VIP(T, C)$ em dois formatos:

Dado um conjunto fechado, convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, temos

$$VIP(T, C) : \left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que} \\ \left\langle T(x^*), y - x^* \right\rangle \geqslant 0, \ \forall\, y \in C. \end{array} \right.$$

Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$. Se $\bar{T} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação ponto-conjunto, com $\bar{T}(x)$ um conjunto compacto, convexo, não vazio para todo $x \in C$, tem-se

$$\mathsf{VIP}(\bar{T}, C) : \left\| \begin{array}{l} \text{Encontrar } x^* \in C \text{ e } u^* \in \bar{T}(x^*) \text{ tal que} \\ \langle u^*, y - x^* \rangle \geqslant 0, \ \ \forall\, y \in C. \end{array} \right.$$

Para estabelecermos nosso resultado de equivalência entre $\mathsf{VIP}(\bar{T}, C)$ e $\mathsf{PE}(f, C)$ necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.2.1. *Sejam* K *um conjunto compacto, convexo e* C *um conjunto convexo. Considere* $p : K \times C \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo:*

(a) $p(\cdot, y) : K \to \mathbb{R}$ *é concava e semicontínua superior para cada* $y \in C$*;*

(b) $p(x, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ *é convexa para cada* $x \in K$*.*

Assuma que

$$\max_{x \in K} p(x, y) \geqslant 0, \quad \forall\, y \in C.$$

Então existe $x^* \in K$ *tal que* $p(x^*, y) \geqslant 0, \quad \forall\, y \in C$*.*

Demonstração. Assuma por contradição que a conclusão não é verdadeira. Então para todo $x \in K$ existe $y \in C$ e $\varepsilon > 0$ tal que $p(x, y) < -\varepsilon$.

Assim, considerando os conjuntos $A(y, \varepsilon) := \{x \in K \ ; \ p(x, y) < -\varepsilon\}$, temos:

(i) são abertos, pois tomando (z^k) uma sequência em $A(y, \varepsilon)^c$ tal que $z^k \to x$ temos pela semicontinuidade superior, item(a), que $x \in A(y, \varepsilon)^c$ e assim $A(y, \varepsilon)$ é aberto.

(ii) formam uma cobertura o conjunto compacto K.

Pela definição de conjunto compacto, Definição 1.1.6, K admite uma subcobertura finita, digamos,

$$A(y^i, \varepsilon_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Tomando $\varepsilon = \min\limits_{i} \varepsilon_i$. Então de $K \subset \bigcup_{i=1}^m A(y^i, \varepsilon_i)$, segue

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant m} p(x, y^i) \leqslant -\varepsilon \ \ \forall\, x \in K.$$

Desde que, as funções $p(\cdot, y^i)$ são concavas, temos que a função $g : K \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = -\varepsilon - p(x, y^i)$$

é convexa para cada y^i fixado. Como $g(x) \geqslant 0, \ \forall\, x \in K$, pela proposição 1.2.6, existem $\lambda_i \geqslant 0$ com $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g(x) \geqslant 0, \ \ \forall\, x \in K.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}0 &\leqslant -\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varepsilon - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i p(x, y^i)\\ &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\lambda_i - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i p(x, y^i)\\ &= -\varepsilon - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i p(x, y^i),\end{aligned}$$

e portanto $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i p(x, y^i) \leqslant -\varepsilon$ para todo $x \in K$. Agora, pela convexidade da função $p(x, \cdot)$, item (b), com $\hat{y} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i y^i$ temos $p(x, \hat{y}) \leqslant -\varepsilon$ para todo $x \in K$. Logo, $\max_{x\in K} p(x, \hat{y}) < 0$, contradizendo a hipótese do Lema e então obtemos o desejo. □

Teorema 2.2.5. *Temos que:*

(i) *Definindo* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *por* $f(x, y) = \langle T(x), y - x\rangle$. *Seque que* P1, P2 *e* P3 *são verificadas e* x^* *é solução de* $\mathsf{VIP}(T, C)$ *se, e somente se,* x^* *é solução de* $\mathsf{PE}(f, C)$*;*

(ii) *Definindo* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *pondo* $f(x, y) = \max\limits_{u\in\bar{T}(x)} \langle u, y - x\rangle$. *Segue* P1, P2 *e* P3 *são satisfeitas e* x^* *resolve* $\mathsf{PE}(f, C)$ *se, e somente se, junto com algum* u^* *é solução de* $\mathsf{VIP}(\bar{T}, C)$.

Demonstração. (i) Suponha que x^* é resolve $\mathsf{PE}(f, C)$, então pela definição de f temos $\langle T(x^*), y - x^*\rangle \geqslant 0$ para todo $y \in C$. Logo, x^* é resolve $\mathsf{VIP}(T, C)$. Reciprocamente, suponha que x^* soluciona $\mathsf{VIP}(T, C)$, então tem-se que para todo $y \in C$, $\langle T(x^*), y - x^*\rangle \geqslant 0$, isto é, $f(x^*, y) \geqslant 0$, para todo $y \in C$, assim x^* é solução de $\mathsf{PE}(f, C)$.
Provemos agora (ii). Se x^*, u^* resolvem $\mathsf{VIP}(\bar{T}, C)$, (i.e., $x^* \in C$, $u^* \in \bar{T}(x^*)$), então

$$f(x^*, y) = \max_{u\in\bar{T}(x^*)} \langle u, y - x^*\rangle \geqslant \langle u^*, y - x^*\rangle \geqslant 0, \quad \forall\, y \in C,$$

e daí x^* satisfaz $\mathsf{PE}(f, C)$. A recíprocamente, suponha que x^* é solução de $\mathsf{PE}(f, C)$. Tomando $K = \bar{T}(x^*)$ e $p(x, y) = \langle x, y - x^*\rangle$. Da continuidade e convexidade do produto interno (em cada argumento) e segue que as hipóteses do Lema 2.2.1 são verificada. Logo, existe u^* solução de $\mathsf{VIP}(\bar{T}, C)$. □

2.3 A Generalidade do Problema de Equilíbrio

Para finalizarmos este capítulo vamos mostrar, através de um exemplo, que $\mathsf{PE}(f, C)$ é de fato uma genuína generalização, no sentido que existem problemas $\mathsf{PE}(f, C)$ no qual não se ajusta ao formato de tais casos particulares.

Exemplo 2.3.1. *Considere* $\mathsf{C} = \mathbb{R}^2$ *e* $\mathsf{f} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *definida por*

$$f(x,y) = \|y\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2 - x_2y_1, \tag{2.9}$$

onde $x = (x_1, x_2)$*,* $y = (y_1, y_2)$ *e* $\|x\| \neq 0$*. Então*

1· f *satisfaz* $P1 - P4$.

De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *e* $t \in (0,1)$

P1. $f(x,x) = \|x\|^2 - \|x\|^2 + x_1x_2 - x_2x_1 = 0$

P2.

$$\begin{aligned} f(x,(1-t)y+tz) &= \|(1-t)y+tz\|^2 - \|x\|^2 + x_1\big[(1-t)y_2+tz_2\big] - x_2\big[(1-t)y_1+tz_1\big] \\ &= \|(1-t)y+tz\|^2 - \|x\|^2 + (1-t)x_1y_2 + tx_1z_2 - (1-t)x_2y_1 - tx_2z_1 \\ &\leqslant (1-t)\big[\|y\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2 - x_2y_1\big] + t\big[\|z\|^2 - \|x\|^2 + x_1z_2 - x_2z_1\big] \\ &= (1-t)f(x,y) + tf(x,z). \end{aligned}$$

Logo $f(x,\cdot)$ *é convexa.*

Agora seja $\{y^k = (y_1^k, y_2^k)\}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $y^k \to y$*. Assim*

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} f(x,y^k) &= \liminf_{k\to\infty}\big[\|y^k\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2^k - x_2y_1^k\big] \\ &= \liminf_{k\to\infty}\|y^k\|^2 - \|x\|^2 + x_1\liminf_{k\to\infty} y_2^k - x_2\liminf_{k\to\infty} y_1^k \\ &= \|y\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2 - x_2y_1 \\ &= f(x,y). \end{aligned}$$

Logo, $f(x,\cdot)$ *é semicontínua inferior para todo* $x \in C$.

P3. Seja $\{z^k = (z_1^k, z_2^k)\}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $z^k \to x$*, isto é,* $z_1^k \to x_1$ *e* $z_2^k \to x_2$*. Daí*

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} f(z^k,y) &= \limsup_{k\to\infty}\big[\|y\|^2 - \|z^k\|^2 + z_1^ky_2 - z_2^ky_1\big] \\ &= \|y\|^2 + \limsup_{k\to\infty}(-\|z^k\|^2) + y_2\limsup_{k\to\infty} z_1^k - y_1\limsup_{k\to\infty} z_2^k \\ &= \|y\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2 - x_2y_1 \\ &= f(x,y). \end{aligned}$$

Logo a função $f(\cdot,y)$ *é semicontínua superior para todo* y.

P4. Temos que f *é monótona, i.e,* $f(x,y) + f(y,x) \leqslant 0 \quad \forall\, x, y \in C$ *. Com efeito,*

$$f(x,y) + f(y,x) = \big[\|y\|^2 - \|x\|^2 + x_1y_2 - x_2y_1\big] + \big[\|x\|^2 - \|y\|^2 + y_1x_2 - y_2x_1\big] = 0.$$

2. *Não existe* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x, y) = h(y) - h(x)$.

De fato, desde que $\|x\| \neq 0$ *tem-se* f, *como em* (2.9), *não pode ser separada na forma acima.*

3. *Não existe* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = \langle x - Tx, y - x\rangle$.

Com efeito, se existisse $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = \langle x - Tx, y - x\rangle$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^2$. *Tome* $x \in \mathbb{R}^2$ *com* $\|x\| \neq 0$ *e tomando também, respectivamente,* $y = 2x$ *e* $y = 3x$ *obtemos*

$$\langle x - Tx, x\rangle = 4\|x\|^2 - \|x\|^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_1 = 3\|x\|^2 \tag{2.10}$$

e

$$\langle x - Tx, 2x\rangle = 9\|x\|^2 - \|x\|^2 + 3x_1x_2 - 3x_2x_1 = 8\|x\|^2,$$

donde segue

$$\langle x - Tx, x\rangle = 4\|x\|^2 \tag{2.11}$$

De (2.10) *e* (2.11) *obtemos* $\|x\|^2$ *implicando em* $\|x\| = 0$, *o que contradiz o fato de temos assumido que* $\|x\| \neq 0$. *Logo não pode existir* T *nas condições acima.*

4. *Não existe* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(x, y) = \langle Tx, y - x\rangle$.

Com efeito, suponha que tal aplicação T *nas condições acima exita e então assumindo* $\|x\| \neq 0$ *tome* $y = 2x$ *e* $y = 3x$, *respectivamete. Repetindo o processo análogo ao item anterior, obtemos a mesma contradição do item* 3. *Logo, concluimos que tal aplicação* T *não pode existir.*

5. *Não existe* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $f(x, y) = \max\limits_{u \in T(x)} \langle u, y - x\rangle$.

Com efeito, segue de modo análogo ao anterior.

Em Iusem e Sosa [21], os autores apresentam uma forma geral do exemplo acima, o qual apresentaremos a seguir contudo devido a semelhança nas demostrações não entraremos em detalhes nas mesmas. O leitor interessado pode ver (Proposição 2.6 [21]).

Exemplo 2.3.2. *Considere* $C = \mathbb{R}^n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *definida por* $f(x, y) = y^tAy + x^tBy - x^tAx$, *onde* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é matriz antissimétrica, e* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é matriz semidefinida positiva, satisfazendo* $x^tAx > 0$ *para algum* $x \in \mathbb{R}^n$. *Então*

1. f *satisfaz* $P1 - P4$,

2. *Não existe* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x, y) = h(y) - h(x)$,

3. *Não existe* $T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f(x, y) = \max\limits_{u \in T(x)} \langle u, y - x\rangle$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$,

4. *Não existe* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $f(x, y) = \langle x - Tx, y - x\rangle$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Capítulo 3

Resultados de Existência

Neste capítulo, vamos nos basear nos trabalhos de Ky Fan [13], Brézis et al [7], Blum e Oettli [5], Bianchi e Pini [3], Castellani et al [4], Iusem et al [20] e Iusem e Sosa [21].

Vimos no capítulo anterior, que problema de equilíbrio é definido como segue

$$\mathsf{PE}(f, C) : \begin{cases} \text{Encontrar } \ x^* \in \ C \ \text{ tal que} \\ f(x^*, y) \geqslant 0 \ \text{ para } \ \text{todo } \ y \in C, \end{cases}$$

onde

1. C é subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^n$,
2. $f \colon C \times C \to \mathbb{R}$ é uma bifunção satisfazendo a condição:

   P1: $f(x, x) = 0$ para todo $x \in C$.

O conjunto solução de $\mathsf{PE}(f, C)$ é denotado por

$$S(f, C) = \{x^* \in C; f(x^*, y) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C\}.$$

Vimos também que $\mathsf{PE}(f, C)$, sob certas condições, contém como casos particulares, problemas de otimização convexa, problemas de desigualdade variacional, problemas de equilíbrio de Nash em jogos não cooperativos, dentre outros. Mostrando assim a importância de estudar essa classe de problema.

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados de existência de soluções para problema de equilíbrio encontrados na literatura, desde os trabalhos pioneiros de Ky Fan [13] e Brézis et al [7], publicados em 1972, passando pelo artigo Blum e Oettli [5], que em 1994 formalizaram o que vem a ser um problema de equilíbrio, e chegando aos mais recentes como os de Iusem e Sosa [21], Iusem et al [20].

Trazemos ainda algumas condições necessárias e/ou suficientes que garantem a existência de tais soluções, por exemplo: compacidade, coercividade, pseudomonotonicidade, etc.

3.1 Usando Compacidade e Coercividade

Nesta seção, vamos nos basear nos artigos de Ky Fan [13], Brézis et al [7], Blum e Oettli [5], Bianchi e Pini [3] e Castellani et al [4].

Começamos apresentando um resultado devido a três poloneses: Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz. Resultado este que será de grande utilidade ao longo deste capítulo.

Lema 3.1.1. (KKM [26]) *Seja* C *um subconjunto arbitrário de* $\mathbb{R}^n$ *e* $F : C \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *uma aplicação ponto-conjunto tal que, para cada* $y \in C$*,* $F(y)$ *é fechado.*
Suponha que

(i) $\forall\, y_1, y_2, \cdots, y_m \in C$*,* $\operatorname{conv}(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}) \subset \bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$.

(ii) Existe $y_0 \in C$ *tal que* $F(y_0)$ *é compacto.*

Então $\bigcap_{y \in C} F(y) \neq \emptyset$.

Demonstração. Devido ao Teorema 1.1.2, basta que para qualquer subconjunto finito $D = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ em C

$$\bigcap_{j=1}^{m} F(y_j) \neq \emptyset,$$

pois provando que a família de conjuntos fechados $\{F(y) \cap F(y_0)\}_{y \in C}$ tem a propriedade de interseção finita. Desde que, $F(y_0)$ é compacto e $\bigcap_{y \in C} F(y) = \bigcap_{y \in C}[F(y) \cap F(y_0)]$, teremos o desejado.

Para a prova do caso finito faremos nosso argumento por contradição. Para isto, suponha que exista $D = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ um conjunto finito em C com $\bigcap\limits_{j=1}^{m} F(y_j) = \emptyset$.

Defina,

$$\begin{array}{rcl} f : \operatorname{conv}(D) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \longmapsto & \dfrac{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v) y_j}{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v)}, \end{array}$$

onde $d_{F(y_j)}(v) = \inf\limits_{z \in F(y_j)} \|v - z\|$ a qual existe pois, $F(y_j)$ é fechado.

Verificaremos que a aplicação acima está bem definida e satistaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e isto ajudará a gerar uma contradição.

(a) f está bem definida.

Com efeito, como $\bigcap_{j=1}^{m} F(y_j) = \emptyset$, temos que $v \notin F(y_j)$ para algum $j = 1, 2, \cdots, m$. Portanto, $\sum\limits_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v) > 0$ e assim f está bem definida.

(b) $f(conv(D)) \subset conv(D)$.

De fato, dado $v \in conv(D)$, tem-se que

$$f(v) = \frac{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v) \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v)} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j,$$

onde $\lambda_j = \frac{d_{F(y_j)}(v)}{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(v)}$ e desde que $\lambda_j \geqslant 0$ com $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, obtemos $f(v) \subset conv(D)$, ou seja, $f(conv(D)) \subset conv(D)$.

(c) f é contínua, pois do capítulo 1 sabemos que $d_{F(y_j)}(\cdot)$.

Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, $f : conv(D) \to conv(D)$ possui um ponto fixo, digamos $z \in conv(D)$. Definindo o conjunto $D^{'} = \{y_j \in D \mid z \notin F(y_j)\}$ então

$$z = f(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(z) y_j}{\sum_{j=1}^{m} d_{F(y_j)}(z)} = \sum_{y_j \in D^{'}} \frac{d_{F(y_j)}(z)}{\sum_{y_j \in D^{'}} d_{F(y_j)}(z)} y_j \ , \tag{3.1}$$

pois no caso onde $z \in F(y_j)$, tem-se $d_{F(y_j)}(z) = 0$. De (3.1) e da definição de fecho convexo temos $z \in conv(D^{'})$. Contudo, desde que $z \in conv(D^{'}) \subset \bigcup_{y_j \in D^{'}} F(y_j)$ tem-se que $z \in F(y_j)$ para algum $y_j \in D^{'}$, o que contradiz a definição de $D^{'}$. Portanto, temos

$$\bigcap_{j=1}^{m} F(y_j) \neq \emptyset.$$

Assim, do comentário feito no início desta demonstração concluimos este lema. □

Obs 3.1.1. *Ky Fan* [12], *em 1961, estendeu este resultado para espaços de dimensão infinita.*

Como já comentamos neste trabalho, a história dos resultados de existência de soluções para problemas de equilíbrio começou, em 1972, quando Ky Fan provou a seguinte desigualdade minimax, a qual constituirá nosso primeiro teorema de existência.

Teorema 3.1.1. (*Ky Fan*) *Seja* C *um subconjunto convexo, compacto e não-vazio de* $\mathbb{R}^n$. *Se uma bifunção* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *satisfaz:*

(i) $f(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$ *é semicontínua superior para cada* $y \in C$;

(ii) $f(x, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ *é quasi-convexa para cada* $x \in C$,

então existe um ponto $x^* \in C$ *tal que*

$$\inf_{y \in C} f(x^*, y) \geqslant \inf_{w \in C} f(w, w).$$

Demonstração. Denotemos por $\mu = \inf_{w \in C} f(w, w)$. Vamos provar que existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*, y) \geqslant \mu$ para todo $y \in C$. Para cada $y \in C$, considere o conjunto

$$F(y) = \{x \in C \mid f(x, y) \geqslant \mu\}.$$

Veja que para obtemos $x^* \in C$, nas condições acima, basta verificar que a intersecção dos $F(y)$ é não vazio. Ou seja, verificar que $F(y)$ satisfaz as hipótese do Lema-KKM.

Afirmação 1. $F(y)$ é fechado para todo $y \in C$.

De fato, seja $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $F(y)$ tal que $z^k \to x$. Desde que $z^k \in F(y)$ temos que $f(z^k, y) \geqslant \mu$ e como f é semicontínua superior no 1º argumento (item i) tem-se

$$\mu \leqslant \limsup_{k \to \infty} f(z^k, y) \leqslant f(x, y).$$

Portanto, $x \in F(y)$ o que prova a afirmação 1.

Afirmação 2. O fecho convexo de qualquer subconjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ de C está contido em $\bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$, ou seja, $conv(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}) \subset \bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$.

Com efeito, assuma que essa afirmação seja falsa. Então existe um conjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \subset C$ tal que $conv(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}) \not\subset \bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$. Assim, existe $x \in conv(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\})$ que não pertence a $F(y_j)$ para todo $j = 1, 2, \cdots, m$. Da Proposição 1.2.1, existem $\alpha_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ com $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, tal que $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$. Desde que $x \notin F(y_l)$ segue, da definição de $F(y_l)$, $f\big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j, y_l\big) < \mu$ para todo $1 \leqslant l \leqslant m$. Então, pela quase-convexidade de f no 2º argumento, tem-se

$$f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\Big) \leqslant \max_{1 \leqslant l \leqslant m} \Big\{ f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j, y_l\Big) \Big\} < \mu,$$

o qual é um absurdo, pois $\mu = \inf_{w \in C} f(w, w)$. Isto mostra que o fecho convexo de qualquer subconjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ de C está contido em $\bigcup_{j=1}^{m} F(y_j)$.

Afirmação 3. $F(y_0)$ é compacto, para algum $y_0 \in C$.

Com efeito, $F(y_0) \subset C$ é fechado e desde que C é compacto, a afirmação segue da Proposição 1.1.3.

Portanto, pelo Lema-KKM

$$\bigcap_{y \in C} F(y) \neq \emptyset$$

e o teorema está provado. □

Observe que, sendo f uma bifunção de equilíbrio o Teorema de Ky Fan implica em $S(f, C)$ não vazio e este é o conteúdo do corolário abaixo.

Corolário 3.1.1. *Sejam* C *e* f *como no Teorema acima. Suponha além disso, que* f *satisfaça* P1*, então existe* $x^* \in C$ *tal que*

$$f(x^*, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in C.$$

Demonstração. Segue, do Teorema de Ky Fan, que existe $x^* \in C$ tal que

$$\inf_{y \in C} f(x^*, y) \geqslant \inf_{w \in C} f(w, w).$$

Desde que, f satisfaz P1 temos

$$f(x^*, y) \geqslant \inf_{y \in C} f(x^*, y) \geqslant \inf_{w \in C} f(w, w) \overset{(P1)}{=} 0,$$

ou seja, $f(x^*, y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$. □

Pouco tempo depois de Ky Fan provar seu famoso princípio minimax, ainda no mesmo ano, H. Brézis, L. Nirenberg e G. Stampacchia[7] provaram uma versão deste, enfraquecendo a condição topológica sobre o conjunto C, retirando a compacidade, porém exigindo uma hipótese de coercividade sobre a bifunção f, como veremos a seguir. Assim, este novo resultado contém como caso particular o princípio minimax de Ky Fan, para detalhes vide [7].

Teorema 3.1.2. *Seja* C *um subconjunto convexo não vazio de* $\mathbb{R}^n$*. Se* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *é uma bifunção satisfazendo:*

(i) $f(x, x) = 0$ *para todo* $x \in C$*,*

(ii) *Para cada* $x \in C$*,* $f(x, \cdot)$ *é convexa,*

(iii) *Para cada* $y \in C$*,* $f(\cdot, y)$ *é semicontínua superior,*

(iv) *(Coercividade) Existem* $r > 0$ *e* $y_0 \in C$ *com* $\|y_0\| \leqslant r$ *tal que* $f(x, y_0) < 0$*, para todo* $x \in C$ *com* $\|x\| > r$*.*

Então, existe $x^* \in C$ *com* $\|x^*\| \leqslant r$ *tal que*

$$f(x^*, y) \geqslant 0 \ \textit{ para todo } \ y \in C.$$

Demonstração. Para todo $y \in C$, seja $F(y) = \{x \in C; f(x,y) \geqslant 0\}$ o qual é não-vazio, pois $y \in F(y)$. Se provarmos que $F(y)$ satisfaz as hipóteses do Lema- KKM então

$$\bigcap_{y \in C} F(y) \neq \emptyset.$$

Isto é, existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*, y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$.

Afirmação 1. $F(y)$ é fechado para todo $y \in C$.

De fato, seja $(z^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F(y)$ uma sequência tal que $z^k \to x$. Desde que $z^k \in F(y)$ temos que $f(z^k, y) \geqslant 0$ e f é semicontínua superior no 1º argumento (item iii) tem-se

$$0 \leqslant \limsup_{k \to \infty} f(z^k, y) \leqslant f(x, y).$$

Portanto, $x \in F(y)$ o que prova a afirmação 1.

Afirmação 2. O fecho convexo de todo conjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ de C está contido em $\bigcup_{i=1}^{m} F(y_i)$, ou seja, $conv\big(\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}\big) \subset \bigcup_{i=1}^{m} F(y_i)$.

Com efeito, suponha que tal afirmação não seja verificada. Então existe um conjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\} \subset C$ tal que $conv\big(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}\big) \not\subset \bigcup_{i=1}^{m} F(y_i)$. Assim existe $x \in conv\big(\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}\big)$ que não pertence a $F(y_j)$ para todo $j = 1, 2, \cdots, m$. Da proposição 1.2.1, existem $\alpha_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ com $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, tal que $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$. Desde que $x \notin F(y_j)$, $\forall j = 1, \cdots, m$, segue que $f\big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i, y_j\big) < 0$ para $1 \leqslant j \leqslant m$. Então, pelo item (ii) tem-se

$$f\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\Big) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \Big\{ f\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i, y_j\Big) \Big\} < 0,$$

o qual contraria (i). Logo, a nossa afirmação fica provada.

Afirmação 3. $F(y_0)$ é compacto para algum $y_0 \in C$.

Provemos que $F(y_0) \subset \bar{B}_r(0)$, onde $\bar{B}_r(0)$ e y_0 existem por (iv). De fato, suponha que existe um elemento $z \in F(y_0)$ tal que $\|z\| > r$. Da definição de $F(y_0)$ tem- se $f(z, y_0) \geqslant 0$, o qual está em contradição com (iv) ($f(x, y_0) < 0$ para $x \in C$ e $\|x\| > r$). Daí, segue que $F(y_0)$ é um conjunto fechado contido em um conjunto compacto $\bar{B}_r(0)$. Portanto, pela proposição 1.1.3, $F(y_0)$ é compacto e fica assim provado a afirmação 3.

Das afirmações (1), (2), (3) e do Lema- KKM segue que

$$\bigcap_{y \in C} F(y) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $x^* \in C$ tal que $f(x^*, y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$. $\square$

Obs 3.1.2. *Se* $f(x, y) = h(y) - h(x)$*, então a hipótese* (iv) *acima equivale à definição de coercividade clássica da otimização. Veja por exemplo Flores-Bazan* [15, *página* 255].

A seguir, provamos um resultado de existência de solução para $PE(f, C)$, devido a Blum e Oettli [5], no caso onde $f : C \times C \to R$ é dada por

$$f(x, y) = g(x, y) + h(x, y). \tag{3.2}$$

Imporemos algumas condições sobre as bifunções $g : C \times C \to \mathbb{R}$ e $h : C \times C \to \mathbb{R}$ para obter o desejado.

Para isso, necessitamos introduzir a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Sejam* K *e* C *conjuntos convexos com* $K \subset C$*, definimos o* $\mathrm{Core}_C K$*, o core de* K *relativo a* C*, como:*

$$\mathrm{Core}_C K = \{x \in K \; ; \; K \cap (x, y) \neq \emptyset, \; \forall y \in C \setminus K\},$$

onde $(x, y) = \{(1 - t)x + ty \; ; \; t \in (0, 1)\}$.

Proposição 3.1.1. *Temos que :*

$(a.)$ $\mathrm{Core}_C C = C$,

$(b.)$ *O core de* K *relativo a* C*,* $\mathrm{Core}_C K$ *é um conjunto convexo.*

Demonstração. O item $(a.)$ segue da definição de Core. Para provar item $(b.)$, vamos supor que $\mathrm{Core}_C K$ não seja convexo. Então existem $x, y \in \mathrm{Core}_C K$ e $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$b = (1 - t_0)x + t_0 y \notin \mathrm{Core}_C K \Rightarrow \exists a \in C \setminus K \text{ tal que } K \cap (b, a) = \emptyset.$$

Desde que, $x \in \mathrm{Core}_C K$ existe $u_0 \in (0, 1)$ tal que $(1-u_0)x+u_0 a \in K$ para todo $a \in C\setminus K$. Analogamente, existe $w_0 \in (0, 1)$ tal que $(1 - w_0)y + w_0 a \in K$.
Denote por $p = (1 - u_0)x + u_0 a$ e $q = (1 - w_0)y + w_0 a$, devido K ser convexo tem-se

$$(1 - z)p + zq \in K, \; \forall z \in [0, 1].$$

Agora, vamos encontrar $z \in (0, 1)$ satisfazendo $(1-z)p+zq = (1-z)b+za$, reagrupado adequadamente temos $(1 - z)(p - q) = z(a - q)$. Aplicando a norma segue

$$(1 - z)\|p - b\| = z\|a - q\| \Rightarrow z = \frac{\|p - b\|}{\|a - q\| + \|p - b\|}. \tag{3.3}$$

Portanto, tomando z da forma (3.3) obtemos $(1 - z)p + zq \in K$ e $(1 - z)b + za \in K$. Contudo, isto contradiz o fato de $K \cap (b, a) = \emptyset$. Logo, $\mathrm{Core}_C K$ é conjunto convexo. $\square$

Exemplo 3.1.1. *Considere os conjuntos*

$$\mathsf{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|x\| \leqslant 2\} \quad e \quad \mathsf{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x_1| \leqslant 1, |x_2| \leqslant 1\},$$

então $\mathsf{Core}_{\mathsf{C}}\mathsf{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$.

Teorema 3.1.3. [1] *Sejam* $\mathsf{C} \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto convexo, fechado, não- vazio e* $f : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathbb{R}$ *uma função da forma* (3.2) *satisfazendo:*

1.1. $g(x, x) = 0$ *para todo* $x \in \mathsf{C}$*;*

1.2. g *é monótona, i.e.,* $g(x, y) + g(y, x) \leqslant 0 \ \forall \ x, y \in \mathsf{C}$*;*

1.3. $g(x, \cdot)$ *é convexa e semicontínua inferior para cada* $x \in \mathsf{C}$*;*

1.4. Para todo $x, y \in \mathsf{C}$*, a função* $t \in [0, 1] \mapsto g((1 - t)x + ty, y)$ *é scs em* $t = 0$.

2.1. $h(x, x) = 0$ *para todo* $x \in \mathsf{C}$*;*

2.2. $h(x, \cdot)$ *é convexa para cada* $x \in \mathsf{C}$*;*

2.3. $h(\cdot, y)$ *é scs para cada* $y \in \mathsf{C}$.

3. (Coercividade) Existe $\mathsf{L} \subset \mathsf{C}$ *compacto, convexo e não vazio tal que para todo* $x \in \mathsf{L} \setminus \mathsf{Core}_{\mathsf{C}}\mathsf{L}$ *existe* $a \in \mathsf{Core}_{\mathsf{C}}\mathsf{L}$ *tal que* $f(x, a) \leqslant 0$.

Então, existe $x^* \in \mathsf{L}$ *tal que* $f(x^*, y) \geqslant 0, \quad \forall y \in \mathsf{C}$.

A prova seguirá de três lemas os quais discutiremos abaixo, os mesmos podem ser encontrados em Blum e Oettli [5].

Lema 3.1.2. *Assuma as hipóteses do Teorema* 3.1.3. *Então existe* $x^* \in \mathsf{L}$ *tal que* $g(y, x^*) \leqslant h(x^*, y), \ \ \forall y \in \mathsf{L}$.

Demonstração. Para cada $y \in \mathsf{L}$, considere o conjunto

$$\mathsf{S}(y) = \{x \in \mathsf{L} \mid g(y, x) \leqslant h(x, y)\},$$

o qual é não vazio, pois é $y \in \mathsf{S}(y)$.

Se provarmos que $\mathsf{S}(y)$ satisfaz as hipóteses do Lema-KKM então

$$\bigcap_{y \in \mathsf{L}} \mathsf{S}(y) \neq \emptyset.$$

Isto é, existe $x^* \in \mathsf{L}$ tal que $g(y, x^*) \leqslant h(x^*, y)$ para todo $y \in \mathsf{L}$.

Afirmação 1. $\mathsf{S}(y)$ é fechado para todo $y \in \mathsf{L}$.

[1] Devido a Blum e Oettli [5].

De fato, seja $(z^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(y)$ uma sequência tal que $z^k \to x$. Desde que, $z^k \in S(y)$ temos $g(y, z^k) \leqslant h(z^k, y)$. Agora pela semicontinuidade inferior de g no 2º argumento e semicontinuidade superior de h no 1º argumento segue

$$\begin{aligned} g(y,x) &\leqslant \liminf_{k\to\infty} g(y,z^k) \leqslant \liminf_{k\to\infty} h(z^k,y) \\ &\leqslant \limsup_{k\to\infty} h(z^k,y) \leqslant h(x,y). \end{aligned}$$

Portanto, $g(y,x) \leqslant h(x,y)$ implicando que $x \in S(y)$, assim a afirmação 1 fica provada.

Afirmação 2. O fecho convexo de todo conjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ de L está contido em $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} S(y_i)$.

Com efeito, seja $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ um subconjunto finito de L. Considere $\xi \in \mathrm{conv}\big(\{y_i, i = 1, 2, \cdots, m\}\big)$ arbitrário. Então, pela proposição 1.2.1,

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i \ \text{ com } \ \mu_i \geqslant 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, m) \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1.$$

Assuma, por contradição, que

$$g(y_i, \xi) > h(\xi, y_i), \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.4}$$

Disto segue

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(y_i, \xi) > \sum_{i=1}^{m} \mu_i h(\xi, y_i), \tag{3.5}$$

desde que nem todos os μ_i podem simultaneamente anular-se. Assim das propriedades de g

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(y_i, \xi) &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i g\Big(y_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\Big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(y_i, y_j) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(y_i, y_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_i\mu_j g(y_j, y_i)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mu_i\mu_j \Big(g(y_i, y_j) + g(y_j, y_i)\Big) \\ &\leqslant 0, \end{aligned}$$

pois g é monótona. E das propriedades de h segue

$$0 = h(\xi, \xi) = h\Big(\xi, \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu_i h(\xi, y_i).$$

Daí, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(y_i, \xi) \leqslant 0 \leqslant \sum_{i}^{m} \mu_i h(\xi, y_i)$ contrariando (3.5). Logo (3.4) não pode ser verdadeira e temos assim que $g(y_i, \xi) \leqslant h(\xi, y_i)$ para algum $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Então, $\xi \in S(y_i)$ para algum $i = 1, 2, \cdots, m$. Desde que, $\xi \in conv(\{y_i, i = 1, 2, \cdots, m\})$ foi escolhido arbitrariamente obtemos

$$conv(\{y_i, i = 1, 2, \cdots, m\}) \subset \bigcup_{i=1}^{m} S(y_i).$$

Afirmação 3. $S(y_i)$ é compacto.

De fato, como $S(y_i) \subset L$, $S(y_i)$ é fechado (afirmação 1) e L é um conjunto compacto, por hipótese. Logo, a afirmação segue da proposição 1.1.3.

Portanto, das afirmações 1,2 e 3 e do Lema-KKM, concluimos

$$\bigcap_{y \in L} S(y) \neq \emptyset.$$

□

Lema 3.1.3. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.1.3. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $x^* \in L, \quad g(y, x^*) \leqslant h(x^*, y), \quad \forall y \in L.$

(b) $x^* \in L, \quad 0 \leqslant g(x^*, y) + h(x^*, y), \quad \forall y \in L.$

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$.

Seja $x_t = (1-t)x^* + ty$ com $t \in (0, 1]$. Temos que:

$$\begin{aligned}
0 &= g(x_t, x_t) \leqslant (1-t)g(x_t, x^*) + tg(x_t, y) \\
&\leqslant (1-t)h(x^*, x_t) + tg(x_t, y) \\
&\leqslant tg(x_t, y) + (1-t)\big[(1-t)h(x^*, x^*) + th(x^*, y)\big] \\
&\leqslant tg(x_t, y) + t(1-t)h(x^*, y).
\end{aligned}$$

Assim, $0 \leqslant tg(x_t, y) + t(1-t)h(x^*, y)$ dividindo por t, obtemos:

$$0 \leqslant g(x_t, y) + (1-t)h(x^*, y).$$

Agora fazendo $t = \frac{1}{k}$, pelo item 1.4, segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \limsup_{k \to \infty} g(x_t, y) + \limsup_{k \to \infty} (1-t)h(x^*, y) \\
&\leqslant g(x^*, y) + h(x^*, y),
\end{aligned}$$

como desejado.

$(b) \Rightarrow (a)$.

Pela definição de monotonicidade de g temos

$$g(x, y) + g(y, x) \leqslant 0, \quad \forall x, y \in L.$$

Daí, para $x^* \in L$ obtemos

$$g(y, x^*) + g(x^*, y) \leqslant 0 \leqslant g(x^*, y) + h(x^*, y),$$

para todo $y \in L$. Portanto, $g(y, x^*) \leqslant h(x^*, y)$. $\square$

Lema 3.1.4. *Assuma que* $\Psi : C \to \mathbb{R}$ *é convexa,* $z_0 \in \mathsf{Core}_C L$*,* $\Psi(z_0) \leqslant 0$ *e* $\Psi(y) \geqslant 0 \ \forall y \in L$*. Então* $\Psi(y) \geqslant 0, \ \forall y \in C$.

Demonstração. Assuma, por contradição, que $\Psi(y) < 0$ para algum $y \in C \setminus L$. Então para todo $\eta \in (z_0, y)$, i.e, $\eta = (1-t)z_0 + ty \ \ \forall t \in (0, 1)$, e pela convexidade de Ψ tem-se

$$\begin{aligned} \Psi(\eta) &= \Psi\big((1-t)z_0 + ty\big) \\ &\leqslant (1-t)\Psi(z_0) + t\Psi(y) \\ &< (1-t)0 + t0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora desde que $z_0 \in \mathsf{Core}_C L$, ou seja, $L \cap (z_0, y) \neq \emptyset$, existe $\eta \in L$ com $\Psi(\eta) < 0$, contradizendo a hipótese. Logo, para todo $y \in C$ temos $\Psi(y) \geqslant 0$. $\square$

Finalmente, de posse destes três lemas podemos provar o teorema.

Demonstração do Teorema. Do Lema 3.1.2, obtemos $x^* \in L$ com

$$g(y, x^*) \leqslant h(x^*, y), \ \ \forall y \in L.$$

Do Lema 3.1.3, segue então que

$$0 \leqslant g(x^*, y) + h(x^*, y), \ \ \forall y \in L. \tag{3.6}$$

Definamos a função $\Psi : C \to \mathbb{R}$ pondo

$$\Psi(y) = g(x^*, y) + h(x^*, y).$$

Afirmação. Ψ é convexa e $\Psi(y) \geqslant 0, \ \ \forall y \in L$.

De fato, das hipóteses 1.3 e 2.2, $g(x, \cdot)$ e $h(x, \cdot)$ são convexas e, da Proposição 1.2.7, soma de funções convexas é convexa.

De (3.6) segue que

$$0 \leqslant g(x^*, y) + h(x^*, y) = \Psi(y), \quad \forall y \in L.$$

Isto é, $\Psi|_L$ é não negativa.

Temos dois casos a considerar:

Se $x^* \in \mathsf{Core}_C L$, então tome $z_0 = x^*$. Assim

$$\begin{aligned} \Psi(z_0) &= g(x^*, z_0) + h(x^*, z_0) \\ &= g(x^*, x^*) + h(x^*, x^*) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e portanto pelo Lema 3.1.4 segue que $\Psi(y) \geqslant 0, \ \ \forall \ y \in C$.

Se $x^* \in L \setminus \mathsf{Core}_C L$, então tome $z_0 = a$, onde a é como na hipótese 3. Para $x = x^*$, temos,

$$\Psi(z_0) = g(x^*, a) + h(x^*, a) \leqslant 0,$$

e novamente pelo Lema 3.1.4, segue que $\Psi(y) \geqslant 0, \ \forall y \in C$. Logo, em ambos os casos temos

$$\Psi(y) \geqslant 0, \text{ para todo } y \in C.$$

Ou seja, $g(x^*, y) + h(x^*, y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$.

O leitor poderá ter observado que para este caso se tomarmos $g = 0$, então temos variantes dos Teoremas 3.1.1 e 3.1.2.

3.2 Usando Viabilidade Convexa e a Função Gap

Nesta seção, vamos nos basear nos artigos de Iusem e Sosa [20] e Iusem et al [21], veremos que sob certas condições o conjunto solução do problema de viabilidade convexa e o conjunto solução de $\mathsf{PE}(f, C)$ coincidem. Apresentaremos resultados de existência para problema de equilíbrio baseados na conexão entre $\mathsf{PE}(f, C)$ e o dado problema de viabilidade convexa e sobre uma extensão da função gap de Auslender[1]. Com estas ferramentas, estabeleceremos ainda condições necessárias e/ou suficientes para a existência de soluções de $\mathsf{PE}(f, C)$.

3.2.1 Problema de Viabilidade Convexa

Consideramos o seguinte problema de viabilidade convexa, denotado por $\mathsf{PVC}(f, C)$, como um problema auxiliar para $\mathsf{PE}(f, C)$.

$$\mathsf{PVC}(f, C)\text{: Encontrar } x \in \bigcap_{y \in C} L_f(y), \text{ onde } L_f(y) = \{x \in C; f(y, x) \leqslant 0\}.$$

Veja que este problema resulta-se em

$$\mathsf{PVC}(f, C) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \; x^* \in \; C \; \text{ tal que} \\ f(y, x^*) \leqslant 0 \; \text{ para } \; \text{todo } \; y \in C. \end{cases}$$

Suporemos que além de satisfazer P1, f tenha as propriedades:

P2: $f(x, \cdot)$ é convexa e semicontínua inferior para cada $x \in C$,

P3: $f(\cdot, y)$ é semicontínua superior para cada $y \in C$.

O conjunto solução de $\mathsf{PVC}(f, C)$ será denotado por $M(f, C)$, isto é, $M(f, C) = \{x \in C; f(y, x) \leqslant 0, \;\; \forall\, y \in C\}$.

A conexão entre $\mathsf{PE}(f, C)$ e $\mathsf{PVC}(f, C)$ é estabelecida no seguinte resultado.

Lema 3.2.1. $M(f, C) \subseteq S(f, C)$.

Demonstração. Seja $x \in M(f, C)$ e tome qualquer $y \in C$. Defina $w_t = (1-t)x + ty$ para cada $t \in (0, 1)$. Desde que C é convexo temos $w_t \in C$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 \overset{P1}{=} f(w_t, w_t) &= f(w_t, (1-t)x + ty) \\ &\overset{P2}{\leqslant} (1-t)f(w_t, x) + tf(w_t, y) \end{aligned}$$

para cada $t \in (0, 1)$. Como $f(w_t, x) \leqslant 0$, pois $x \in M(f, C)$, segue $0 \leqslant tf(w_t, y)$ para cada $t \in (0, 1)$. Logo $0 \leqslant f(w_t, y)$ para cada $t \in (0, 1)$. Tomando $t_k = \frac{1}{k}$, $k > 1$, tem-se

$$\lim_{k \to \infty} w_{t_k} = \lim_{k \to \infty} \big(1 - t_k\big)x + t_k y = \lim_{k \to \infty} \big(1 - \frac{1}{k}\big)x + \frac{1}{k}y = x$$

e por P3, obtemos:

$$0 \leqslant \limsup_{k \to \infty} f(w_{t_k}, y) \overset{P3}{\leqslant} f(x, y) \qquad \forall y \in C.$$

Portanto, $x \in S(f, C)$. $\square$

Observemos que a igualdade entre o conjunto solução de $\mathsf{PE}(f, C)$ e de $\mathsf{PVC}(f, C)$, nem sempre é obtida. Por exemplo:

Considere $C = [0,2]$ e defina $f : C \times C \to \mathbb{R}$ pondo $f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{x} + 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

Temos que

- Se $x = 0$, então $f(x,y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$. Logo $x \in S(f,C)$.
- Caso contrário, então $f(x,y) = -\dfrac{y}{x} + 1$. Assim, para que $f(x,y) \geqslant 0$ para todo $y \in C$ devemos ter $x \geqslant y \ \ \forall\, y \in C$. Daí $x = 2$.

Dos dois caso acima concluimos $S(f,C) = \{0,2\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bigcap_{y\in C} L_f(y) &= \bigcap_{y\in[0,2]} \{x \in C; f(y,x) \leqslant 0\} \\ &= \bigcap_{y\in[0,2]} \{x \in C; y \leqslant x\} \\ &= \bigcap_{y\in[0,2]} [y,2] \\ &= \{2\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $M(f,C) = \{2\}$.

Uma propriedade que garante igualdade dos conjuntos solução de $PE(f,C)$ e $PVC(f,C)$ é a seguinte:

P4. f é pseudomonótona, i.e, se $f(x,y) \geqslant 0$ para algum $x,y \in C$, então $f(y,x) \leqslant 0$.

Sob a condição P4, temos o resultado

Proposição 3.2.1. *Se* f *satisfaz* P1$-$P4*, então* $PE(f,C)$ *e* $PVC(f,C)$ *têm mesmo conjunto solução.*

Demonstração. Seja $x \in S(f,C)$. Então temos $f(x,y) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C$, assim por P4 segue $f(y,x) \leqslant 0$ implicando $x \in M(f,C)$, ou seja, $S(f,C) \subseteq M(f,C)$. Usando o Lema 3.2.1, tem-se o resultado desejado. $\square$

Agora vamos apresentar um resultado técnico que estabelece que, sobre certas condições, toda solução local de $PE(f,C)$ na verdade é solução global. Para isto, introduzimos algumas notações:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam $\mathbb{B}_k = B_k[0] \cap C$, $\mathbb{B}_k^\circ = B_k(0) \cap C$ e defina, para cada $y \in C$, o conjunto $L_f(k,y) = \{x \in \mathbb{B}_k \ ; \ f(y,x) \leqslant 0\}$.

Obs 3.2.1. $\bigcap_{y\in\mathbb{B}_k} L_f(k,y) \subset \{x \in \mathbb{B}_k; \ f(x,y) \geqslant 0, \ \forall y \in \mathbb{B}_k\}$

De fato, seja $z \in \bigcap_{y\in\mathbb{B}_k} L_f(k,y)$ então $z \in L_f(k,y)$ para todo $y \in \mathbb{B}_k$. Ou seja, z é uma solução de $\mathsf{PVC}(f,C)$, onde $C = \mathbb{B}_k$. Assim, pelo Lema 3.2.1, segue que z é solução de $\mathsf{PE}(f,C)$, com $C = \mathbb{B}_k$. Portanto, $z \in \{x \in \mathbb{B}_k\ ;\ f(x,y) \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{B}_k\}$.

Lema 3.2.2. *Suponha que* $P1 - P3$ *ocorrem. Se para algum* $k \in \mathbb{N}$ *e algum* $\bar{x} \in \bigcap_{y\in\mathbb{B}_k} L_f(k,y)$ *existe* $\bar{y} \in \mathbb{B}_k^{\circ}$ *tal que* $f(\bar{x},\bar{y}) \leqslant 0$, *então* $f(\bar{x},y) \geqslant 0$ *para todo* $y \in C$, *i.e,* $\bar{x}$ *resolve o problema de equilíbrio associado a* C.

Demonstração. Se $\bar{x} \in \bigcap_{y\in\mathbb{B}_k} L_f(k,y)$ então, pela observação acima, temos que $f(\bar{x},w) \geqslant 0\ \ \forall w \in \mathbb{B}_k$. Assim necessitamos apenas provar que $f(\bar{x},w) \geqslant 0\ \ \forall w \in C \setminus \mathbb{B}_k$. Considere $w \in C \setminus \mathbb{B}_k$. Desde que $\bar{y} \in \mathbb{B}_k^{\circ}$, existe $t \in (0,1)$ tal que $z = (1-t)w + t\bar{y} \in \mathbb{B}_k$. Segue que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(\bar{x},z) &\leqslant (1-t)f(\bar{x},w) + tf(\bar{x},\bar{y}) \\ &\leqslant (1-t)f(\bar{x},w). \end{aligned}$$

Portanto, $f(\bar{x},w) \geqslant 0\ \ w \in C \setminus \mathbb{B}_k$ □

Introduzimos, na sequência, uma propriedade suficiente e necessária para garantir a existência de solução do $\mathsf{PE}(f,C)$.

P5. Para qualquer sequência $\{z^k\} \subset C$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|z^k\| = \infty$, existe $u \in C$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z^k,u) \leqslant 0$ para todo $k \geqslant k_0$.

Teorema 3.2.1. [2] *Suponha que* f *satisfaça* $P1 - P4$. *Então* $\mathsf{PE}(f,C)$ *tem solução se, e somente se,* $P5$ *é válida.*

Demonstração. Assuma que P5 é válida. Seja $k \in \mathbb{N}$ arbitrário. Desejamos usar o Lema-KKM, com $C = \mathbb{B}_k$ e $F(y) = L_f(k,y)$, para isto devemos verificar a validade de suas hipóteses.

$*$ $F(y) = \{x \in \mathbb{B}_k\ ;\ f(y,x) \leqslant 0\}$ é fechado, $\forall y \in \mathbb{B}_k$.

De fato, dado $\{w^l\} \subset F(y)$ tal que $w^l \to x$, como $\mathbb{B}_k$ é fechado, $x \in \mathbb{B}_k$ e por $P2$, tem-se

$$0 \geqslant \liminf_{l\to\infty} f(y,w^l) \geqslant f(y,x).$$

Ou seja, $x \in F(y)$.

<u>Verifiquemos (i).</u> Tome $w_1, w_2, \cdots, w_m \in \mathbb{B}_k$. Seja $\bar{x} \in \mathrm{conv}(\{w_1,\cdots,w_m\})$, então

[2] Devido a Iusem, Kassay e Sosa [20].

existem $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in [0,1]$ com $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ tal que $\bar{x} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$. Mostremos que $\bar{x} \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} L_f(k, w_j)$, i.e, $\bar{x} \in \mathbb{B}_k$ e $f(w_j, \bar{x}) \leqslant 0$ para algum $j = 1, 2, \cdots, m$.

$*$ $\bar{x} \in \mathbb{B}_k$, segue do Teorema 1.2.1, pois $\mathbb{B}_k$ é convexo.

$*$ $0 = f(\bar{x}, \bar{x}) = f\big(\bar{x}, \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j\big) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} f(\bar{x}, w_j)$, na desigualdade usamos P2. Então, $f(\bar{x}, w_j) \geqslant 0$ para algum j. Por P4, segue que $f(w_j, \bar{x}) \leqslant 0$. Portanto, o fecho convexo de $\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ está contido em $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} L_f(k, w_j)$.

Verifiquemos (ii). Isto é, $F(y)$ é compacto.

Com efeito, observe que $F(y) \subset \mathbb{B}_k$. Como $\mathbb{B}_k$ é compacto e $F(y)$ é fechado. Usando a proposição 1.1.3 concluimos que $F(y)$ é compacto.

Logo, pelo Lema-KKM, temos $\displaystyle\bigcap_{y \in \mathbb{B}_k} L_f(k, y) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ escolha $z^k \in \displaystyle\bigcap_{y \in \mathbb{B}_k} L_f(k, y)$.

Temos dois casos a considerar.

(i) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|z^k\| < k$. Neste caso $z^k \in \mathbb{B}_k^\circ$, e pelo Lema 3.2.1 segue que $z^k \in S(f, C)$.

(ii) $\|z^k\| = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Neste caso, P5 assegura a existência de $u \in C$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z^k, u) \leqslant 0$, $\forall\ k \geqslant k_0$. Tome $l > k_0$ tal que $\|u\| < l$. Então, $f(z^l, u) \leqslant 0$ e $z^l \in \mathbb{B}_l^\circ$. Novamente, aplicando o Lema 3.2.1, concluimos que $z^l \in S(f, C)$.

Agora assuma que $PE(f, C)$ tem solução. Devemos verificar P5. Tome qualquer sequência $\{z^k\} \subset C \setminus \{0\}$ com $\|z^k\| \to \infty$. Seja $x^* \in S(f, C)$. Pela Proposição 3.2.1, x^* é também solução de $PVC(f, C)$. Tome $u := x^*$. Desde que $u \in M(f, C)$, temos que $f(z^k, u) \leqslant 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e assim P5 ocorre. □

3.2.2 Usando a função gap

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados do trabalho de Iusem e Sosa [21]. Vamos usar uma extensão da função gap de Auslender, introduzida em [21], afim de obtermos condições necessárias e suficientes para existência de solução de $PE(f, C)$. Ao longo desta seção, assumiremos que f e C satisfazem as hipóteses, $P1 - P4$, do Problema de Equilíbrio $PE(f, C)$.

Definição 3.2.1. *A função gap* $g_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *é definida como*

$$g_f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in C} f(y,x), & \textit{se} \quad x \in C \\ \infty, & \textit{se} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus C. \end{cases}$$

Exemplos.

1) Sejam $C = \mathrm{dom}(h)$ e $f : C \times C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = h(y) - h(x)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in C} f(y,x) &= \sup_{y \in C} \big[h(x) - h(y)\big] \\ &= h(x) + \sup_{y \in C} \big[-h(y)\big] \\ &= h(x) - \inf_{y \in C} h(y), \end{aligned}$$

e portanto a função gap associada a f será

$$g_f(x) = \begin{cases} h(x) - \inf\limits_{y \in C} h(y), & \text{se} \quad x \in C \\ \infty, & \text{se} \quad x \notin C. \end{cases}$$

2) Tome $n = 1$, $C = \mathbb{R}$ e definamos $f(x,y) = e^y - e^x$. Neste caso temos

$$g_f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f(y,x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \big[e^x - e^y\big] = e^x$$

3) Considere $n = 1$, $C = [0, \infty)$ e defina $f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{x} + 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$, note que se $x \in K$ tem-se:

- para $y > 0$, $f(y,x) = -\dfrac{x}{y} + 1$ implicando em $\sup\limits_{y \in C} f(y,x) = 1$,
- para $y = 0$, $f(y,x) = 0$.

Portanto, a função gap associada a essa f é

$$g_f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in C \\ \infty, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus C. \end{cases}$$

Observando os três exemplo acima, vemos que a função gap ,g_f, é não negativa, convexa e semicontínua inferior e esse é o conteúdo do lema a seguir.

Lema 3.2.3. *A função gap,* g_f*, é não negativa, convexa e semicontínua inferior. Além disso, se* $\mathrm{PVC}(f,C)$ *tem solução então* g_f *é própria.*

Demonstração. Temos que:

(a) $g_f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

De fato, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ então $g_f(x) = \infty$ e tem-se o desejado. Agora se $x \in C$ temos $21g_f(x) = \sup_{y \in C} f(y, x) \geqslant 0$, pois desde que $x \in C$, $f(x, x) = 0$ assim na pior das situações tem-se $g_f(x) = \sup\limits_{y \in C} f(y, x) = 0$.

(b) g_f é convexa.

Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$. Consideremos os casos:

(i) $x \in C$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus C$, então $g_f(x) = \sup\limits_{z \in C} f(z, x)$ e $g_f(y) = \infty$. Daí para todo $t \in [0, 1]$ obtemos que

$$g_f(tx + (1-t)y) \leqslant tg_f(x) + (1-t)g_f(y).$$

(ii) $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ e $y \in C$ é análogo ao anterior.

(iii) $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus C$, então $g_f(x) = g_f(y) = \infty$. Assim

$$g_f(tx + (1-t)y) \leqslant tg_f(x) + (1-t)g_f(y)$$

é sempre obtido para todo $t \in [0, 1]$.

(iv) $x, y \in C$ temos, por definição, $g_f(x) = \sup\limits_{z \in C} f(z, x)$ e $g_f(y) = \sup\limits_{z \in C} f(z, y)$. Desde que, para todo $z \in C$ a função $f(z, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ é convexa, C é convexo e o supremo de funções convexas define uma função convexa, (veja Proposição 1.2.8), tem-se:

$$g_f(x) = \sup_{z \in C} f(z, x)$$

é convexa.

(c) g_f é semicontínua inferior.

Seja $\{z^k\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ convergindo para x, quando $k \to \infty$. Devemos provar que

$$\liminf_{k \to \infty} g_f(z^k) \geqslant g_f(x). \tag{3.7}$$

Se $\{z^k\} \subset C$ o resultado segue, desde que para cada $y \in C$ a função $f(y, \cdot)$ é semicontínua inferior e o supremo de funções s.c.i. também o é (colocar proposição nas preliminares e citar aqui).

Se $z^k \in \mathbb{R}^n \setminus C$, então $g_f(z^k) = \infty$. Assim, a desigualdade (3.7) é válida.

Finalmente, considere x^* uma solução do $\mathsf{PVC}(f, C)$, então obtemos para todo $y \in C$ que $f(y, x^*) \leqslant 0$. Portanto,

$$g_f(x^*) = \sup_{y \in C} f(y, x^*) = 0 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Antes de apresentarmos o nosso próximo resultado de existência de solução para $\mathsf{PE}(f, C)$, introduziremos as seguintes notações

$$m := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g_f(x) \quad \text{e} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n; g_f(x) = m\}$$

Teorema 3.2.2. [3] $\mathsf{PVC}(f, C)$ *tem solução se, e somente se,* $M \neq \emptyset$ *e* $m = 0$. *Além disso,* M *é o conjunto solução de* $\mathsf{PVC}(f, C)$.

Demonstração. Seja x^* uma solução de $\mathsf{PVC}(f, C)$. Então $f(y, x^*) \leqslant 0$ para todo $y \in C$, implicando que

$$g_f(x^*) = \sup_{y \in C} f(y, x^*) \leqslant 0.$$

Por outro lado, vimos pelo lema anterior que, $g_f(x^*) \geqslant 0$. Donde segue $g_f(x^*) = 0$, assim $m = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g_f(x) = 0$ (já que, $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, $g_f(x) = \infty$) e $x^* \in M$.
Reciprocamente, tome $x^* \in M$. Temos $\sup_{y \in C} f(y, x^*) = m = 0$.
Segue que

$$f(y, x^*) \leqslant \sup_{y \in C} f(y, x^*) = 0,$$

i.e, $f(y, x^*) \leqslant 0$ para todo $y \in C$ e assim x^* é solução de $\mathsf{PVC}(f, C)$. □

Quando $\mathsf{PVC}(f, C)$ não tem solução, pode ocorrer que:

(i) ou $M \neq \emptyset$, no caso que $m > 0$.

Por exemplo, tome $C = [0, \infty)$ e defina $f(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{y}{x} + 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$. Neste caso, temos

$$m = \inf_{x \in \mathbb{R}} g_f(x) = 1$$

e $M = \{x \in \mathbb{R}; g_f(x) = 1\} = [0, \infty)$, pois $g_f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in C \\ \infty, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus C. \end{cases}$

(ii) ou $m = 0$, no qual $M \neq \emptyset$.

Por exemplo, tome $C = \mathbb{R}$ e defina $f(x, y) = e^y - e^x$. Neste caso, temos

$$g_f(x) = e^x, \quad m = \inf_{x \in C} e^x = 0 \;\; \text{e} \;\; M = \{x \in C; e^x = 0\} = \emptyset.$$

Definição 3.2.2. *Para cada subconjunto não vazio* C *de* $\mathbb{R}^n$, *definimos a aproximação assintótica de* C *como a família de conjunto* $A(C)$ *dada por*

$$A(C) = \{\{C_k\}; C_k \subset \mathsf{Core}_C C_{k+1} \neq C_{k+1} \;\; \forall\, k \in \mathbb{N}, \; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = C\},$$

[3] Devido a Iusem e Sosa [21].

onde $\mathsf{Core}_C C_{k+1} = \{x \in C_{k+1}\ ;\ C_{k+1} \cap (x, y) \neq \emptyset \ \ \forall\, y \in C \setminus C_{k+1}\}$.

Para o nosso próximo resultado de existência, necessitaremos dos seguintes dois lemas.

Lema 3.2.4. [4] *Considere* $PE(f, C)$ *com* $A(C) \neq \emptyset$. *Para cada* $\{C_k\} \subset A(C)$, *a sequência* $\{g_f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, *com* $g_f^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *definida por*

$$g_f^k(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in C_k} f(y, x), & se \quad x \in C \\ \qquad\qquad \infty, & se \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus C, \end{cases}$$

é uma sequência não decrescente de funções convexas e semicontínua inferior. Além disso, $g_f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} g_f^k(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, *onde* g_f *é a função definida no início da seção.*

Demonstração. A convexidade e a semicontinuidade inferior de g_f^k, seguem de $f(y, \cdot)$ satisfazer P2 e das proposições 1.2.7 e 1.2.8, respectivamente.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_k \subset A(C)$ implica que

$$C_k \subset \mathsf{Core}_C C_{k+1} = \{x \in C_{k+1}\ ;\ C_{k+1} \cap (x, y) \neq \emptyset, \forall\, y \in C \setminus C_{k+1}\}.$$

Em particular, $C_k \subset C_{k+1}$. Logo,

$$\sup_{y \in C_k} f(y, x) \leqslant \sup_{y \in C_{k+1}} f(y, x) \Rightarrow g_f^k \leqslant g_f^{k+1}.$$

Assim, concluimos que $\{g_f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não decrescente.
Se $x \in C$, então $g_f^k(x) = \sup\limits_{y \in C_k} f(y, x)$. Como $C_k \subset A(C)$ segue que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$. Logo,

$$\lim_{k \to \infty} g_f^k(x) = \sup_{y \in C} f(y, x) = g_f(x).$$

Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, então $g_f^k(x) = \infty = g_f(x)$. Portanto,

$$\lim_{k \to \infty} g_f^k(x) = g_f(x) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

□

Estabelecemos agora algumas notações:
Consideremos uma sequência de conjuntos não-vazios, convexo e fechado $\{C_k\} \subset A(C)$.
Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos

$$L_f(k, y) = \{x \in C_k; f(y, x) \leqslant 0\}.$$

Note que $\bigcap\limits_{y \in C_k} L_f(k, y) \subset \{x \in C_k; f(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall\, y \in C_k\}$.

[4]Devido a Iusem e Sosa [21].

Lema 3.2.5. [5] *Seja* C *um conjunto convexo e* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ *é uma função convexa. Se para algum* $k \in \mathbb{N}$ *e algum* $x^* \in \bigcap_{y \in C_k} L_f(k, y)$ *existe* $y \in \mathrm{Core}_C C_k$ *tal que* $f(x^*, y) \leqslant 0$*, então* $f(x^*, y) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C$.

Demonstração. Sabemos que, desde que $x^* \in \bigcap_{y \in C_k} L_f(k, y)$ tem-se $f(x^*, y) \geqslant 0 \ \forall y \in C_k$. Portanto,devemos mostrar que $f(x^*, y) \geqslant 0 \ \forall y \in C \backslash C_k$. Tome $w \in C \backslash C_k$. Pela definição de $\mathrm{Core}_C C_k$, segue $C_k \cap (y, w) \neq \emptyset$ assim existe $t \in (0, 1)$ com $z = tw + (1 - t)y \in C_k$. Daí, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant f(x^*, z) \\
&= f(x^*, tw + (1 - t)y) \\
&\leqslant tf(x^*, w) + (1 - t)f(x^*, y) \\
&\leqslant tf(x^*, w)
\end{aligned}
$$

e então $f(x^*, w) \geqslant 0$. □

A próxima hipótese, estabelece uma condição suficiente para existência de solução de $PE(f, C)$.

H1. Uma função $f : C \times C \to \mathbb{R}$ satisfaz H1, se existe uma sequência de conjuntos convexos, fechados $\{C_k\}$ em $A(C)$ tal que :

(1) $\forall \ k \in \mathbb{N}, \ \bigcap_{y \in C_k} L_f(k, y) \neq \emptyset$,

(2) $M = \{x \in \mathbb{R}^n; g_f(x) \leqslant m\} \neq \emptyset$,

(3) Existem $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n; g_f^i(x) < m\} \subset \mathrm{Core}_C C_j$.

Teorema 3.2.3. [6] *Se* f *satisfaz* H1*, então* $PE(f, C)$ *tem solução.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma sequência de conjuntos convexos, fechados $\{C_k\}$ em $A(C)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{y \in C_k} L_f(k, y) \neq \emptyset$. Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $z_k \in \bigcap_{y \in C_k} L_f(k, y)$, i.e, $f(y, z_k) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C_k$. Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_k \in \mathrm{Core}_C C_k$ e desde que $f(z_k, z_k) \leqslant 0$ segue, pelo Lema anterior, que z_k é solução de $PE(f, C)$. Por outro lado, se $\forall k \in \mathbb{N}, \ z_k \in C_k \setminus \mathrm{Core}_C C_k$, então pelo item 2 de H1, temos M é não vazio. Suponha que $m > 0$ então, pelo item 3 de H1, existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que

[5] Devido a Iusem e Sosa [21].

[6] Devido a Iusem e Sosa [21].

$\{x \in \mathbb{R}^n; g_f^i(x) < m\} \subset \mathsf{Core}_C C_j$. Tome $l = \max\{i, j\}$, i.e, $l \geqslant i$. Como g_f^k é não decrescente temos $g_f^l \geqslant g_f^i$, assim

$$0 = \sup_{y \in C_l} f(y, z_l) = g_f^l(z_l) \geqslant g_f^i(z_l) \geqslant m,$$

a ultima desigualdade é devido $z_l \notin \mathsf{Core}_C C_j$. Portanto, $m = 0$ e pelo Teorema 3.2.2, o problema $\mathsf{PVC}(f, C)$ tem solução. Logo, $\mathsf{PE}(f, C)$ também o tem. □

Finalizarmos este capítulo, introduzindo uma propriedade a qual provaremos ser necessária e suficiente para garantir que o conjunto solução de $\mathsf{PE}(f, C)$ seja não vazio.

P6. Para qualquer seqência $\{z^k\} \subset C \setminus \{0\}$ satisfazendo:

(1) $\|z^k\| \to \infty$ quando $k \to \infty$;

(2) $\left\{\dfrac{z^k}{\|z^k\|}\right\}$ convergindo para x tal que $f(y, y + x) \leqslant 0$ $\forall y \in C$, existe $\{u^k\} \subset C$ tal que para k suficientemente grande

(2.1) $\|u^k\| < \|z^k\|$,

(2.2) $f(z^k, u^k) \leqslant 0$.

Veja que, se $f : C \times C \to \mathbb{R}$ satisfaz o item (4) do Teorema 3.1.2 ou o item (4) do Teorema 3.1.3, então P6 é válida. De fato, desde que existe $r > 0$ e $y \in C$ com $\|y\| \leqslant r$ tal que $f(x, y) < 0$, para todo $x \in C$ com $\|x\| > r$. Considere $\{z^k\} \subset C \setminus \{0\}$ com $\|z^k\| \to \infty$ e $\dfrac{z^k}{\|z^k\|} \to x$, satisfazendo $f(y, y + x) \leqslant 0$ $\forall y \in C$. Tomando $u^k = y$ $\forall k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|u^k\| = \|y\| \leqslant r < \|z^k\|$$

e

$$f(z^k, u^k) = f(z^k, y) < 0$$

Teorema 3.2.4. [7] *A propriedade* P6 *é uma condição necessária e suficiente para a existência de solução de* $\mathsf{PE}(f, C)$.

Demonstração. Condição Necessária. Seja x^* uma solução de $\mathsf{PE}(f, C)$. Considere uma sequência $\{z^k\} \subset C \setminus \{0\}$ satisfazendo que $\lim_{k\to\infty} \|z^k\| \to \infty$ e $\left\{\dfrac{z^k}{\|z^k\|}\right\}$ converge para x tal que $f(y, y + x) \leqslant 0$ $\forall y \in C$. Devemos mostrar que existe uma sequência $\{u^k\} \subset C$ tal que

$$\|u^k\| < \|z^k\| \;\; \forall\, k \text{ suficientemente grande e } f(z^k, u^k) \leqslant 0.$$

[7] Devido a Iusem e Sosa [21].

Tomando $u^k = x^* \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Devido $\|z^k\| \to \infty$, quando $k \to \infty$, segue que dado $R = \|x^*\| > 0$ existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geqslant k_0$, obtemos

$$\|z^k\| > R = \|x^*\| = \|u^k\|$$

e $0 \leqslant f(x^*, z^k) = f(u^k, z^k)$ donde, por P4 tem-se $f(z^k, u^k) \leqslant 0$.

Condições Suficiente. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tome $z^k \in \bigcap_{y \in \mathbb{B}_m} L_f(m, y)$. Consideremos duas situações:

(i) $\|z^k\| = k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, fixe $y \in C$ e tome $m > \|y\|$. Então $f(y, z^k) \leqslant 0 \quad \forall k \geqslant m$, implicando que $\forall k \geqslant m$

$$\begin{aligned} f\Big(y, (1 - \frac{1}{\|z^k\|})y + \frac{1}{\|z^k\|}z^k\Big) &\leqslant \Big(1 - \frac{1}{\|z^k\|}\Big)f(y, y) + \frac{1}{\|z^k\|}f(y, z^k) \\ &= \frac{1}{\|z^k\|}f(y, z^k) \\ &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Desde que $\big(1 - \frac{1}{\|z^k\|}\big)y + \frac{1}{\|z^k\|}z^k \to y + x$, por P2, temos

$$0 \geqslant \liminf_{k \to \infty} f\Big(y, (1 - \frac{1}{\|z^k\|})y + \frac{1}{\|z^k\|}z^k\Big) \geqslant f(y, y + x).$$

Por P6 existem $\{u^k\} \subset C$ tal que k suficientemente grande $\|u^k\| < \|z^k\|$ e $f(z^k, u^k) \leqslant 0$. A primeira desigualdade implica que $u^k \in \mathrm{Core}_C \mathbb{B}_k$. Pelo lema 3.2.2, $u^k \in S(f, C)$.

(ii) Se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|z^k\| < k$, então $z^k \in \mathrm{Core}_C \mathbb{B}_k$ e pelo lema 3.2.2, $z^k \in S(f, C)$. □

Capítulo 4

Método do Ponto Proximal para Problemas de Equilíbrio

Várias abordagens, como por exemplo em [30], têm sido consideradas para estender o método do ponto proximal para o domínio de problemas de equilíbrio. Neste capítulo, desenvolveremos o método proximal abordado por Iusem e Sosa em [23].

4.1 Algoritmo

Como apresentado em [28] e [38], um algoritmo é uma sequência de instruções ou passos finitos, especificados em uma determinada linguagem que mostram como resolver determinado problema. Podemos dizer também que é um conjunto de regras formais para a obtenção de um resultado ou da solução de um problema, englobando fórmulas de expressões aritméticas. Esta definição não está presa à utilização do computador. Qualquer sequência de instruções que mostram como resolver um problema constitui-se um algoritmo. Uma receita de bolo é um bom exemplo de algoritmo, as instruções da receita são uma sequência de passos finitos e lógicos, os quais mostram o que um cozinheiro(a) deve fazer, e em que ordem deve fazer. Uma receita específica todos os passos em uma sequência onde a ordem das instruções ou passos precisam ser seguidas para que possa obter o resultado final (nesse caso o bolo).

Um algoritmo deve especificar quais são as instruções que devem ser executadas, e em que ordem as mesmas devem ser executadas.

4.2 Método de Regularização

Segundo Iusem [19], a ideia de regularização surgiu em conexão com problemas mal-postos. Dado um problema da forma

$$T(f) = 0 \tag{4.1}$$

onde f é um elemento do conjunto X (geralmente um espaço de funções) e $T : X \to X$ é um operador (geralmente diferencial, ou integro-diferencial), (4.1) é dito ser mal-posto quando não tem solução, ou tem mais que uma solução, ou tem uma única solução, mas esta não depende sobre os parâmetros do operador A. A jogada é então substituir T por um operador regularizado $T + \lambda L$ (com $\lambda \in \mathbb{R}$, $A : X \to X$) tal que o problema

$$T(f) + \lambda A(f) = (T + \lambda A)(f) = 0 \tag{4.2}$$

é bem- posto para qualquer $\lambda > 0$. Em tal caso (4.2) tem uma única solução f_λ, e espera-se que quando λ tenda a 0, f_λ forneça algum tipo de aproximação de uma solução de (4.1).

Procuraremos usar esta noção para nosso $PE(f, C)$. Para isso, associaremos aqui a nosso dado $PE(f, C)$ um outro problema de equilíbrio o qual sobre algumas hipóteses adequadas pode ser considerado como uma regularização do mesmo no sentido que o novo problema de equilíbrio atinge uma única solução.

Assim, definamos nosso processo de regularização para $PE(f, C)$.
Fixe $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Para qualquer $f : C \times C \to \mathbb{R}$, associemos outra bifunção $\widetilde{f} : C \times C \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{f}(x, y) = f(x, y) + \gamma\langle x - \bar{x}, y - x\rangle. \tag{4.3}$$

Dizemos que γ é um parâmetro de regularização e $\widetilde{f}$ é uma bifunção regularizada para $PE(f, C)$ e que $PE(\widetilde{f}, C)$ é um problema de equilíbrio regularizado para o problema original.

4.3 Algoritmo do Ponto Proximal para PE(f,C)

No que segue, usaremos as propriedade $P1 - P4$ introduzidas no capítulo anterior, assim como apresentamos uma outra propriedade $P4'$ o qual será útil posteriormente para garantir a boa definição da sequência gerada pelo algoritmo proximal para $PE(f, C)$. Listamos aqui tais propriedades para fácil referência.

P1. $f(x,x) = 0, \forall\, x \in C$;

P2. $f(x,\cdot)$ é convexa e semicontínua inferior para cada $x \in C$;

P3. $f(\cdot,y)$ é semicontínua superior para cada $y \in C$;

P4. Sempre que $f(x,y) \geqslant 0$ com $x, y \in C$, é válido que $f(y,x) \leqslant 0$;

P4$'$. Existe $\theta \geqslant 0$ tal que $f(x,y) + f(y,x) \leqslant \theta\|x-y\|^2$ para todo $x, y \in C$.

Agora propomos o seguinte algoritmo do ponto proximal, para resolver $PE(f,C)$ para o qual f satisfaça $P1 - P4'$.

ALGORITMO. Tome $\{\gamma_k\}$ sequência de números reais positivos tal que $\{\gamma_k\} \subset (\theta, \lambda]$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, para algum $\lambda > \theta \geqslant 0$, e considere a bifunção

$$f_k(x,y) = f(x,y) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle, \quad \forall\, x, y \in C. \tag{4.4}$$

INICIALIZAÇÃO. Escolha algum ponto inicial $x^0 \in C$;

PASSO ITERATIVO. Dado x^k, tome como próxima iterada $x^{k+1} \in C$ tal que

$$x^{k+1} \in S(f_k, C). \tag{4.5}$$

CRITÉRIO DE PARADA. Dado x^k, se $x^{k+1} = x^k$ e $x^k \in S(f,C)$, PARE.

Obs 4.3.1. (a) *A cada iteração estamos resolvendo um subproblema de equilíbrio associado a* $PE(f_k, C)$*, onde* f_k *é uma regularizada como em* (4.3).

(b) *Se* $\{x^k\}$ *termina após um número finito de iterações, então termina em uma solução de* $PE(f,C)$*, isto é,* $x^{k+1} = x^k$ *com* $x^k \in S(f,C)$*. De fato, pela definição de* f_k *e* x^{k+1} *tem-se*

$$f_k(x^{k+1}, y) \;=\; f(x^{k+1}, y) + \gamma_k\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \geqslant 0.$$

Portanto, segue que $f(x^k, y) \geqslant 0$ *para todo* $y \in C$ *como desejado.*

Mostraremos que sob as hipóteses listadas acima a sequência gerada pelo algoritmo dado, converge para alguma solução de $PE(f,C)$, desde que esta exista.

Para atingir nosso objetivo necessitaremos da seguinte noção de convergência.

Uma sequência $\{y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é chamada **Fejér convergente** para um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ com respeito à distância euclidiana se

$$\|y^{k+1} - u\| \leqslant \|y^k - u\|, \;\; \forall\, k \geqslant 0, \;\; \forall\, u \in C. \tag{4.6}$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.1. *Se $\{y^k\}$ é Fejér convergente a $C \neq \emptyset$, então $\{y^k\}$ é limitada. Além disso, se um ponto de acumulação y de $\{y^k\}$ pertence a C então $y = \lim_{k \to +\infty} y^k$.*

Demonstração. Da definição de Fejér convergência, temos

$$\|y^k - y\| \leqslant \|y^{k-1} - y\| \leqslant \|y^{k-2} - y\| \leqslant \cdots \leqslant \|y^0 - y\| \quad \forall y \in C.$$

Então $\{y^k\}$ está contida na bola de centro y e raio $\|y^0 - y\|$, donde $\{y^k\}$ é limitada. Para provarmos a segunda afirmação, considere $\{y^{k_j}\}$ uma subsequência de $\{y^k\}$ tal que $\lim_{j \to \infty} y^{k_j} = y$. Como $y \in C$, de (4.6), temos que a sequência de números reais não negativos, $\{\|y^k - x\|\}$ é decrescente e possui uma subsequência , $\{\|y^{k_j} - y\|\}$, que converge a zero. Logo, $\lim_{k \to \infty} \|y^k - y\| = 0$. Portanto, $\lim_{k \to \infty} y^k = y$. □

Caminharemos agora na direção de estabelecer a convergência do algoritmo do ponto proximal para $\mathrm{PE}(f, C)$ definido acima. Para isso precisamos do:

Lema 4.3.1. *Seja f satisfazendo $P1 - P3$ e $P4'$. Suponha que $\gamma_k > \theta$. Então $\mathrm{PE}(f_k, C)$ tem uma única solução.*

Demonstração. Mostremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $S(f_k, C) \neq \emptyset$. Para atingir tal objetivo, desejamos que f_k satisfaça as hipóteses do Teorema 3.2.1, isto é, verifiquemos:

(1) $P1 - P4$;

(2) $P5$ introduzida no capítulo anterior, i.e, para qualquer $\{x^k\} \subset K$, satisfazendo $\lim_{k \to \infty} \|x^k\| = \infty$, existem $u \in C$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_k(x^m, u) \leqslant 0$ para todo $m \geqslant n_0$.

Temos,

P1- $f_k(x, x) = f(x, x) + \gamma_k \langle x - x^k, x - x \rangle = f(x, x) = 0$.

P2- A aplicação $y \mapsto f_k(x, y)$ é convexa e semicontínua inferior para cada $x \in C$ fixado. De fato, dados $y, z \in C$ e $t \in [0, 1]$. Como C é convexo $(1 - t)y + tz \in C$, assim

$$\begin{aligned}
f_k(x, (1-t)y + tz) &= f(x, (1-t)y + tz) + \gamma_k \big\langle x - x^k, (1-t)y + tz - x \big\rangle \\
&= f(x, (1-t)y + tz) + \gamma_k \big\langle x - x^k, (1-t)(y - x) + t(z - x) \big\rangle \\
&\leqslant (1-t)f(x, y) + tf(x, z) + (1-t)\gamma_k \big\langle x - x^k, y - x \big\rangle + \\
&\quad + t\gamma_k \big\langle x - x^k, z - x \big\rangle \\
&= (1-t)\Big[f(x, y) + \gamma_k \big\langle x - x^k, y - x \big\rangle \Big] + \\
&\quad + t\Big[f(x, z) + \gamma_k \big\langle x - x^k, z - x \big\rangle \Big] \\
&= (1-t)f_k(x, y) + tf_k(x, z),
\end{aligned}$$

donde para obter a desigualdade usamos o fato da função f satisfazer P2. Logo, a aplicação $y \mapsto f_k(x,y)$ é convexa.

Para provarmos a semicontinuidade inferior, considere $\{y^j\} \subset C$ uma sequência tal que $\lim_{j\to\infty} y^j = y$. Como C é fechado, $y \in C$.

Então, usando a semicontinuidade inferior de $f(x,\cdot)$ e que o produto interno é contínuo temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty} f_k(x,y^j) &= \liminf_{j\to\infty} \left[f(x,y^j) + \gamma_k\langle x - x^k, y^j - x\rangle\right] \\
&\geqslant \liminf_{j\to\infty} f(x,y^j) + \liminf_{j\to\infty} \gamma_k\langle x - x^k, y^j - x\rangle \\
&= \liminf_{j\to\infty} f(x,y^j) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle \\
&\geqslant f(x,y) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle \\
&= f_k(x,y).
\end{aligned}$$

Assim, por definição, a aplicação $y \mapsto f_k(x,y)$ é sci para cada $x \in C$. Portanto, f_k satisfaz (P2) fica provado.

Agora seja $\{z^j\} \subset C$ uma sequência tal que $\lim_{j\to\infty} z^j = x$. Desde que C é fechado $x \in C$. Assim pela semicontinuidade superior de $f(\cdot,y)$ temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to\infty} f_k(z^j,y) &= \limsup_{j\to\infty} \left[f(z^j,y) + \gamma_k\langle z^j - x^k, y - z^j\rangle\right] \\
&\leqslant \limsup_{j\to\infty} f(z^j,y) + \limsup_{j\to\infty} \gamma_k\langle z^j - x^k, y - z^j\rangle \\
&\leqslant f(x,y) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle \\
&= f_k(x,y)
\end{aligned}$$

e conclimos que $f_k(\cdot,y)$ é semicontínua superior para cada $y \in C$ e assim satisfaz P3.

Note também que

$$\begin{aligned}
f_k(x,y) + f_k(y,x) &\overset{\text{def.}}{=} \left[f(x,y) + \gamma^k\big\langle x - x^k, y - x\big\rangle\right] + \left[f(y,x) + \gamma_k\big\langle y - x^k, x - y\big\rangle\right] \\
&= \left[f(x,y) + f(y,x)\right] + \gamma_k\left[\langle x - x^k, y - x\rangle + \langle y - x^k, x - y\rangle\right] \\
&= \left[f(x,y) + f(y,x)\right] + \gamma_k\langle x^k - x + y - x^k, x - y\rangle \\
&= \left[f(x,y) + f(y,x)\right] + \gamma_k\langle y - x, x - y\rangle \\
&= \left[f(x,y) + f(y,x)\right] - \gamma_k\|x - y\|^2 \\
&\overset{P4'}{\leqslant} \theta\|x - y\|^2 - \gamma_k\|x - y\|^2 \\
&= (\theta - \gamma^k)\|x - y\|^2 \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}$$

Logo, sempre que $f_k(x,y) \geqslant 0$ com $x, y \in C$, obtemos que

$$f_k(y,x) = f_k(x,y) + f_k(y,x) - f_k(x,y) \leqslant 0 - f_k(x,y) \leqslant 0$$

e (1) fica provado.

Para finalizarmos, estabeleremos que f_k satisfaz (2). Tome uma sequência $\{z^j\}$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|z^j\| = \infty$, e considere $u = x^k$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} f_k(z^j,u) &= f(z^j,u) + \gamma_k\langle z^j - x^k, u - z^j\rangle \\ &= f(z^j,u) - \gamma_k\langle x^k - z^j, u - z^j\rangle \\ &= f(z^j,u) - \gamma_k\|x^k - z^j\|^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $f(z^j,u) + f(u,z^j) \leqslant \theta\|u - z^j\|^2$, (4.7) toma a forma

$$\begin{aligned} f_k(z^j,u) &\leqslant -f(u,z^j) + \theta\|u - z^j\|^2 - \gamma_k\|u - z^j\|^2 \\ &= -f(u,z^j) - (\gamma_k - \theta)\|u - z^j\|^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para cada $x \in C$, defina $g_x : C \to \mathbb{R}$ como sendo

$$g_x(y) = f(x,y). \tag{4.9}$$

Tome $\hat{x} \in \mathrm{ri}(C)$. Desde que, por P2, g_u é convexa. Temos que seu subdiferencial em $\hat{x}$, denotado por $\partial g_u(\hat{x})$, é não vazio. Seja $\hat{v} \in \partial g_u(\hat{x})$. Pela definição de subdiferencial,

$$\langle \hat{v}, z^j - \hat{x}\rangle \leqslant g_u(z^j) - g_u(\hat{x}) = f(u,z^j) - f(u,\hat{x}). \tag{4.10}$$

Em consequência de (4.10) e da desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} -f(u,z^j) &\leqslant -f(u,\hat{x}) - \langle \hat{v}, z^j - \hat{x}\rangle \\ &= \langle \hat{v}, \hat{x} - z^j\rangle - f(u,\hat{x}) \\ &\overset{DCS}{\leqslant} \|\hat{v}\|\|\hat{x} - z^j\| - f(u,\hat{x}) \\ &= \|\hat{v}\|\|\hat{x} - u + u - z^j\| - f(u,\hat{x}) \\ &\leqslant \|\hat{v}\|\big(\|\hat{x} - u\| + \|u - z^j\|\big) - f(u,\hat{x}) \\ &= \|\hat{v}\|\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|\|u - z^j\| - f(u,\hat{x}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) em (4.8),

$$\begin{aligned} f_k(z^j,u) &\leqslant -f(u,z^j) - (\gamma_k - \theta)\|u - z^j\|^2 \\ &\leqslant \|\hat{v}\|\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|\|u - z^j\| - f(u,\hat{x}) - (\gamma_k - \theta)\|u - z^j\|^2 \\ &= \|\hat{v}\|\|\hat{x} - u\| + \|u - z^j\|\big[\|\hat{v}\| - (\gamma_k - \theta)\|u - z^j\|\big] - f(u,\hat{x}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Desde que, $\gamma_k - \theta > 0$ e $\lim\limits_{j\to\infty} \|z^j\| = +\infty$, segue tomando o limite em (4.12) que

$$\lim_{j\to\infty} f_k(z^j, u) \leqslant \|\hat{v}\|\|\hat{x} - u\| + \lim_{j\to\infty} \|u - z^j\| \big[\|\hat{v}\| - (\gamma_k - \theta)\|u - z^j\|\big] - f(u, \hat{x}) = -\infty,$$

pois $\lim\limits_{j\to\infty} \|u - z^j\| = \infty$. Assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z^j, u) \leqslant 0$ para todo $j \geqslant j_0$, o que prova (2). Portanto, $PE(f_k, C)$ tem solução.

Agora provemos a **unicidade** da solução. Assuma que ambos $\tilde{x}$ e $\tilde{x}'$ resolvem $PE(f_k, C)$. Então,

$$0 \leqslant f_k(\tilde{x}, \tilde{x}') = f(\tilde{x}, \tilde{x}') + \gamma_k \langle \tilde{x} - x^k, \tilde{x}' - \tilde{x} \rangle \tag{4.13}$$

e

$$0 \leqslant f_k(\tilde{x}', \tilde{x}) = f(\tilde{x}', \tilde{x}) + \gamma_k \langle \tilde{x}' - x^k, \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle \tag{4.14}$$

Somando, membro a membro, as desigualdades (4.13) e (4.14),

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant f(\tilde{x}, \tilde{x}') + f(\tilde{x}', \tilde{x}) + \gamma_k \big[\langle \tilde{x} - x^k, \tilde{x}' - \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}' - x^k, \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle\big] \\
&= f(\tilde{x}, \tilde{x}') + f(\tilde{x}', \tilde{x}) + \gamma_k \langle x^k - \tilde{x} + \tilde{x}' - x^k, \tilde{x} - \tilde{x}' \rangle \\
&\overset{P4'}{\leqslant} \theta \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|^2 - \gamma_k \|\tilde{x} - \tilde{x}'\|^2 \\
&= (\theta - \gamma_k) \|\tilde{x} - \tilde{x}\|^2 \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Daí $(\theta - \gamma_k)\|\tilde{x} - \tilde{x}'\|^2 = 0$ implicando $\|\tilde{x} - \tilde{x}'\| = 0$, ou seja, $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $PE(f_k, C)$ admite uma única solução. □

Teorema 4.3.1. *Considere* $PE(f, C)$, *onde* f *satisfaça* $P1 - P4'$. *Assuma que o conjunto,* $S(f, C)$, *soluções de* $PE(f, C)$ *é não vazio. Então, para todo* $x^0 \in C$, *a sequência* $\{x^k\}$ *gerada pelo algoritmo proximal converge a um ponto* $x^* \in S(f, C)$.

Demonstração. Dividiremos a prova em 4 passos. No passo 1, provamos que $\{x^k\}$ está bem definida. No passo 2, provamos que $\{x^k\}$ é Fejér convergente a $S(f, C)$. No passo 3, estabelecemos o útil fato que $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$, será usado no passo 4, onde mostramos que qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$ pertence a $S(f, C)$. Os resultados dos passos 2 e 4, junto com a Proposição 4.3.1, implica na afirmação do teorema.

Passo 1. A sequência $\{x^k\}$ está bem definida.

Segue do Lema 4.3.1 que cada subproblema admite uma única solução. Logo, $\{x^k\}$ gerada pelo algoritmo está bem definida.

Passo 2. $\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leqslant \|x^k-x^*\|^2-\|x^{k+1}-x^k\|^2$ para todo $k \geqslant 0$ e todo $x^* \in S(f,C)$. Em particular, $\{x^k\}$ é Fejér convergente a $S(f,C)$

$$\begin{aligned} \|x^k-x^*\|^2 &= \|x^k-x^{k+1}+x^{k+1}-x^*\|^2 \\ &= \|x^k-x^{k+1}\|^2+\|x^{k+1}-x^*\|^2+2\langle x^k-x^{k+1}, x^{k+1}-x^*\rangle \end{aligned} \tag{4.15}$$

Desde que $x^{k+1} \in S(f_k, C)$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f_k(x^{k+1}, x^*) &= f(x^{k+1}, x^*)+\gamma_k\langle x^{k+1}-x^k, x^*-x^{k+1}\rangle \\ &= f(x^{k+1}, x^*)+\gamma_k\langle x^k-x^{k+1}, x^{k+1}-x^*\rangle. \end{aligned}$$

I.e,

$$-f(x^{k+1}, x^*) \leqslant \gamma_k\langle x^k-x^{k+1}, x^{k+1}-x^*\rangle. \tag{4.16}$$

Assim por P4 e $\gamma_k > 0 \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ segue

$$0 \leqslant \langle x^k-x^{k+1}, x^{k+1}-x^*\rangle. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.17) em (4.15), obtemos

$$0 \leqslant \|x^k-x^*\|^2-\|x^k-x^{k+1}\|^2-\|x^{k+1}-x^*\|^2.$$

Portanto, $\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leqslant \|x^k-x^*\|^2-\|x^k-x^{k+1}\|^2$ donde tem-se que $\{x^k\}$ é Fejér convergente a $S(f,C)$.

Passo 3. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^{k+1}-x^k\| = 0$.

Do passo 2,

$$\|x^{k+1}-x^*\|^2+\|x^k-x^{k+1}\|^2 \leqslant \|x^k-x^*\|^2, \tag{4.18}$$

segue que a sequência não negativa $\{\|x^k-x^*\|\}$ é não-decrescente, pois

$$\|x^{k+1}-x^*\|^2 \leqslant \|x^{k+1}-x^*\|^2+\|x^k-x^{k+1}\|^2 \leqslant \|x^k-x^*\|^2$$

e assim $\|x^{k+1}-x^*\| \leqslant \|x^k-x^*\|$ como afirmado. Logo, a sequência $\{\|x^k-x^*\|\}$ é convergente, digamos para $\sigma \geqslant 0$.

Por (4.18),

$$0 \leqslant \|x^k-x^{k+1}\|^2 \leqslant \|x^k-x^*\|^2-\|x^{k+1}-x^*\|^2. \tag{4.19}$$

Desde que o lado direito em (4.19) converge a $\sigma^2 - \sigma^2 = 0$, quando $k \to \infty$, conseguimos que

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0.$$

Passo 4. $\{x^k\}$ tem pontos de acumulação e todos eles pertencem a $S(f, C)$.

A existência de pontos de acumulação segue do passo 2, isto é, $\{x^k\}$ é Fejér convergente a $S(f, C)$, e da Proposição 4.3.1. Sejam $\bar{x}$ um ponto de acumulação de $\{x^k\}$ e $\{x^{j_k}\}$ uma subsequência de $\{x^k\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x^{j_k} = \bar{x}$.

Fixado $y \in C$. Desde que $x^{k+1} \in S(f_k, C)$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f_k(x^{k+1}, y) &\overset{\text{def.}}{=} f(x^{k+1}, y) + \gamma^k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \\ &\overset{\text{DCS}}{\leqslant} f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \|x^{k+1} - x^k\| \cdot \|y - x^{k+1}\| \end{aligned} \tag{4.20}$$

Observe que :

1. $\{\gamma_k\}$ é limitado por λ;
2. $\|y - x^{k+1}\|$ é limitado, pois $\|y - x^{k+1}\| \leqslant \|y\| + \|x^{k+1}\| \leqslant \|y\| + M = \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0$, segue do passo 3.

Agora, tomando o limite ínfimo em (4.20) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \limsup_{k\to\infty} f(x^{k+1}, y) + \liminf_{k\to\infty} \gamma_k \|x^{k+1} - x^k\| \cdot \|y - x^{k+1}\| \\ &= \limsup_{k\to\infty} f(x^k, y), \quad \forall\, y \in C. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pela semicontinuidade superior de $f(\cdot, y)$, temos usando (4.21)

$$f(\bar{x}, y) \geqslant \limsup_{k\to\infty} f(x^{j_k}, y) \geqslant 0, \quad \forall\, y \in C.$$

Logo, concluimos que $\bar{x} \in S(f, C)$.

Os passos 2 e 4 indicam que ambas as afirmações da Proposição 4.3.1 são obtidas e desta forma existe $x^* \in S(f, C)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$. □

Observe que tomando $\theta = 0$ tal resultado engloba toda a classe de funções monótonas, isto é, funções satisfazendo: $f(x, y) + f(y, x) \leqslant 0$ para todo $x, y \in C$.

O exemplo a seguir mostra a importância da hipótese P4 para a nossa análise de convergência.

Exemplo 4.3.1. *Considere o problema de equilíbrio,* $\mathsf{PE}(f, \mathbb{R})$, *onde* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f(x, y) = x(x - y)$.

Temos que

$$\begin{aligned} f(x,y) + f(y,x) &= x(x-y) + y(y-x) \\ &= x(x-y) - y(x-y) \\ &= (x-y)^2, \end{aligned}$$

isto é, f *é 1-undermonótona. Neste caso, observe que* $S(f, \mathbb{R}) = \{0\}$. *Assim, tomando* $x^0 \in \mathbb{R}^*$ *e escolhendo* $\gamma_k = \gamma > \theta = 1$, *tem-se que* $x^1 = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} x^0 \in S(f_0, \mathbb{R})$ *pois*

$$f_0(x^1, y) = \Big((1-\gamma)\big(x^1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}x^0\big)\Big)(x^1 - y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Agora considerando esse x^1 *dado acima e realizando alguns cálculos obteremos*

$$x^2 = \Big(\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big)^2 x^0 \in S(f_1, \mathbb{R}).$$

Daí seguindo este processo poderemos observar que

$$x^k = \Big(\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big)^k x^0 \in S(f_{k-1}, \mathbb{R}) \tag{4.22}$$

será a sequência gerada.

Porém veja que $\{x^k\}$ *diverge. De fato,*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x^k &= \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big)^k x^0 \\ &= \lim_{k\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{\gamma-1}\Big)^k x^0 \\ &\geqslant \lim_{k\to\infty} \Big(1 + \frac{k}{\gamma-1}\Big) x^0 \\ &= x^0 + \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\gamma-1} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

O ponto aqui é que para essa escolha de C *a função* f *não satisfaz* P4, *o qual assegura a Fejér convergência de* $\{x^k\}$ *ao conjunto solução.*

Por outro lado, se tomarmos $C = [\frac{1}{2}, 1]$ *e* $\gamma_k = \gamma > 1$ *o problema anterior pode ser contornado isto por que a sequência é forçada a permanecer em* $[\frac{1}{2}, 1]$. *Além do mais, neste caso, devido à presença da restrição* $x^k \in C$, *a fórmula das iteradas não é mais dada por* (4.22), *mas sim temos* $x^{k+1} = \min\{1, \frac{\gamma}{\gamma-1}x^k\}$, *e é fácil checar que* $\{x^k\}$ *converge* *para a única solução* $x^* = 1$ *após um número finito de passos, para qualquer* $x^0 \in C$. *O fato é que a sequência* $\{x^k\}$ *converge à solução do problema é consistente com nossa análise de convergência, desde que* f *satisfaz* P4 *para esta escolha de* C.

Capítulo 5

Variações de $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$ e Perspectiva de Estudos Futuros

Vários pesquisadores têm trabalhado em $\mathsf{PE}(\mathsf{f}, \mathsf{C})$ devido a sua vasta aplicabilidade em matemática e em diversas outras áreas das ciências, como por exemplo: Economia e Engenharias. Hoje é possível encontrar na literatura algumas outras variações deste problema, os quais podemos citar: Problema de Quasi-Equilíbrio, Problema de Equilíbrio Generalizado e Problema de Equilíbrio em dois Níveis.

Uma boa perspectiva de trabalhos futuros, é a generalização desses problemas para o cenário Riemanniano. Alguns trabalhos têm considerado essa recente linha de pesquisa, como em Ferreira et al [2] e Colao et al [10]. Além disso, muitos problemas existentes têm uma melhor viabilidade do ponto de vista das variedades riemannianas, o que nos motiva a nos aprofundar-mos neste tema.

Referências Bibliográficas

[1] Auslender, A. - *Résolution numérique d'inégalités variationnelles.* RAIRO R2, 67–72, 1973.

[2] Batista, E.E.A., Bento, G.C., Ferreira, O.P. - *An existence result for the generalized vector equilibrium problem on Hadamard manifolds.* preprint, 2014.

[3] Bianchi, M., Pini, R. - *Coercivity conditions for equilibrium problems.* Journal of Optimization Theory and Applications (124) 79-92, 2005.

[4] Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M. - *Existence and solution methods for equilibria.* Eur. J. Oper. Research, (227) 1-11, 2013.

[5] Blum, E., Oettli, W. - *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems.* The Mathematics Student (63) 123–145, 1994.

[6] Bortolossi, H.J, Sartini, B.A., Garbugio, G., Santos, P.A., Barreto, L.S. - *Uma Introdução a Teoria dos Jogos.* II Bienal da SBM, UFBA, 2004.

[7] Brézis, H., Nirenberg, L., Stampacchia, G. - *A remark on Ky Fan's minimax principle.* Bollettino della Unione Matematica Italiana (6) 293–300, 1972.

[8] Brézis, H., - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[9] Brouwer, L.E.J. - *Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann. (71) 97–115, 1912.

[10] Colao, V., Lopez, G., Marino, G., Martin-Marquez, V. - *Equilibrium problems in Hadamard manifolds.* J. Math. Anal. Appl. 388, 61-77, 2012.

[11] Du Val, P. - *The unloading problem for plane curves.* Amer. J. Math. (62) 307–311, 1940.

[12] Fan, K. - *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem.* Mathematische Annalen (142) 305-310, 1961.

[13] Fan, K. - *A minimax inequality and applications.* In: O. Shisha (Ed.), Inequalities III, Academic Press, New York, 103-113, 1972.

[14] Ferris, M. C., Pang, J.S. - *Engineering and economic applications of complementarity problems.* SIAM Review (39) 669–713, 1997.

[15] Flores-Bazán, F. - *Existence theory for finite dimensional pseudomonotone equilibrium problems.* Acta. Appl. Math.(77), 249-297, 2003.

[16] Hartman, P., Stampacchia, G. - *On nonlinear elliptia differential funcional equations.* Acta Mathematica (115) 271-310, 1966.

[17] Ingleton, A.W. - *A Problem in Linear Inequalities.* Proc. London Math. Soc. Vol.16, 519-536, 1966.

[18] Isac, G. - *Complementarity Problems.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1992.

[19] Iusem, A.N - *Métodos de Ponto Proximal em Otimização.* 20ª Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[20] Iusem, A.N., Kassay, G., Sosa, W. - *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems.* Mathematical Programming (116) 259-273, 2009.

[21] Iusem, A.N., Sosa, W. - *New existence results for equilibrium problems.* Nonlinear Anal. (52) 621-635, 2003.

[22] Iusem, A.N., Sosa, W. - *Iterative algorithms for equilibrium problems.* Optimization (52) 301-316, 2003.

[23] Iusem, A.N., Sosa, W. - *On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces.* Optimization (59) 1259-1274, 2010.

[24] Izmailov, A., Solodov, M., *Otimização - Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*, IMPA, Rio de Janeiro. vol.1, 2005.

[25] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G. - *An introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press, New York, 1980.

[26] Knaster, B., Kuratowski, C., Mazurkiewicz, S. - *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe.* Fund. Math. (14) 132-137, 1929.

[27] Lima, E.L. - *Curso de Análise* vol.2. 10ª ed. Coleção Projeto Euclides. IMPA, 2010.

[28] Manzano, J. A. N. G., Oliveira, J. F. de. - *Algoritmos: Lógica para Desenvolvimento de Programação de Computadores.* 21ª ed. São Paulo. Érica, 2008.

[29] Mas-colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R. - *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.

[30] Moudafi, A. - *Proximal point algorithm extended to equilibrium problems.* Journal of Natural Geometry (15) 91-100, 1999.

[31] Munkres, J.R. - *Topology.* 2 ed. New Jersey, Prentice-Hall, 2000.

[32] Nagurney, A., Zhang, D. - *Projected Dynamical Systems and Variational Inequalities with Applications.* Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 1996.

[33] Nash, J. -*Equilibrium points in N-person games.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA (36) 48–49, 1950.

[34] Nash, J. - *Non-cooperative games.* Ann. Math. (54) 286–293, 1951.

[35] Neumann, J.V. - *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.* Math. Ann. vol.10, 295-32, 1928.

[36] Neumann, J.V., Morgenstern, O. - *The theory of games and economic behaviour.* Princeton University Press, 1944.

[37] Nikaido, H., Isoda, K. - *Note on noncooperative convex games.* Pacific Journal of Mathematics (5) 807-815, 1955.

[38] Oliveira, A. B. de, Boratti, J. C. - *Introdução a Programação - Algoritmos.* Visual Books. Florianópolis, 1999.

[39] Ponstein, J. - *Seven kinds of convexity*. SIAM Review (9) 115-119, 1967.

[40] Rockafellar, R. T. - *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[41] Stampacchia, G. - *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*. C. R. Acad. Sc., Paris (258) 4413–4416, 1964.

[42] Stampacchia, G. *Variational Inequalities*. Proc. Internal. Congr. Math., Nice , 877-883, 1970.