Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Sobre a Boa Colocação da Equação de Schrödinger Não-linear em Espaços L^p-fraco e Evolução do Grupo Linear de Schrödinger sobre um Dado Homogêneo

Fáuster de Santana Silva

Teresina - 2023

Fáuster de Santana Silva

Dissertação de Mestrado:

Sobre a Boa Colocação da Equação de Schrödinger Não-linear em Espaços L^p-fraco e Evolução do Grupo Linear de Schrödinger sobre um Dado Homogêneo

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos

Teresina - 2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DA 118° DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia 07 do mês de agosto de dois mil e vinte e três, às 16:00 horas, na Sala de Seminários do Programa de Pós Graduação em Matemática - PPGMAT/UFPI, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr.**Gleison do Nascimento Santos** (Presidente), Dr.**Mykael de Araújo Cardoso** (UFPI), Dr.**Roger de Peres Moura** (UFPI), Dr.**Ailton Campos Nascimento** (UFC), a fim de julgar a dissertação do mestrando **Fáuster de Santana Silva**, intitulada *Sobre a Boa Colocação da Equação de Schrödinger Não-linear em Espaços Lp -fraco* , para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aberta a sessão pelo presidente, coube ao candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** do mesmo. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 07 DE AGOSTO DE 2023.

Recomendações da Banca:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - Presidente

Prof. Dr. Mykael de Araújo Cardoso

Roger Peres de Moura
Prof. Dr. Roger de Peres Moura

Ailton Campos do Nascimento
Prof. Dr. Ailton Campos Nascimento - Membro Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586s Silva, Fáuster de Santana.

Sobre a boa colocação da equação de Schrödinger não linear em espaços L^P-fraco e evolução do grupo linear de Schrödinger sobre um dado homogêneo / Fáuster de Santana Silva. -- 2023.

99 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2023.

"Orientador: Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos."

1. Equação de Schrödinger não-linear . 2. Espaços de Lorentz. 3. Espaços de Marcinkiewicz. I. Santos, Gleison do Nascimento. II. Titulo.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Dedico aos meus pais, Rosa Maria Belo de Santana Silva e Valdemar Gomes da Silva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tal realização, e que toda honra e glória seja dada a ele.

Agradeço aos meus pais Rosa Maria Belo de Santana Silva e Vademar Gomes da Silva por terem sempre me apoiado e acreditado em mim, especialmente durante esse processo, pelos esforços e sacrifícios que eles não cogitaram em fazer para me ajudar, e por serem meu maior incentivo para não desistir e continuar sempre melhorando.

Agradeço ao meu orientador de iniciação científica e mestrado Prof. Gleison do Nascimento Santos pelos ensinamentos, pela paciência e por me ajudar a concretizar esse sonho.

Agradeço a todos os professores que tive durante a graduação e mestrado por me capacitarem para tal feito, em especial os professores Roger Peres de Moura, Ailton do Nascimento Campos, Newton Luis Santos, Barnabé Pessoa Lima, Mykael de Araujo Cardoso e Italo Dowell Lira Melo.

Agradeço a toda minha família pelo apoio, incentivo, fé e por estarem sempre dispostos a me ajudar no máximo possível.

Agradeço minha irmã Kássia Valéria, meu cunhado Fabricio e minha sobrinha Maria Emanuelle por me acolherem durante graduação e mestrado, por toda atenção prestada, e por terem uma grande contribuição nas minhas realizações. Como também meus irmãos Fredson e Fernando, pois da graduação ao mestrado os mesmos também não mediram esforços para colaborar com minha formação acadêmica.

Como já disse meu amigo Jefferson: "o verdadeiro mestrado são os amigos que você faz pelo caminho". Então agradeço aos amigos que fiz durante esse processo por todo apoio e pela "resenha", que pode não parecer, mas tem um papel muito importante. Agradeço em especial aos que tive mais contato nos últimos dois anos: Jefferson, Sillas, Suerlan, Gabriel, Paulo Sérgio, Raquel, João Victor Matos, Vitor (Ousadia), Danilo Santos, Danrley, Luan, Khilmer, Danilo Oliveira, Emanuelly, Júlia, Luzivânia, Isaque, Vinicius, Honório, José, Eduardo, Douglas, José Vitor, Wilkreffy, Rufino, Estevão, Dieme, Jonatas, Ruan, Erisvaldo, João Vinícius.

Agradeço também a todos meus amigos que conheci fora do ambiente acadêmico (que tem que me ouvir falar sobre matemática mesmo sem querer nenhum pouco), pois me incentivaram bastante e sei que posso sempre contar com eles. Em especial meus "irmãos" Luisinho, Evandro (Evagol), Marco, Daniel, Héricles e Eduardo.

Agradeço a todo o corpo docente das escolas públicas U.E. Anselmo Gomes Vilanova e U.E. José borba de Carvalho de Jardim do Mulato -PI, que foram responsáveis por minhas primeiras formações, e tenho muito a agradeçer os seus esforços e dedicação.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"*Ouço falarem que o esforço vence o talento, gosto desse argumento.*"

Major RD

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo sobre a boa-colocação local e global para equação de Schrödinger não-linear (NLS)

$$i\partial_t u + \Delta u - i\lambda |u|^\rho u = 0$$

em espaços L^p-fraco, também conhecidos como espaços de Marcinkiewicz. Em relação a soluções globais no tempo, estudamos o caso em que o dado inicial é uma função homogênea "suficientemente pequena", e veremos que as soluções correspondentes a estes dados são *invariantes por scaling*, ou seja, são *auto-similares*. Além disso, exibimos as propriedades de estabilidade para soluções globais no tempo, e de decaimento para soluções locais no tempo.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger não-linear, Boa colocação, Espaços de Lorentz, Espaços de Marcinkiewicz.

Abstract

In this work, we present a study on the local and global well-posedness for nonlinear Schrödinger equation (NLS)

$$i\partial_t u + \Delta u - i\lambda|u|^\rho u = 0$$

in L^p-weak spaces or also known as Marcinkiewicz spaces. In the regard of the global in time solutions we study the case where inicial data is a "sufficiently small" homogeneous function and will see that the correponding solutions to these data is scale invariant, that is, self-similar. Furthermore we show the stability properties to global solutions and decay properties to local solutions.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, Well-posedness, Lorentz spaces, Marcinkiewicz spaces.

Sumário

Notações

q.s.	quase sempre
q.t.p	quase todo ponto
$\mathrm{Re}\ z$	parte real do número complexo z
$\mathrm{Im}\ z$	parte imaginária do número complexo z
$\mathcal{X}_E$	função característica do conjunto E definida por $\mathcal{X}(x) = 1$ se $x \in E$ e $\mathcal{X}(x) = 0$ se $x \notin E$
$\mathrm{supp}\ f$	fecho do conjunto $\{x \in D(f) \ : \ f(x) \neq 0\}$
$C_c(E, F)$	espaço de funções contínuas de E em F com $\mathrm{supp}(f)$ compacto
$C_c(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ contínuas com $\mathrm{supp}\ f$ compacto em Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis com $\mathrm{supp}\ f$ compacto em Ω
X^*	dual topológico do espaço topológico X
$\partial\Omega$	fronteira de Ω, i.e., $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$
u_t	$= \partial_t u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
u_{x_i}	$= \partial_{x_i} u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$
Δ	$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$

Introdução

O objetivo principal deste trabalho, que tem por base o paper de Lucas C.F. Ferreira, E.J. Villamizar-Roa e Pablo Braz e Silva [1], é apresentar o estudo da teoria de existência de soluções nos espaços de Lorentz do tipo $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, também chamados de espaços L^p-fraco ou de Marcinkiewcz, para o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^\rho u, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(t,x)$ é uma função a valores complexos, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é um valor inicial dado, λ é um número complexo não-nulo fixado e $0 < \rho < \infty$. A equação considerada acima é chamada *equação de Schrödinger não-linear*.

Sabemos que na mecânica clássica os fenômenos naturais acontecem obedecendo as leis de Newton, e além disso, podemos pela segunda lei de Newton descrever matematicamente o estado de um certo sistema em um instante de tempo dadas suas condições iniciais. Por outro lado, com respeito aos estudos em mecânica quântica, tais leis não são ferramentas interessantes de utilizar. Assim, surge naturalmente o problema de establecer uma outra teoria sobre o comportameto de sistemas quânticos. Em 1926 o físico austríaco Erwin Schrödinger publicou em seus trabalhos uma forma também de descrever o comportamento durante o tempo, agora de um sistema quântico. Tal ferramenta é na verdade uma equação chamada *equação de Schrödinger*, dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi,$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck, ψ é chamada função onda e V é uma função de energia potencial (Veja [18]). Neste sentido, a equação de Schrödinger descreve a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma região do espaço.

A equação não-linear de Schrödinger considerada em (1) aparece na modelagem de diversos fenêmenos físicos, a saber, tal equação admite soluções chamadas *solitary waves* e descreve a evolução de ondas aquáticas; também surge em outros contextos físicos que incluem óptica não-linear, propagação de ondas eletromagnéticas e de plasma, e problemas de instabilidade não-linear (Veja [21]).

Via transformada de Fourier podemos ver que que o problema de valor inicial em (1) é formalmente equivalente a seguinte equação integral

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s))ds, \tag{2}$$

onde a família de operadores $(e^{it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$ é chamada *grupo linear de Schrödinger*, que é definido por

$$\left(e^{it\Delta}\phi\right)(x) := \left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\phi}\right)^{\vee}(x) = (K_t * \phi)(x), \tag{3}$$

onde

$$K_t(x) = (4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}},$$

$^\wedge$ é a transformada de Fourier e $^\vee$ é a transformada inversa. Tal grupo determina as soluções da equação de Schrödinger linear, isto é, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

é dada por $u(t,x) = (e^{it\Delta}\phi)(x)$.

Na teoria das equações diferenciais parciais é muito importante, além de provar a existência de soluções para os problemas, ter também a boa-colocação deste problema. Isso garante que considerando um dado inicial com uma boa aproximação ao que acontece na vida real é obtida também uma solução fiel. Neste sentido, um problema em EDP é dito *bem-posto* ou *bem colocado* se existe solução, a solução é única e existe uma dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais, ou seja, dados "próximos"vão resultar em soluções respectivas "próximas". (Daremos mais detalhes do capítulo 4).

Umas das principais ferramentas que utilizaremos aqui para a prova dos teoremas de boa-colocação é o teorema do ponto-fixo de Banach. Por outro lado, diferentemente do que acontece em muitas demonstrações de boa-colocação, não utilizaremos as estimativas de Strichartz para justificar a contração necessária para aplicar o teorema. (Por exemplo, F. Linares e G. Ponce em [12] estabelecem a boa colocação para equação em (1) nos espaços $L^2(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$ e $H^2(\mathbb{R}^n)$) utilizando Strichartz.) Em vez disso, utilizaremos limitações do grupo linear de Schrödinger $e^{it\Delta}$ em espaços de Lorentz, a saber, temos que para $p \in [1,2]$

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|t|^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}, \quad t \neq 0,$$

e portanto, utilizando o fato de interpolação real que (vide [3]), para $0 < p_0, p_1 < \infty$ e $1 \leqslant q, q_0, q_1 \leqslant \infty$, temos

$$(L^{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n), L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = L^{p,q}(\mathbb{R}^n),$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \theta \in (0,1),$$

podemos obter também

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)\to L^{p',q}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C|t|^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}, \quad t \neq 0.$$

O primeiro dos resultados que apresentamos aqui é o de boa-colocação local (Teorema 4.2). Este teorema garante que supondo $\frac{n\rho}{2} < \frac{\rho+2}{\rho+1}$ e considerando um dado inicial $\phi \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}(\mathbb{R}^n)$, existe $0 < T = T(\|\phi\|_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}}) < \infty$ e uma solução $u = u(t,x)$ satisfazendo a equação integral (2) e pertencente ao espaço $E^T_{\alpha,\beta}$ definido por

$$E^T_{\alpha,\beta} := \{u : |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} u \in BC((-T,T); L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n))\}.$$

onde

$$\alpha := \frac{2}{\rho} - \frac{n}{\rho+2} \quad \text{e} \quad \beta := \frac{2}{\rho} - \frac{n(\rho+1)}{\rho+2}.$$

Além disso, considerando uma sequência $\phi_n \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$ tal que $\phi_n \to \phi$ em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$ quando $n \to \infty$, temos que existe $0 < T_0 < \infty$ tal que as soluções u e u_n dos respectivos dados iniciais ϕ e ϕ_n pertencem a $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$ para todo n suficientemente grande, e $u_n \to u$ em $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$ quando $n \to \infty$.

O segundo resultado a ser demonstrado é o de boa-colocação global. Neste caso, podemos provar a existência de soluções $u(t,x)$ definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto é uma consequência do fato que a constante de contração obtida na demonstração não depende do tempo. Precisamente, tal teorema garante que se $\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{n\rho}{2} < \rho+2$ e ϕ é uma distribuição tal que $\|e^{it\Delta}\phi\|_\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $\|\cdot\|_\alpha$ é a norma do espaço E_α definido por

$$E_\alpha := \{u : |t|^{\frac{\alpha}{2}} u \in BC(\mathbb{R}; L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n))\},$$

então existe uma solução $u \in E_\alpha$ que satisfaz a equação integral (2) e é única em uma bola $B[0, 2\varepsilon] \subseteq E_\alpha$. Além disso, se (ϕ_n) é sequência de distribuições tal que $\|e^{it\Delta}(\phi_n - \phi)\|_\alpha \to 0$ quando $n \to \infty$ e u, u_n são as respectivas soluções com dados iniciais ϕ, ϕ_n, então $u_n \to u$ quando $n \to \infty$ em E_α.

Uma consequência do teorema de boa-colocação global é a existência de soluções *invariantes por scaling* ou *auto-similares*. Para entender isso melhor, primeiramente note que se u é solução de (1) então a aplicação u_μ (chamada *scaling* de u) definida por

$$u_\mu(t, x) := \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 t, \mu x), \quad \mu > 0,$$

é também solução. Dizemos então que uma solução u é auto-similar se

$$u(t, x) = u_\mu(t, x) \quad \forall \mu, t > 0, \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

i.e. u é invariante por *scaling*. Uma questão natural é : Existem soluções auto-similares? É de se esperar que soluções com essa propriedade especial não são provenientes de qualquer dado inicial ϕ. Primeiramente, veja que se u é uma solução auto-similar para o PVI (1), então o dado inicial satisfaz

$$\phi(x) = u(0, x) = u_\mu(0, x) = \mu^{\frac{2}{\rho}} u(0, \mu x) = \mu^{\frac{2}{\rho}} \phi(\mu x) \quad \forall \mu > 0, \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^n,$$

Logo, ϕ deve ser é uma função homogênea de grau $-\frac{2}{\rho}$. É importante observar que, em geral, tais funções homogêneas não pertencem aos espaços clássicos em que se faz boa colocação para os problemas de Cauchy em EDP. Por exemplo, estas funções não estão inclusas nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geqslant 0$. No que segue, garantiremos a existência de soluções auto-similares exatamente para dados iniciais $\phi = \phi(x)$ homogêneos de grau $-\frac{2}{\rho}$, isto é, que satisfazem

$$\phi(\mu x) = \mu^{-\frac{2}{\rho}} \phi(x) \quad \text{para todo } \mu > 0,$$

e tais que $\|e^{i\Delta}\phi\|_{L^{\rho+2,\infty}}$ é finita e suficientemente pequena. Para garantir a existência de tais dados, daremos aqui a prova que para a função homogênea particular $\phi(x) = |x|^{-p}$ com $0 < \mathrm{Re}(p) < n$ temos $\|e^{i\Delta}\phi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} < \infty$ para $r > \max\left\{\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}, \frac{n}{n - \mathrm{Re}(p)}\right\}$. Mais ainda, veremos que

$$\|e^{i\Delta}\phi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

, mesmo para funções homogêneas $\phi(x)$ da forma

$$\phi(x) = \frac{P_k(x)}{|x|^k} \cdot \frac{1}{|x|^p},$$

onde $0 < \mathrm{Re}(p) < n$, $P_k(x)$ é polinômio harmônico homogêneo de grau k e

$$r > \max\left\{\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}, \frac{n}{n-\mathrm{Re}(p)}\right\},$$

de forma que podemos aplicar o corolário também para dados iniciais dessa forma.

Outro aspecto muito importante relativo as soluções obtidas nos teoremas de boa colocação são as propriedades de decaimento para soluções locais e estabilidade assintótica para soluções globais. O decaimento das soluções locais quando $t \to 0$ é a propriedade de soluções estarem "próximas" tanto quanto se queira para valores de t suficientemente próximos da origem, desde que essa condição seja imposta sob os respectivos dados iniciais. Já a estabilidade assintótica de soluções globais é um comportamente que acontece quando $|t|$ cresce, i.e., desde que os dados iniciais sob a ação do grupo linear de Schrödinger $e^{it\Delta}$ estejam tão "próximos" quanto se queira quando $|t|$ é suficientemente grande, então o mesmo acontece com as respectivas soluções. Rigorosamente, apresentaremos no Teorema 5.1 que, sob as mesmas hipóteses do teorema de boa-colocação local, se u, v são soluções obtidas a partir dos dados ϕ, ψ respectivamente, com a hipótese que

$$\lim_{t\to 0} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|e^{it\Delta}(\phi-\psi)\|_{\rho+2,\infty} = 0,$$

onde $-\left[1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)\right] < h$, então

$$\lim_{t\to 0} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}.$$

Também, no Teorema 5.1 veremos que nas mesmas condições do teorema de boa-colocação global, se ϕ, ψ satisfazem

$$\lim_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\psi)\|_{\rho+2,\infty} = 0$$

onde $0 \leqslant h < 1-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)$, então

$$\lim_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0.$$

A existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial (1) no contexto de espaços de Sobolev H^s $(s \geqslant 0)$ tem sido muito estudado e já possui diversos artigos nesse sentido. Veja, por exemplo, [8],[9],[10] e [11]. Neste caso, as soluções e suas derivadas são ditas de *energia finita*, ou seja, a norma L^2 das destas é finita.

Um dos primeiros autores a fazer o estudo de existência e unicidade de soluções de energia infinita para o problema (1) foram Cazenave e Weissler em [6]. Neste trabalho eles consideraram o espaço

$$X_\rho := \left\{ u \in L^\infty_{loc}((0,\infty), L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n)) \ : \ \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{L^{\rho+2}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

onde

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\rho} - \frac{n}{2(\rho+2)}.$$

Para dados iniciais suficientemente pequenos, eles provaram a existência de soluções globais do problema (1) em X_ρ, para ρ satisfazendo

$$\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{n\rho}{2} < \rho + 2.$$

Um trabalho mais atual e que também faz abordagem de espaços relacionados com L^p-fraco, que são os espaços de Sobolev-Lorentz, é o paper de Vanessa B., Lucas C.F. Ferreira e Ademir Pastor (Veja [20]). Lá eles consideram um PVI da equação de Schrödinger não-linear com termo não-local da seguinte forma

$$\begin{cases} i\partial_t u + Lu = a|u|^\alpha + bE(|u|^\gamma)u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

onde a e b são constantes complexas, $0 < \alpha < \gamma$ são reais positivos, E é um operador linear não-local e limitado em $L^{p+2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ que comuta com derivadas fracionárias, e L é um operador linear definido em termos da sua transformada de Fourier como

$$(Lu)^\wedge(\xi) = q(\xi)\widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde q é função real e homogênia de grau d.

Observe que no caso particular em que L é o operador Laplaciano e b=0, então a equação considerada no problema (4) se reduz à equação

$$i\partial_t u + \Delta u = a|u|^\alpha,$$

que é a mesma equação considerada em (1).

Considerando para todo $s \in \mathbb{R}$ os operadores J^s e Λ^s dados por

$$J^s(f)(x) := \left\{ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \right\}^\vee (x), \qquad \Lambda^s(f)(x) := \left\{ |\xi|^s \widehat{f} \right\}^\vee (x),$$

os espaços de Sobolev-Lorentz homogêneos e não-homgêneos são definidos respectivamente por

$$\dot{H}^s_{p+2,\infty} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \ \|\Lambda^s(f)\|_{p+2,\infty} < \infty \right\},$$

$$H^s_{p+2,\infty} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \ \|J^s(f)\|_{p+2,\infty} < \infty \right\}.$$

Para s, β, δ e M positivos, eles consideraram os espaços $X_M = X_M(s, \beta, \delta)$ definidos por

$$X_M(s,\beta,\delta) := \left\{ u : (0,\infty) \to H^s_{\alpha+2,\alpha} \ : \ \|u\|_{(\beta)} \leqslant M, \ \|u\|_{(\delta,s)} \leqslant M \right\},$$

onde

$$\|u\|_{(\beta)} = \sup_{t>0} t^{\beta} \|u(t)\|_{\alpha+2,\infty}, \qquad \|u\|_{(\delta,s)} = \sup_{t>0} t^{\delta} \|\Lambda^s u(t)\|_{\alpha+2,\infty},$$

e provaram a existência e unicidade de soluções globais para (4) nos espaços X_M para α, γ tais que

$$0 < \max\{1, \alpha\} < \gamma, \qquad \frac{\alpha+2}{\alpha+1} < \frac{n\alpha}{2} < \alpha + 2,$$

s dado por

$$s = \frac{n(\gamma - \alpha)}{\gamma(\alpha+2)}$$

e satisfazendo $0 < s < 1$, β e δ positivos definidos por

$$\beta = \frac{1}{\alpha} - \frac{n}{d(\alpha+2)}, \qquad \delta = \frac{1}{\gamma} + \frac{s}{d} - \frac{n}{d(\alpha+2)},$$

e além disso, $\rho > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\rho + |a|C_1 M^{\alpha+1} + |b|C_2 M^{\gamma+1} \leqslant M$$

e

$$\rho + |a|C_3 M^{\alpha+1} + |b|C_4 M^{\gamma+1} \leqslant M,$$

para certas constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4, assumindo ainda que

$$|a|C_1 M^{\alpha} + |b|C_2 M^{\gamma} < 1.$$

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 são dadas algumas noções preliminares, definições e notações que irão aparecer de maneira recorrente no texto e que colaboram na leitura e entendimento do trabalho. Também são apresentados alguns resultados que ajudam nas demonstrações posteriores. No capítulo 2 são apresentados resultados mais específicos e técnicos relativos aos espaços abordados, que são os espaços de Lorentz, e também alguns resultados acerca do grupo linear de Schrödinger que se tornam naturalmente essenciais para os próximos capítulos. No capítulo 3 é feito o estudo das propriedades do grupo linear de Schrödinger sobre um dado homogênio. Investiga-se tanto a suavidade como decaimento para o grupo aplicado a este tipo especial de dado. No capítulo 4 começamos a apresentar os resultados principais deste trabalho, a saber, os teoremas de boa colocação local e global e corolários que garantem a existência de soluções invariantes por scalling. Por fim, no capítulo 5 apresentamos as propriedades satisfeitas pelas soluções obtidas nos teoremas de boa colocação, a saber, propriedades de decaimento e estabilidade assintótica.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas fatos básicos a fim de tornar o texto o mais auto-contido possível e também fixar notações que ocorrerão no decorrer do trabalho. Para um estudo aprofundado do conteúdo aqui exposto, sugerimos as seguintes referências : [2], [3], [5], [7], [12], [13], [14], [15], [22].

1.1 Espaços L^p

DEnotemos por (X, Σ, μ) um espaço de medida fixado. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$, definimos

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}},$$

(podendo acontecer de $\|f\|_p = +\infty$) e

$$L^p = L^p(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid \|f\|_p < +\infty\}.$$

No caso $p = \infty$ definimos

$$L^\infty = L^\infty(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

onde

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \geqslant 0 \mid \mu(\{x \in X \ \ |f(x)| > M\}) = 0\},$$

convencionando $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Observação 1.1. *Tal ínfimo acima é realizado, i.e.,* $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$. *Com efeito, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $M_n > 0$ *tal que* $\mu(\{x : |f(x)| > M_n\}) = 0$ *e* $M_n < \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$.

Seja então

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > M_n\}.$$

Segue que $\mu(A) = 0$. *Como obviamente* $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \subseteq A$, *então segue a afirmação. Assim, temos* $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ *q.t.p.*

Chamamos o valor $\|f\|_\infty$ *de* ***supremo essencial*** *de* $|f|$ *e também escrevemos*

$$\operatorname*{ess\,sup}_X |f| = \|f\|_\infty.$$

Quando não há risco de confusão denotamos $L^p(X, \Sigma, \mu)$ simplismente por $L^p(X)$, $L^p(\mu)$ ou L^p. Se $\|f\|_p = 0$ então $f = 0$ q.t.p. Por tal motivo, indentificamos as funções em L^p que são iguais q.t.p.

Se $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é mensurável e $|f|^p$ é integrável então f é finita q.t.p. Neste caso podemos supor $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Assim, $f \in L^p(\mu)$.

O conjunto de funções L^p é um espaço vetorial complexo. Veremos que, no caso $p \geqslant 1$, a função $\|\cdot\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular (Desigualdade de Minkowski) e define uma norma em L^p.

Dada $f : X \to \mathbb{C}$, temos que $f \in L^p$ se, e somente se, $(\operatorname{Re} f)^+, (\operatorname{Re} f)^-, (\operatorname{Im} f)^+, (\operatorname{Im} f)^- \in L^p$.

Nesta secção todas as funções são mensuráveis.

Definição 1.1. *Dois valores* p *e* p' *são expoentes conjugados se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 < p, p' < \infty.$$

Convencionamos $p' = \infty$ *se* $p = 1$ *e, vice-versa,* $p' = 1$ *se* $p = \infty$.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* p, p' *expoentes conjugados (finitos ou não). Dadas* f, g *funções mensuráveis temos*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Em particular, se $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *então* $fg \in L^1$ *e , sob tais condições, vale a igualdade na desigualdade acima se, e só se,*

- *existem* $\alpha, \beta \geqslant 0$, *não ambos nulos, com* $\alpha|f|^p = \beta|g|^{p'}$ *q.t.p* (p, p' *finitos);*
- $|fg| = |f|\|g\|_\infty$ *q.t.p* ($p = 1$, $p' = \infty$).

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Seja* $p \in [1, \infty]$. *Então*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Vide [5] □

Observação 1.2. *As seguintes condições são necessárias e suficientes para a igualdade na desigualdade de Minkowski.*

- *Caso* $p = 1$*:* $|f + g| = |f| + |g|$ *q.t.p ;*

- *Caso* $1 < p < \infty$*: Existe uma constante* $\lambda \geqslant 0$ *tal que* $f = \lambda g$ *q.t.p ;*

- *Caso* $p = \infty$*: Se* $f = \lambda g$ *q.t.p para alguma constante* $\lambda \geqslant 0$*, então*

  $$\|f + g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

  No entanto, tal igualdade não implica em nenhuma condição análoga às encontradas no caso $p = 1$ *e* $1 < p < \infty$.

Teorema 1.3. *Seja* $p \in [1, \infty]$. *Então,* L^p *é espaço de Banach.*

Demonstração. Vide [5]. □

Definição 1.2. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Uma função* $f : X \to \mathbb{C}$ *é dita* **simples** *se o conjunto* $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ *é finito. Se* $f(X) = \{a_1, \ldots, a_k\}$*, então a representação padrão de* f *é definida por*

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}_{A_j}, \tag{1.1}$$

onde $A_j = f^{-1}(a_j)$ *para todo* $1 \leqslant j \leqslant k$. *Se além disso temos* $\mu(A_j) < \infty$ *para todo* $1 \leqslant j \leqslant k$*, então* f *é dita* **finitamente simples**.

Proposição 1.1 (Densidade das funções simples em L^p). *Seja* $p \in [1, \infty]$.

a) Se $p < \infty$*, então o conjunto das funções finitamente simples*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}, \quad com \quad \mu(E_j) < \infty,$$

é denso em L^p.

b) Se $p = \infty$*, então o conjunto das funções simples é denso em* L^∞*.*

Demonstração. Vide [5]. □

Veremos agora a teoria de dualidade dos espaços L^p. Sejam p, q expoentes conjugados. Pela desigualdade de Hölder, a cada $g \in L^q$ corresponde um funcional linear contínuo $\phi_g : L^p \to \mathbb{C}$ dado por

$$\phi_g(f) = \int_X fg d\mu \qquad \forall f \in L^p,$$

e a norma do funcional ϕ_g é no máximo $\|g\|_q$. No caso específico $p = 2$, é fácil ver que L^2 é um espaço de Hilbert munido com o produto interno dado por

$$\phi, \psi \in L^2 \mapsto \langle \phi, \psi \rangle = \int_X \phi\overline{\psi} d\mu.$$

E então é mais apropriado definir

$$\phi_g(f) = \int f\overline{g} d\mu.$$

Na verdade, a aplicação $g \mapsto \phi_g$ é uma isometria de L^q em $(L^p)^*$.

Proposição 1.2 (A norma do funcional ϕ_g)**.** *Sejam* p *e* q *expoentes conjugados, com* $1 \leqslant q < \infty$*. Dada* $g \in L^q$*, temos*

$$\|g\|_q = \|\phi_g\| = \sup_{\|f\|_p = 1} \left| \int fg d\mu \right|.$$

Além disso, se μ *é semi-finita, i.e, para todo* A *mensurável tal que* $\mu(A) = \infty$ *existe* $B \subseteq A$ *tal que* $0 < \mu(B) < \infty$*, então o resultado é valido também para* $q = \infty$*.*

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.4 (A isometria entre $(L^p)^*$ e $L^{p'}$)**.** *Sejam* (X, μ) *um espaço de medida e* p, q *expoentes conjugados, com* p *finito.*

a) Suponhamos $p \neq 1$*. Para cada* $\Psi \in (L^p)^*$ *existe* $g \in L^q$ *satisfazendo*

$$\Psi(f) = \int fg d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

A aplicação $\Phi : L^q \to (L^p)^*$*, onde* $\Phi(g) = \phi_g$*, é uma isometria sobrejetora.*

b) Se $p = 1$*, valem conclusões análogas ao item a) no caso em que* μ *é* $\sigma-$*finita.*

Demonstração. Vide [5]. □

As desigualdades dos espaços L^p são artifícios muito úteis em análise. Seguem aqui, além das desigualdades de Hölder e Minkowski, outras desigualdades interessantes e úteis acerca dessses espaços.

Proposição 1.3 (Desigualdade de Chebyshev)**.** *Seja* $f \in L^p$*, com* $0 < p < \infty$ *e* $\alpha > 0$*. Então,*

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leqslant \alpha^{-p} \|f\|_p^p.$$

Demonstração. De fato, se $[|f| > \alpha] = \{x : |f(x)| > \alpha\}$ então

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) = \int_{[|f|>\alpha]} d\mu = \alpha^{-p} \int_{[|f|>\alpha]} \alpha^p d\mu \leqslant \alpha^{-p} \|f\|_p^p.$$

□

A desigualdade que segue é um análogo a desigualdade de Minkowski para somas vista anteriomente, só que agora para somas infinitas, isto é, para integrais.

Teorema 1.5 (Minkowski para Integrais)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *dois espaços de medidas* σ*-finitas e seja* f *uma função* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*-mensurável no espaço produdo* $X \times Y$*.*

(a) Seja $p \in [1, \infty)$*. Se* $f \geqslant 0$ *então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p \mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

(b) Seja $p \in [1, \infty]$*. Suponha que* $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ *é integrável. Então*

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

é finita q.t.p em X*, mensurável e vale que*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leqslant \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y) < \infty.$$

Demonstração. Vide [5]. □

1.2 Espaços de Lorentz

Seja f uma função mensurável em um espaço de medida (X, μ). Definimos sua *distribuição* como a função decrescente $d_f : [0, \infty) \to [0, +\infty]$ dada por

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}). \tag{1.2}$$

Agora, vamos introduzir uma outra função f^* em $[0, \infty)$ que é decrescente e equidistribuída com f, ou seja,

$$d_f(\alpha) = d_{f^*}(\alpha)$$

para todo $\alpha \geqslant 0$.

Definição 1.3. *Seja* f *uma função a valores complexos definida em* X. *O* rearranjo decrescente *de* f *é a função* f^* *definida em* $[0, \infty)$ *por*

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(\alpha) \leqslant t\}, \tag{1.3}$$

onde convencionamos que $\inf \emptyset = \infty$. *Observe que* $\mathrm{supp}(f^*) \subseteq [0, \mu(X)]$.

Exemplo 1.1. *Considere a função simples*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathcal{X}_{E_j},$$

onde os E_j *são conjuntos disjuntos de medida finita e* $\alpha_1 > \ldots \alpha_N > 0$. *Não é difícil ver que*

$$d_f(\alpha) = \sum_{j=0}^{N} B_j \mathcal{X}_{[\alpha_{j+1}, \alpha_j)},$$

onde

$$B_j = \sum_{k=1}^{j} \mu(E_k),$$

e $\alpha_{N+1} = 0 = B_0$, $\alpha_0 = \infty$. *Observe que se* $B_0 \leqslant t < B_1$ *então o menor* $s > 0$ *tal que* $d_f(s) \leqslant t$ *é* α_1. *Analogamente, se* $B_1 \leqslant t < B_2$ *então o menor* $s > 0$ *satisfazendo* $d_f(s) \leqslant t$ *é* α_2. *Seguindo dessa forma, vemos que*

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mathcal{X}_{[B_{j-1}, B_j)}.$$

Para $N = 3$ *temos gráficamente:*

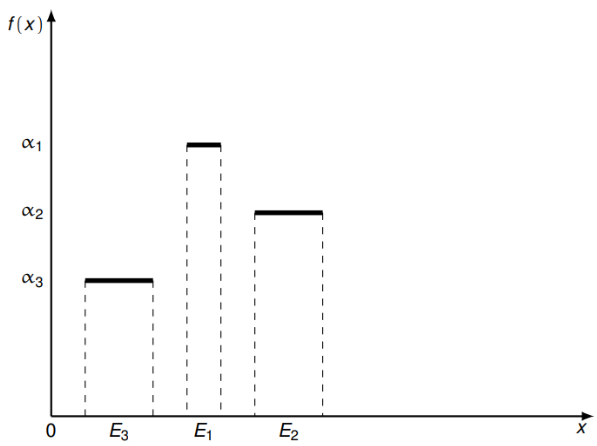

Figura: Gráfico da função f

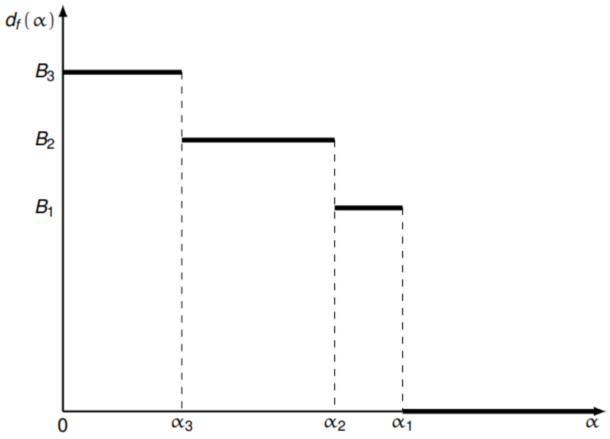

Figura: Gráfico da distribuição d_f

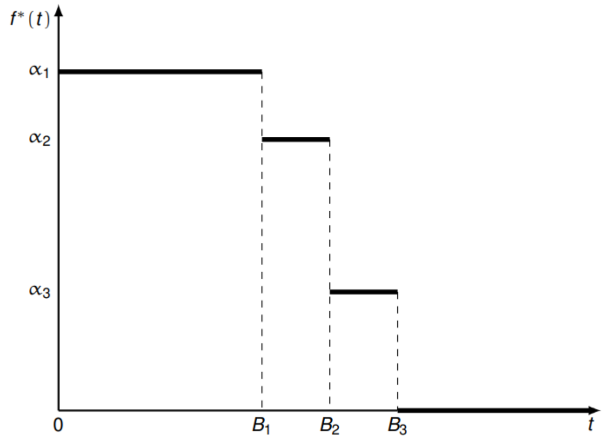

Figura: Gráfico do rearranjo f^*

Temos as seguintes propriedades para a função f^*.

Proposição 1.4. *Para* f, g, f_n μ*-mensuráveis,* $k \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant t, s, t_1, t_2$, *temos:*

1. $f^*(d_f(\alpha)) \leqslant \alpha$ *para todo* $\alpha > 0$.
2. $d_f(f^*(t)) \leqslant t$.
3. $|g| \leqslant |f|$ μ*-q.s. implica em* $g^* \leqslant f^*$ *e* $(|f|)^* = f^*$.
4. $(kf)^* = |k|f^*$.
5. $(f+g)(t_1+t_2) \leqslant f^*(t_1) + f^*(t_2)$.
6. $(f \cdot g)^*(t_1+t_2) \leqslant f^*(t_1)g^*(t_2)$.
7. $|f_n| \uparrow |f|$ μ*-q.s. implica em* $f_n^* \uparrow f$.
8. $|f| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ*-q.s. implica em* $f^* \leqslant \liminf_{n\to\infty} f_n^*$.
9. f^* *é contínua a direita em* $[0, \infty)$.
10. $d_f = d_{f^*}$.
11. $(|f|^p)^* = (f^*)^p$ *quando* $0 < p < \infty$.
12. $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p dt$ *quando* $0 < p < \infty$.
13. $f^*(0) = \|f\|_\infty$.
14. $\sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha (d_f(\alpha))^q$ *para* $0 < q < \infty$.

Demonstração. Vide [13]. □

Agora procedemos com a definição dos espaços de Lorentz.

Definição 1.4. *Dada* f *uma função mensurável em um espaço de medida* (X, μ) *e* $0 < p, q \leqslant \infty$*, definimos*

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \dfrac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ se } q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), \text{ se } q = \infty. \end{cases}$$

O conjunto de todas as f *tais que* $\|f\|^*_{L^{p,q}} < \infty$ *é denotado por* $L^{p,q}(X, \mu)$ *e é chamado o* espaço de Lorentz *de índices* p *e* q*. Denotamos também* $\| \cdot \|^*_{L^{p,q}}$ *por* $\| \cdot \|^*_{p,q}$*.*

Os espaços $L^{p,\infty}(X, \mu)$ com $0 < p \leqslant \infty$ são chamados de *espaços* L^p*-fraco.* A seguinte proposição deixa evidente o porque dessa designação.

Proposição 1.5. $L^p(X, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(X, \mu)$ *para todo* $0 < p \leqslant \infty$*, e vale que*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leqslant \|f\|_{L^p}. \tag{1.4}$$

Demonstração. Segue diretamente da desigualdade de Chebyshev (Proposição 1.3) e (14) da Proposição 1.4. □

Agora, vejamos um exemplo garantindo que em geral não vale $L^{p,\infty} \subseteq L^p$.

Exemplo 1.2. *Seja* $f(x) = |x|^{-b}$ *em* $\mathbb{R}^n$*,* $b > 0$*. Obviamente* $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Além disso, para todo* $0 < p < \infty$ *temos*

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp} dx = n\nu_n \int_0^\infty r^{-bp+n-1} dr = \infty,$$

onde ν_n *é a medida da bola unitária em* $\mathbb{R}^n$*. Portanto* $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ *seja qual for* $0 < p \leqslant \infty$*. Por outo lado, é fácil ver que*

$$d_f(t) = \nu_n t^{-\frac{n}{b}}.$$

Logo, para $0 < p < \infty$ *temos*

$$\sup_{t>0} t^p d_f(t) = \sup_{t>0} \nu_n t^{p-\frac{n}{b}} < \infty$$

se, e só se, $b = \frac{n}{p}$*. Assim , temos* $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *para* $b = \frac{n}{p}$*.*

As funções em $L^{p,q}(X,\mu)$ são consideradas iguais se são iguais μ-quase sempre. Pela definição anterior é fácil ver que $L^{\infty,\infty} = L^{\infty}$ e $L^{p,p} = L^{p}$.

Observação 1.3. *Para* $0 < p, r < \infty$ *e* $0 < q \leqslant \infty$ *temos que*

$$\||g|^r\|^*_{L^{p,q}} = (\|g\|^*_{L^{pr,qr}})^r. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.3. *Com as notações do exemplo 1.1, temos que para* $0 < p, q < \infty$

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\alpha_1^q B_1^{\frac{q}{p}} + \alpha_2^q (B_2^{\frac{q}{p}} - B_1^{\frac{q}{p}}) + \ldots + \alpha_N (B_N^{\frac{q}{p}} - B_{N-1}^{\frac{q}{p}})\right]^{\frac{1}{q}},$$

e também

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{1\leqslant j\leqslant N} B_j^{\frac{1}{p}} \alpha_j.$$

Usando os argumentos anteriores e calculando a norma $\|f\|^*_{L^{\infty,q}}$, $0 < q < \infty$, *da função simples* f, *vemos que esta é finita se, e só se,* $f = 0$. *Logo, pode-se concluir que* $L^{\infty,q}(X,\mu) = \{0\}$ *para* $q < \infty$.

Infelizmente os funcionais $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ não satisfazem a desigualdade triângular, e então, não são normas. Porém dadas $f, g \in L^{p,q}(X,\mu)$, usando a Proposição 1.4, temos que

$$(f+g)^*(t) \leqslant f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right),$$

e com isso, pode-se obter que

$$\|f+g\|^*_{L^{p,q}} \leqslant c_{p,q}(\|f\|^*_{L^{p,q}} + \|g\|^*_{L^{p,q}}),$$

onde $c_{p,q} = 2^{\frac{1}{p}} \max(1, 2^{\frac{1-q}{q}})$. Também, $\|c\cdot f\|^*_{L^{p,q}} = |c|\|f\|^*_{L^{p,q}}$ para todo $c \in \mathbb{C}$, e $\|f\|^*_{L^{p,q}} = 0$ implica em $f = 0$ μ-q.s. Portanto, $L^{p,q}(X,\mu)$ é um espaço quasi-normado para $0 < p, q \leqslant \infty$. Além disso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.6. *Seja* (X,μ) *um espaço de medida. Então, para* $0 < p, q \leqslant \infty$, *os espaços* $L^{p,q}(X,\mu)$ *são completos com respeito a sua quasi-norma, e portanto, eles são espaços quasi-Banach.*

Demonstração. Vide [13]. □

A proposição que demonstraremos adiante garante que os espaços $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ são normáveis para certos valores de p e q, i.e, podemos introduzir uma norma em $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ equivalente a quasi-norma $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ a qual os torna espaços normados. Mas antes, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 1.1 (Vide [4]). *Seja* (X, μ) *espaço de medida. Dada* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável defina a função* f^{**} *por*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds. \tag{1.6}$$

para todo $t > 0$. *Então,* f^{**} *é não-negativa, não-crescente, e, se* $f = f_1 + f_2$, *para* f_1, f_2 *mensuráveis, satifaz*

$$f^{**}(t) \leqslant f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t) \tag{1.7}$$

para todo $t > 0$.

Proposição 1.6. *Dados* $1 < p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty$, *defina*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{p,q} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q \dfrac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & \textit{se } 1 < p < \infty,\ q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & \textit{se } 1 < p \leqslant \infty,\ q = \infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Então, $(L^{p,q}(X, \mu), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ *é espaço normado com norma equivalente a quasi-norma* $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$, *a saber*

$$\|\cdot\|^*_{L^{p,q}} \leqslant \|\cdot\|_{L^{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}. \tag{1.9}$$

Demonstração. Veja primeiramente que

$$f^*(t) \leqslant f^{**}(t) \tag{1.10}$$

para todo $t > 0$. De fato, temos que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geqslant \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)ds = f^*(t).$$

Agora, sejam $f, g \in L^{p,q}$ e $k \in \mathbb{C}$. Se $1 < p < \infty$, $q < \infty$, temos:

1. Se $f = 0$ q.t.p, então $f^{**} = 0$, e logo, $\|f\|_{p,q} = 0$. Agora, se $\|f\|_{p,q} = 0$, como (pelo Lema 1.1) f^{**} é não-crescente e não-negativa, então

$$0 = \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \geqslant \int_0^x [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \geqslant f^{**}(x)^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}dt = f^{**}(x)^q x^{\frac{q}{p}} \frac{p}{q}$$

para todo $x > 0$. Logo, $f^{**} = 0$, e daí, $f^* = 0$. Com mais razão, $f = 0$ q.t.p.

2. Temos que

$$(kf)^{**} = \frac{1}{t}\int_0^t (kf)^*(s)ds = \frac{|k|}{t}\int_0^t f^*(s)ds = |k| f^{**}(t),$$

e assim, $\|kf\|_{p,q} = |k|\|f\|_{p,q}$.

3. Usando o Lema 1.1 e o fato de $1 \leqslant q$ (neste caso $L^q(0,\infty)$ é normado), temos que

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^{**}(t)]^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^{**}\|_{L^q(0,\infty)} \\
&\leqslant \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^{**} + t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^{**}\|_{L^q(0,\infty)} \\
&\leqslant \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^{**}\|_{L^q(0,\infty)} + \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^{**}\|_{L^q(0,\infty)} \\
&= \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}.
\end{aligned}
$$

Considere agora $1 < p \leqslant \infty$, $q = \infty$, e veja que:

1. $\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = 0 \Leftrightarrow f^{**} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.s.

2. É obvio que $\|kf\|_{p,\infty} = k\|f\|_{p,\infty}$.

3. Usando novamente o Lema 1.1, temos

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{*}(t) &\leqslant \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f^{**}(t) + g^{**}(t)) \\
&\leqslant \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
&= \|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}.
\end{aligned}
$$

Segue que, de fato, $\|\cdot\|_{p,q}$ define norma em $L^{p,q}$. Além disso, como por (1.10) temos $f^* \leqslant f^{**}$, então

$$
\|f\|^*_{p,q} \leqslant \|f\|_{p,q}, \quad f \in L^{p,q}.
$$

Por outro lado, para $1 < p \leqslant \infty$ e $q = \infty$ temos

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) &= \sup_{t>0} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t} \int_0^t f^*(s)ds \\
&= \sup_{t>0} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t} \int_0^t s^{\frac{1}{p}} f^*(s) s^{-\frac{1}{p}} ds \\
&\leqslant \|f\|^*_{p,q} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} ds \\
&= \|f\|^*_{p,q} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{p-1} t^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{p,q}.
\end{aligned}
$$

Também, para $1 < p < \infty$ e $1 \leqslant q < \infty$, pela desigualdade de Hardy, fato que veremos posteriormente (Lema 2.3), temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty \left[\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{p,q}.
\end{aligned}$$

E segue as desigualdades em (1.9). □

Observação 1.4. *Com notação análoga à da proposição 1.6 acima, para toda* f *mensurável em* X*, temos*

$$\|f\|_{1,\infty} := \sup_{t>0} tf^{**}(t) = \sup_{t>0}\int_0^t f^*(s)ds = \int_0^\infty f(s)ds = \|f^*\|_{L^1(0,\infty)} = \|f\|_1, \tag{1.11}$$

ou seja,

$$\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_1.$$

Portanto, $(L^{1,\infty}(X,\mu), \|\cdot\|_{1,\infty})$ *é também espaço normado, mas é próprio espaço* $L^1(X,\mu)$*.*

Corolário 1.1. *Seja* (X,μ) *espaço de medida. Então* $(L^{p,q}(X\mu), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ *é espaço de Banach para* $1 < p < \infty$ *se* $1 \leqslant q < \infty$*, e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *se* $q = \infty$*.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.6 e da Proposição 1.6. □

É sabido que as funções finitamente simples são densas em $L^p(X,\mu)$ para $0 < p < \infty$. Temos um resultado similar para espaços de Lorentz, a saber:

Teorema 1.7. *Funções finitamente simples são densas em* $L^{p,q}(X,\mu)$ *quando* $0 < q < \infty$*.*

Observação 1.5. *É falso que as funções simples são densas em* $L^{p,\infty}$ *seja qual for* $0 < p \leqslant \infty$*. Por outro lado, combinações lineares enumeráveis de funções características de conjuntos de medida finita são densas em* $L^{p,\infty}(X,\mu)$*.*

1.3 A Transformada de Fourier

Nesta seção vamos abordar algumas propriedades básicas da transformada de Fourier e das distribuições temperadas.

1.3.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.5. *A transformada de Fourier de uma função* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, denotada por* $\widehat{f}$*, é definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

onde $\xi \cdot x = \xi_1 \cdot x_1 + \ldots + \xi_n \cdot x_n$.

O seguinte teorema (vide [12]) estabelece algumas propriedades básicas da transformada em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.8. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Então:*

1. $f \to \widehat{f}$ *define uma transformação linear de* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*, com*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1. \tag{1.13}$$

2. $\widehat{f}$ *é contínua.*

3. $\widehat{f}(\xi) \to 0$ *quando* $|\xi| \to \infty$ *(Lema de Riemann-Lebesgue).*

4. *Se* $t_h f(x) = f(x - h)$ *denota a tranlação por h, então*

$$\widehat{(t_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i (h \cdot \xi)} f(\xi), \ \textit{e} \tag{1.14}$$

$$\tag{1.15}$$

$$(t_{-h}\widehat{f})(\xi) = (\widehat{e^{-2\pi i (h \cdot x)} f})(\xi). \tag{1.16}$$

5. *Se* $(\delta_a f)(x) = f(ax)$ *denota uma dilatação por* $a > 0$*, então*

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(a^{-1}\xi). \tag{1.17}$$

6. *Sejam* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $f * g$ *a convolução de* f *e* g*. Então*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi). \tag{1.18}$$

7. *Seja* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy. \tag{1.19}$$

Exemplo 1.4. *Seja* $n \geqslant 1$ *e seja* $f(x) = e^{-4\pi^2 t|x|^2}$ *com* $t > 0$*. Veja que para* $t = 1$*, temos pelo teorema de Fubini*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx &= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2 - 2\pi i \xi_j x_j} dx_j \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2 - 2\pi i \xi_j x_j + \frac{\xi_j^2}{4}} dx_j \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j + i\frac{\xi_j}{2})^2} dx_j \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j)^2} dx_j \\
&= e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \prod_{j=1}^{n} 2^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}} \\
&= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}},
\end{aligned}$$

onde usamos a identidade de integração complexa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j + i\frac{\xi_j}{2})^2} dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j)^2} dx_j = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

No caso geral em que $t > 0$ *é qualquer, temos*

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 t|x|^2} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx &\overset{(u=\frac{x}{\sqrt{t}})}{=} t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|u|^2} e^{-2\pi i \sqrt{t}\xi \cdot x} dx \\
&= t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\sqrt{t}\xi|^2}{4}} \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Além disso, fazendo a mudança de variáveis $t \to 1/16\pi^2 t$*, obtemos que*

$$\left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right]^{\wedge}(\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}.$$

Uma das mais importantes características da transformada de Fourier é sua relação com a derivação. Veremos essa relação nos resultados a seguir.

Proposição 1.7 (Veja [12])**.** *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, onde* x_k *denota a* k*-ésima coordenada de* x*. Então* $\widehat{f}$ *é diferenciável com respeito a* x_k*, e vale*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_k}(\xi) = (-2\pi i x_k f)^{\wedge}(\xi). \tag{1.20}$$

A fim de considerar o resultado inverso ao anterior precisamos da seguinte definição.

Definição 1.6. *Uma função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *é diferenciável em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *com respeito a* k-*ésima variável se existe* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x + te_k) - f(x)}{t} - g(x) \right|^p dx \to 0, \qquad \text{quando } t \to 0,$$

onde e_k *tem 1 na* k-*ésima coordenada e* 0 *nas demais. Se tal função* g *existe, então ela é chamada de derivada parcial de* f *com respeito a* k-*ésima coordenada na norma* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.9. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e seja* g *sua derivada parcial com respeito a* k-*ésima coordenada na norma* $L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$.

Demonstração. Vide [12]. □

A partir dos resultados anteriores temos as seguintes relações

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \tag{1.21}$$

$$(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f)^\wedge(\xi), \tag{1.22}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é multi-índice e temos

$$|\alpha| = \sum_j \alpha_j, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{e}$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Mais geralmente, se

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} C_\alpha x^\alpha$$

é um polinômio em $\mathbb{R}^n$, então

$$(P(D)f)^\wedge(\xi) = P(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi) \tag{1.23}$$

$$\left(P(D)\widehat{f}\right)(\xi) = (P(-2\pi i \cdot)f)^\wedge(\xi), \tag{1.24}$$

onde $P(D)$ é o operador diferencial definido por

$$P(D) := \sum_{|\alpha| \leqslant k} C_\alpha \partial^\alpha.$$

1.3.2 A Tranformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Para definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ será utilizado que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.10 (Plancherel)**.** *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$*. Então* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \tag{1.25}$$

Demonstração. Vide [12]. □

O teorema acima mostra que a transformada de Fourier define uma isometria de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por densidade, segue que a transformada possui uma única extensão $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}$ é chamada de transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e denotamos ainda $\mathcal{F}(\varphi) = \widehat{\varphi}$.

Teorema 1.11. *A transformada de Fourier define um operador unitário em* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração. Pela identidade de Plancherel (Teorema 1.10) a transformada é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e portanto, $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ é subespaço fechado de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que seja subespaço próprio. Então, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Pela identidade (1.19) segue então que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = 0 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Portando, $\widehat{g} = 0$ q.t.p. Logo, $\|g\|_2 = \|\widehat{g}\|_2 = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$, e logo, $\mathcal{F}$ é bijeção. □

Teorema 1.12. *A inversa da transformada de Fourier* $\mathcal{F}^{-1}$ *pode ser definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = \mathcal{F} f(-x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.26}$$

Demonstração. Vide [12]. □

1.3.3 Distribuições Temperadas

Vimos que a transformada de Fourier está bem-definida em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, possui uma extensão natural a $L^1(\mathbb{R}^n)+L^2(\mathbb{R}^n)$. Daí, como $L^p(\mathbb{R}^n)\subseteq L^1(\mathbb{R}^n)+L^2(\mathbb{R}^n)$ para $1\leqslant p\leqslant 2$, então a tranformada está bem-definida em $L^p(\mathbb{R}^n)$ neste caso. Veremos que para $p>2$ qualquer função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ possui transformada no sentido distribucional. Contudo, elas podem nao ser funções, mas *distribuições temperadas.*

Vamos introduzir primeiro a seguinte família de seminormas. Para cada $(\nu,\beta)\in(\mathbb{Z}^+)^{2n}$ seja

$$|||f|||_{(\nu,\beta)} := \|x^{\nu}\partial_x^{\beta} f\|_{\infty}.$$

Definimos agora o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ como o espaço das funções $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ decaindo rápido no infinito, i.e.,

$$S(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n): |||f|||_{(\nu,\beta)}<\infty \quad \forall(\nu,\beta)\in(\mathbb{Z}^+)^{2n}\}.$$

A topologia em $S(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de seminormas $|||\cdot|||_{(\nu,\beta)}$, $(\nu,\beta)\in(\mathbb{Z}^+)^{2n}$. Obviamente $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)\subseteq S(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $S(\mathbb{R}^n)\subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $0<p\leqslant\infty$. Com efeito, segue diretamente se $p=\infty$. Suponha $0<p<\infty$ e seja $f\in S(\mathbb{R}^n)$. Daí, fixe $b>0$ tal que

$$M:=\int_{|x|>1}\frac{1}{|x|^{bp}}dx<\infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx &= \int_{|x|\leqslant 1}|f(x)|^p\,dx+\int_{|x|>1}(|x|^b|f(x)|)^p\cdot\frac{1}{|x|^{bp}}dx\\ &\leqslant C_1\|f\|_{\infty}^p + M\||\cdot|^b f\|_{\infty}^p<\infty. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Definição 1.7. *Seja* $(\varphi_j)\subseteq S(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\varphi_j\to 0$ *em* $S(\mathbb{R}^n)$ *quando* $j\to\infty$ *se para qualquer* $(\nu,\beta)\in(\mathbb{Z}^+)^{2n}$ *tem-se*

$$|||\varphi_j|||_{(\nu,\beta)}\to 0$$

quando $j\to\infty$.

Note que a desigualdade (1.27) nos garante também que se $\varphi_j\to 0$ em $S(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi_j\to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

A relação entre a transformada de Fourier e as funções do espaço de Schwartz é descrita nas fórmulas (1.21) e (1.22). Mais precisamente, temos o resultado.

Teorema 1.13 (Veja [12]). *A aplicação* $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ *é um isomorfismo de* $S(\mathbb{R}^n)$ *nele mesmo.*

Por dualidade, podemos definir as distribuições temperadas.

Definição 1.8. *Dizemos que* $\psi : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *define uma distribuição temperada, i.e.,* $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ *se:*

1. ψ *é linear.*

2. ψ *é contínua, ou seja, dada qualquer sequência* $(\varphi_j) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\varphi_j \to 0$ *em* $S(\mathbb{R}^n)$ *quando* $j \to \infty$*, temos* $\psi(\varphi_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$.

Pela desigualdade de Hölder é fácil ver que toda função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, define uma distribuição temperada ψ_f dada por

$$\psi_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.28}$$

Mais ainda, se f é localmente integrável e de crescimento polinomial no infinito então define uma distribuição temperada pela fórmula acima.

Diferentemente de funções, as distribuições temperadas sempre admitem tanto transformada de Fourier como derivações de qualquer ordem. A saber temos as seguintes definições.

Definição 1.9. *Dada* $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ *sua transformada de Fourier* $\widehat{\psi} \in S'(\mathbb{R}^n)$ *é definida por*

$$\widehat{\psi}(\varphi) = \psi(\widehat{\varphi}), \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.29}$$

Definição 1.10. *Seja* $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ *e* α *um multi-índice. Definimos a derivada de* ψ *de ordem* α *por* $\partial^\alpha \psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\langle \partial^\alpha \psi, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \psi, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.30}$$

Exemplo 1.5. *Seja* $f(x) \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$*, e* δ_0 *a função* delta de Dirac *centrada na origem, i.e,*

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \textit{se } x = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Temos que para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{1}(\varphi) = 1(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)dx = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x)\varphi(x)dx = \delta_0(\varphi).$$

Portanto, $\widehat{1} = \delta_0$*. Não é difícil ver também que* $\widehat{\delta_0} = 1$.

Definição 1.11. *Sejam* $(\psi_j) \subseteq S'(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\psi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *em* $S'(\mathbb{R}^n)$ *se para qualquer* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *temos que* $\psi_j(\varphi) \to 0$ *quando* $j \to \infty$.

Teorema 1.14 (Veja [12]). *A aplicação* $\mathcal{F} : \psi \mapsto \widehat{\psi}$ *é um isomorfismo de* $S'(\mathbb{R}^n)$ *nele mesmo.*

Proposição 1.8 (Veja [12]). *Seja* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$. *Defina*

$$(\psi * \varphi)(x) := \psi(\varphi(x - \cdot)). \tag{1.32}$$

Então

$$\psi * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap S'(\mathbb{R}^n)$$

e vale

$$\widehat{\psi * \varphi} = \widehat{\psi}\widehat{\varphi}, \tag{1.33}$$

onde $(\widehat{\psi}\widehat{\varphi})(h) = \widehat{\psi}(\widehat{\varphi}h)$ *para toda* $h \in S(\mathbb{R}^n)$.

1.4 A Equação de Schrödinger Linear

Nesta seção iremos explorar algumas propriedades das soluções da equação de Schrödinger linear homogênea, a saber

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{1.34}$$

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{1.35}$$

Formalmente, aplicando a transformada de Fourier em ambos lados da equação em (1.35), obtemos a EDO

$$i\frac{d}{dt}\widehat{u}(t, \xi) - 4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(t, \xi) = 0,$$

sujeita a condição inicial $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$. Pela teoria das equações diferenciais ordinárias, sabemos que $\widehat{u}(t, \xi)$ tem a forma

$$\widehat{u}(t, \xi) = Ce^{-4\pi^2 it|\xi|^2},$$

para alguma constante C. Impondo então a condição inicial, obtemos

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi) \quad t \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por fim, aplicando a transformada inversa a equação acima, temos que

$$u(t,x) = (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi})^{\vee}(x) \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.36}$$

Introduzimos então a notação

$$e^{it\Delta}\varphi := (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi})^{\vee}, \tag{1.37}$$

e chamaremos a família de operadores $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ de *grupo linear de Schrödinger.* Veja ainda que pelas propriedades de convolução

$$e^{it\Delta}\varphi = (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi})^{\vee} = (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2})^{\vee} * \varphi = \left[(4\pi it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|\cdot|^2}{4it}}\right] * \varphi,$$

i.e.,

$$e^{it\Delta}\varphi = \left[(4\pi it)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|\cdot|^2}{4it}}\right] * \varphi. \tag{1.38}$$

que definimos como a solução do PVI (1.35).

Proposição 1.9 (Vide [12])**.** *Se* $u(x,t)$ *é solução de* (1.34)*, então*

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= e^{i\theta}u(t,x), \quad \theta \in \mathbb{R} \textit{ fixado},\\
u_2(x,t) &= u(x-x_0, t-t_0), \quad \textit{com } x_0 \in \mathbb{R}^n,\ t_0 \in \mathbb{R} \textit{ fixados},\\
u_3(x,t) &= u(Ax,t), \quad \textit{com } A \textit{ matriz ortogonal } n \times n,\\
u_4(x,t) &= u(x-2x_0t, t)e^{i(x\cdot x_0 - |x_0|^2 t)}, \quad \textit{com } x_0 \in \mathbb{R}^n \textit{ fixado},\\
u_5(x,t) &= \lambda^{\frac{n}{2}}u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \textit{ fixado},\\
u_6(x,t) &= \frac{1}{(\alpha+\omega)^{\frac{n}{2}}}\exp\left[\frac{i\omega|x|^2}{4(\alpha+\omega t)}\right] u\left(\frac{x}{\alpha+\omega t}, \frac{\gamma+\theta t}{\alpha+\omega t}\right)\\
u_7(x,t) &= \overline{u(x,-t)},
\end{aligned}$$

são também soluções de (1.34)*.*

Observação 1.6. *Na Proposição 1.9, a propriedade descrita por* u_4 *é conhecida como invariância galileana, a descrita por* u_5 *chama-se propriedade de escala ou scaling, enquanto que a propriedade descrita por* u_6 *é conhecida como invariância pseudo conforme.*

As seguintes propriedades da família de operadores $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ justificam a fórmula exponencial utilizada em (1.37) para denotar as soluções do PVI (1.35).

Proposição 1.10.

1. *Para todo* $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta} : L^2(R^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *é uma isometria, e logo,*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2 \quad \forall \varphi \in L^2((R)^n).$$

3. $e^{i0\Delta} = 1$.

3. $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$ *com* $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta} = (e^{it\Delta})^*$.

4. *Fixada* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *a função* $\phi_\varphi : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $\phi_f(t) = e^{it\Delta}\varphi$ *é uma função contínua, i.e, descreve uma curva em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. 1. Seja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Usando o fato que a tranformada de Fourier é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 1.10), segue que

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_2 = \|(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi})^\vee\|_2 = \|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi}\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

Portanto $e^{it\Delta}$ está bem-definido de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e sua linearidade segue da linearidade da transformada de Fourier. Além disso, a identidade anterior justifica o fato de ser isometria.

2. Não apresenta dificuldade.

3. Veja que para quaisquer $t, t' \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} e^{it\Delta}(e^{it'\Delta}\varphi) = (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{e^{it'\Delta}\varphi})^\vee &= (e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}e^{-4\pi^2 it'|\cdot|^2}\varphi)^\vee \\ &= (e^{-4\pi^2 i(t+t')|\cdot|^2}\varphi)^\vee \\ &= e^{i(t+t')\Delta}\varphi, \end{aligned}$$

e assim, $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$. Daí, temos que $e^{it\Delta}e^{-it\Delta} = e^{i(t-t)\Delta} = e^{i0\Delta} = 1$, e logo, $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta}$. Além disso, veja que pela fórmula de Parseval

$$\begin{aligned} \langle e^{it\Delta}\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(e^{it\Delta}\varphi)(x)\overline{\psi(x)}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}(\xi)\overline{e^{4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\psi}(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\overline{(e^{-it\Delta}\psi)(x)}dx \\ &= \langle \varphi, e^{-it\Delta}\psi\rangle, \end{aligned}$$

ou seja, $(e^{it\Delta})^* = e^{-it\Delta}$.

4. De fato, seja $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário. Observe que pelos itens 1 e 2 anteriores, $\forall t \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_\varphi(t_0+t)-\phi_\varphi(t_0)\|_2 &= \|e^{it_0\Delta}(e^{it\Delta}\varphi-\varphi)\|_2 \\
&= \|e^{it\Delta}\varphi-\varphi\|_2 \\
&= \|(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\varphi})^\vee-(\widehat{\varphi})^\vee\|_2 \\
&= \|(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}-1)\widehat{\varphi}\|_2,
\end{aligned}$$

onde $|(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}-1)\widehat{\varphi}| \leqslant 2|\widehat{\varphi}|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}-1)\widehat{\varphi} \to 0$ pontualmente quando $t \to 0$, então segue pelo teorma da convergência dominada que

$$\|(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}-1)\widehat{\varphi}\|_2 \to 0$$

quando $t \to 0$, e segue a afirmação. □

Lema 1.2. *Se* $t \neq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ *e* $p' \in [1,2]$, *então temos que* $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *é contínuo e vale*

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leqslant C|t|^{-n\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_{p'}. \tag{1.39}$$

Demonstração. Vide [12]. □

No próximo capítulo veremos que pode-se estabelecer uma versão do lema acima também para espaços de Lorentz.

1.5 Alguns resultados úteis de análise complexa

Resultados e ferramentas de análise complexa são indispensáveis para estabelecer os teoremas principais aqui presentes ou os resultados auxiliares à demonstração desses teoremas. Nesta secção abordaremos alguns destes fatos.

O lema a seguir pode parecer inocente, mas é ferramenta fundamental na demonstração dos teoremas de boa-colocação local e global que apresentaremos.

Lema 1.3. *Seja* $0 < \rho < \infty$. *Então existe uma constante positiva* $W = W(\rho) > 0$ *tal que*

$$||u|^\rho u - |v|^\rho v| \leqslant W|u-v|(|u|^\rho+|v|^\rho),$$

para todos $u, v \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathbb{C}$. Se temos $u = v$ então a desigualdade é óbvia, qualquer que seja W. Considere então $u \neq v$, e suponha ainda que $(1-t)u + tv \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$. Daí, defina para todo $t \in [0,1]$ a aplicação

$$\gamma(t) = |(1-t)u + tv|^{\rho} \cdot [(1-t)u + tv].$$

Segue que γ é derivável e vale que

$$\gamma'(t) = \rho|(1-t)u+tv|^{\rho-1} \cdot \frac{Re((v-u)\overline{[(1-t)u+tv]})}{|(1-t)u+tv|} \cdot [(1-t)u+tv] + |(1-t)u+tv|^{\rho}(v-u).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\gamma'(t)| &\leqslant \rho|(1-t)u+tv|^{\rho-1} \cdot \frac{|u-v||(1-t)u+tv|}{|(1-t)u+tv|} \cdot |(1-t)u+tv| + |(1-t)u+tv|^{\rho} \cdot |v-u| \\
&= \rho|(1-t)u+tv|^{\rho} \cdot |u-v| + |(1-t)u+tv|^{\rho} \cdot |u-v| \\
&\leqslant W|u-v| \cdot |(1-t)u+tv|^{\rho}, \qquad (1.40)
\end{aligned}$$

onde $W = \max\{1, \rho\}$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
|(1-t)u+tv|^{\rho} &\leqslant [(1-t)|u| + t|v|]^{\rho} \\
&\leqslant [(1-t)\max\{|u|,|v|\} + t\max\{|u|,|v|\}]^{\rho} \\
&= \max\{|u|,|v|\}^{\rho} \\
&= \max\{|u|^{\rho}, |v|^{\rho}\} \\
&\leqslant |u|^{\rho} + |v|^{\rho}. \qquad (1.41)
\end{aligned}$$

Assim, de (1.40) e (1.41), segue que

$$|\gamma'(t)| \leqslant W|u-v|(|u|^{\rho} + |v|^{\rho}), \quad \forall t \in [0,1].$$

Com mais razão, temos que

$$\begin{aligned}
||u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v| = |\gamma(1) - \gamma(0)| &= \left|\int_0^1 \gamma'(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |\gamma'(t)|dt \\
&\leqslant \int_0^1 C|u-v|(|u|^{\rho} + |v|^{\rho})dt \\
&= W|u-v|(|u|^{\rho} + |v|^{\rho}),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$||u|^{\rho}u - |v|^{\rho}v| \leqslant W|u-v|(|u|^{\rho} + |v|^{\rho}).$$

Suponha agora que $[u, v] \cap \{0\} \neq \emptyset$, onde

$$[z_1, z_2] := \{tz_1 + (1-t)z_2 \;:\; t \in [0,1]\} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Daí, considere

$$w_\varepsilon = v + \varepsilon \cdot z, \quad \varepsilon > 0$$

onde $z \perp (u - v)$. Neste caso, $[u, w_\varepsilon] \cap \{0\} = \emptyset$. E portanto, pelo que já foi demonstrado, temos

$$||u|^\rho u - |w_\varepsilon|^\rho w_\varepsilon| \leqslant W|u - w_\varepsilon|(|u|^\rho + |w_\varepsilon|^\rho).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos então que

$$||u|^\rho u - |v|^\rho v| \leqslant W|u - v|(|u|^\rho + |v|^\rho),$$

e segue o resultado. □

1.5.1 Funções Γ (gamma), b (beta) e H

Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$ e todo $c > 0$, definimos a função *gamma* Γ satisfazendo a relação

$$c^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-ct} t^{z-1} dt. \tag{1.42}$$

Proposição 1.11. *A função* Γ *definida em* (1.42) *é analítica em* $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Demonstração. Vide [14]. □

O resultado a seguir exibe uma importante propriedade da função Γ, a saber, ela funciona basicamente como uma extensão do fatorial para números em conjuntos mais gerais que $\mathbb{N}$.

Proposição 1.12. *Se* $\mathrm{Re}(z) > 0$*, então*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.43}$$

Como consequência $\Gamma(n+1) = n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vide [14]. □

A seguir definimos a função *beta* b. Sejam z e w números complexos com parte real positiva. Definimos

$$\mathrm{b}(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.44}$$

Temos a seguinte relação entre as função gamma e beta :

$$\mathrm{b}(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Por fim, defininimos a função H por

$$H(y;a,b)=\int_0^1 e^{iyr}r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr, \tag{1.45}$$

onde $a,b\in\mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)>0$ e $y\in\mathbb{C}$. Veja que tal função generaliza a função beta, pois

$$H(0,a,b)=\int_0^1 r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr=B(a,b).$$

Tal função H é separadamente analítica de y, a e b nos domínios especificados. Além disso, se $y\in\mathbb{R}$, então

$$|H(y;a,b)|\leqslant B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

1.5.2 Teorema da identidade(Princípio da continuação analítica)

Definição 1.12. *Seja $f:\Omega\to\mathbb{C}$ uma função definida em um subconjunto $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. Definimos o conjundo dos* zeros *de f por*

$$Z(f)=\{z\in\Omega : f(z)=0\}.$$

O teorema da identidade é uma consequência do próximo resultado, que estabelece uma propriedade topológica para o conjunto dos zeros de uma função analítica.

Lema 1.4. *Seja $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ aberto e seja L o conjunto dos pontos de acumulção de $Z(f)$ em Ω. Se f é analítica, então L é aberto e fechado em Ω.*

Demonstração. Vide Ash R., Novinger W. [15]. □

Teorema 1.15 (Teorema da identidade)**.** *Suponha que f é analítica em um conjunto aberto e conexo Ω. Então, ou f é identicamente nula em Ω, ou $Z(f)$ não possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Vide [15]. □

Corolário 1.2. *Suponha que* f, g *são funções analíticas em um conjunto aberto e conexo* Ω *tal que* $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ *possui um ponto de acumulação em* Ω. *Então* $f = g$ *em* Ω.

Demonstração. Considere $h = f - g$ e aplique o teorema da identidade em h. □

1.5.3 Sequência de funções analíticas

Sabemos da análise real que o limite uniforme de uma sequência de funções diferenciáveis na reta pode não ser diferenciável. O seguinte teorema garante que este resultado é válido quando se trata de funções complexas analíticas.

Teorema 1.16. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aberto. Se* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções analíticas que converge uniformemente para* f *em qualquer subconjunto compacto de* Ω, *então* f *é analítica em* Ω.

Demonstração. Vide [14]. □

1.5.4 Funções analíticas definidas em termos de integral

Muitas das funções complexas que aparecem em nossas análises são da forma

$$f(z) = \int_a^b F(z, s) ds.$$

Os teoremas a seguir establecem condições suficientes a serem satisfeitas por F acima para que f seja analítica.

Teorema 1.17. *Seja* $F(z, s)$ *definida para* $(z, s) \in \Omega \times [a, b]$ *onde* Ω *é um conjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$. *Suponha que* F *satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $F(\cdot, s)$ *é analítica em* Ω *para cada* $s \in [a, b]$ *fixado.*

2. *F é contínua em* $\Omega \times [a, b]$.

Então a função f *definida em* Ω *por*

$$f(z) = \int_a^b F(z, s) ds \tag{1.46}$$

é analítica.

Demonstração. Vide [14]. □

Teorema 1.18. *Seja* $F(z,s)$ *definida para* $(z,s) \in \Omega \times [a,\infty)$ *onde* Ω *é um conjunto aberto de* $\mathbb{C}$ *e* $a \in \mathbb{R}$. *Suponha que* F *satisfaça as seguintes propriedades:*

1. $F(\cdot,s)$ *é analítica em* Ω *para cada* $s \in [a,\infty)$ *fixado.*

2. *F é contínua em* $\Omega \times [a,\infty)$.

3. *Dados* $\varepsilon > 0$ *e* $K \subseteq \Omega$ *compacto, existe* $R > a$ *positivo tal que*
$$\int_R^\infty |F(z,s)|ds < \varepsilon$$
para todo $z \in K$.

Então a função f *definida em* Ω *por*
$$f(z) = \int_a^\infty F(z,s)ds \tag{1.47}$$
é analítica.

Demonstração. Primeiramente veja que f como em (1.47) está bem-definina. De fato, dado $z_0 \in \Omega$ seja $\delta > 0$ tal que $B[z_0,\delta] \subseteq \Omega$. Daí, podemos por 3., fixar $R_0 > a$ positivo tal que
$$\int_{R_0}^\infty |F(z,s)|ds < 1, \tag{1.48}$$
para todo $z \in B[z_0,\delta]$. Daí
$$\int_a^\infty |F(z_0,s)|ds = \int_a^{R_0} |F(z_0,s)|ds + \int_{R_0}^\infty |F(z,s)|ds < \infty.$$
Segue a afirmação pela arbitrariedade de z_0. Agora, defina para cada $n \in \mathbb{N}$ $(n > a)$ e $z \in \Omega$
$$f_n(z) := \int_a^n F(z,s)ds.$$
Como $F(\cdot,s)$ é analítica em Ω para cada $s \in [a,n]$ fixado (por 1.), e F é contínua em $\Omega \times [a,n]$ (por 2.), então segue do Teorema 1.17 que f_n é analítica para todo $n > a$. Além disso, note que dados $\varepsilon > 0$ e $K \subseteq \Omega$ compacto, existe (por 3.) $R > a$ positivo tal que
$$\int_R^\infty |F(z,s)|ds < \varepsilon$$

para todo $z \in K$. Assim, para todo $n > R$ (R como em (1.48)) temos

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^\infty F(z,s)ds \right| \leqslant \int_R^\infty |F(z,s)|ds < \varepsilon$$

para todo $z \in K$. Portanto, (f_n) converge uniformemente para f em qualquer subconjunto compacto de Ω. Segue do Teorema 1.16 que f é analítica. □

1.5.5 Princípio de Simetria

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ que é simétrico com relação a reta real, i.e.

$$z \in \Omega \text{ se, e somente se, } \bar{z} \in \Omega.$$

Seja também

$$\Omega^+ = \{z \in \Omega : \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$$\Omega^- = \{z \in \Omega : \operatorname{Im}(z) < 0\},$$

$$I = \Omega \cap \mathbb{R}.$$

Assim, temos $\Omega = \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$ (Nos interessa apenas o caso em que I é não-vazio). Temos então o seguinte teorema.

Teorema 1.19 (Princípio de simetria)**.** *Se f^+ e f^- são funções analíticas em Ω^+ e Ω^- respectivamente, que se estendem continuamente a I e*

$$f^+(x) = f^-(x) \quad \forall x \in I,$$

então a função f definida em Ω por

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z), \; z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z), \; z \in I \\ f^-(z), \; z \in \Omega^- \end{cases}$$

é analítica em todo Ω.

Demonstração. Vide [14]. □

1.6 Interpolação Real

Veremos aqui uma breve introdução a espaços de interpolação real construídos via o *método K*. Tal noção é importante para obtenção de estimativas do grupo linear de Schrödinger em espaços de Lorentz. Para mais detalhes veja [2].

Definição 1.13. *Sejam* E_0 *e* E_1 *espaços normados continuamente inclusos em um espaço vetorial topológico* τ*, e de modo que*

$$E_0 \cap E_1 \text{ está equipado com a norma } \|a\|_{E_0\cap E_1} = \max\{\|a\|_0, \|a\|_1\}, \tag{1.49}$$

$$E_0 + E_1 \text{ está equipado com a norma } \|a\|_{E_0+E_1} = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_0 + \|a_1\|_1\right). \tag{1.50}$$

Para $a \in E_0 + E_1$ *e* $t > 0$ *definimos*

$$K(t;a) = \inf_{a=a_0+a_1} \left(\|a_0\|_0 + t\|a_1\|_1\right) \tag{1.51}$$

e para $0 < \theta < 1$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *(ou para* $\theta = 0, 1$ *com* $p = \infty$*), escreve-se*

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = \left\{ a \in E_0 + E_1 \mid t^{-\theta} K(t;a) \in L^p\left(\mathbb{R}_+; \frac{dt}{t}\right) \right\} \tag{1.52}$$

com a norma

$$\|a\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} = \|t^{-\theta}K(t;a)\|_{L^p(\mathbb{R}_+;dt/t)}. \tag{1.53}$$

A aplicação $K(t;a)$ definida em (1.51) satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para cada $t > 0$ fixado, temos que $K(t;\cdot)$ define uma norma em $E_0 + E_1$ equivalente à norma em (1.50);

2. Para cada $a \in E_0 + E_1$ fixado, $K(t;a)$ é não-decrescente em t e $\frac{K(t;a)}{t}$ é não-crescente em t.

3. $K(t;a)$ é côncava e contínua em relação a t.

Agora vejamos um importante e útil resultado acerca destes espaços de interpolação.

Lema 1.5. *Seja* A *um operador linear de* $E_0 + E_1$ *em* $F_0 + F_1$ *tal que* A *aplica* E_0 *em* F_0 *com* $\|Ax\|_{F_0} \leqslant M_0\|x\|_{E_0}$ *para todo* $x \in E_0$*, e aplica* E_1 *em* F_1 *com* $\|Ax\|_{F_1} \leqslant M_1\|x\|_{E_1}$ *para todo* $x \in E_1$*. Então* A *é operador linear contínuo de* $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ *em* $(F_0, F_1)_{\theta,p}$ *para todos* θ, p*, e, para* $0 < \theta < 1$ *tem-se*

$$\|Ax\|_{(F_0,F_1)_{\theta,p}} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \tag{1.54}$$

para todo $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$*.*

Demonstração. Vide [2]. □

Caracterizemos agora os espaços de Lorentz em termos de espaços de interpolação, a saber, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.20. *Suponha que* p_0, p_1, q_0, q_1 *e* q *são números positivos, possivelmente infinitos, e escreva*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \theta \in (0,1).$$

Então, se $p_0 \neq p_1$

$$(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1})_{\theta,q} = L^{p,q}. \tag{1.55}$$

Esta fórmula também é válida no caso $p_0 = p = p_1$*, desde que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Demonstração. Vide [3]. □

Capítulo 2

Desiguladade de Hölder e Limitação do Operador $e^{it\Delta}$ em $L^{p,q}$

Neste capítulo apresentamos a demonstração de alguns resultados cruciais na obtenção dos teoremas e corolários principais dessa dissertação. Mais precisamente, apresentamos a desigualdade de Hölder em espaços de Lorentz em sua versão mais geral, estimativas do grupo linear de Schrödinger em espaços de Lorentz e a convergência deste grupo na norma de $L^{p,q}$ relativo a funções de Schwartz.

2.1 Desigualdade de Hölder em $L^{p,q}$

A principal referência utilizada nesta seção é o artigo sobre espaços de Lorentz "*Convolution Operators and L(p, q) Spaces*" por O'Neil R. (Veja [4]).

Lema 2.1. *Se* $f \in L^{p,q}$ *para* $1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q < \infty$ *então vale que*

$$f^{**}(x) \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \frac{\|f\|_{p,q}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

Demonstração. De fato, note que pelo fato de f^{**} ser não-crescente,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q}^{q} = \int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t} &\geqslant \int_0^x \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t} \\
&\geqslant f^{**}(x)^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} dt \\
&= f^{**}(x)^q \left[\left(\frac{p}{q}\right) t^{\frac{q}{p}}\right]_0^x \\
&= f^{**}(x)^q \left(\frac{p}{q}\right) x^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f\|_{p,q} \geqslant \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x),$$

e segue o resultado. $\square$

Lema 2.2 (Calderón)**.** *Se* $1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q < r \leqslant \infty$*, então* $L^{p,q} \subseteq L^{p,r}$*, e vale*

$$\|f\|_{p,r} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{p,q}.$$

Demonstração. De fato, pelo Lema 2.1 temos que

$$\|f\|_{p,q} \geqslant \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x) \quad \forall x > 0, \tag{2.1}$$

e portando, para $r = \infty$ temos

$$\|f\|_{p,r} = \|f\|_{p,\infty} = \sup_{x>0} x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x) \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,q}.$$

Agora para $1 \leqslant r < \infty$, utilizando novamente o Lema 2.1 temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,r}^{r} = \int_0^\infty \left[x^{\frac{1}{p}} f^{**}(x)\right]^r \frac{dx}{x} &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{r}{p}} f^{**}(x)^r}{x} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{r}{p}} f^{**}(x)^{r-q} f^{**}(x)^q}{x} dx \\
&\leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{p,q}^{r-q} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{r}{p}}}{x \cdot x^{\frac{r-q}{p}}} f^{**}(x)^q dx \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{p,q}^{r-q} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{q}{p}} f^{**}(x)^q}{x} dx \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{p,q}^{r-q} \cdot \|f\|_{p,q}^{q} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{p,q}^{r},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|f\|_{p,r} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{p,q}.$$

$\square$

Lema 2.3 (Hardy)**.** *Sejam* $1 < p < \infty, 1 \leqslant q < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Se* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função não-negativa, então*

$$\left(\int_0^\infty \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x} \int_0^x f(t)dt\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant p' \left(\int_0^\infty \left[x^{\frac{1}{p}} f(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Provaremos apenas o caso $1 < q < \infty$, pois o caso extremo $q = 1$ pode ser estabelecido por argumentos análogos. Suponha $f \not\equiv 0$. Se temos

$$\int_0^\infty [x^{\frac{1}{p}} f(x)]^q \frac{dx}{x} = +\infty$$

a desigualdade segue trivialmente. Suponha então $\frac{[x^{\frac{1}{p}} f]^q}{x} = [x^{\frac{q}{p}-1}] f^q \in L^1(0,\infty)$. Pela desigualdade de Hölder, note que para todo $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)dt = \int_0^x [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f(t)] \cdot t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} dt &\leqslant \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x t^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x t^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\frac{p-q}{p(q-1)}+1} \left[t^{\frac{p-q}{p(q-1)}+1}\right]_0^x\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \left(\frac{q(p-1)}{p(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(x^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= C\left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{p-1}{p}} \\
&= C\left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{p'}} < +\infty,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$C := \left(\frac{q(p-1)}{p(q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Portanto f é integrável em qualquer intervalo limitado de $[0,+\infty)$ e, definindo

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt,$$

temos pela desigualdade em (2.2) que

$$\frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}} \leqslant C\left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Daí,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}} = 0. \tag{2.3}$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Um argumento análogo ao feito em (2.2) mostra que para todos $0 < \xi < x$ temos

$$F(x) - F(\xi) \leqslant C\left(\int_\xi^x t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right)\left(x^{\frac{1}{p'}} - \xi^{\frac{1}{p'}}\right) \leqslant C\left(\int_\xi^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt\right) x^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.4}$$

Mas, como $t^{\frac{q}{p}-1}f^q \in L^1(0,\infty)$, então para este $\varepsilon > 0$ podemos fixar um $\xi_0 > 0$ tal que

$$C\int_{\xi_0}^{\infty} t^{\frac{q}{p}-1} f(t)^q dt < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Segue por (2.4) e (2.5) que para todo $x > \xi_0$ temos

$$F(x) < \varepsilon x^{\frac{1}{p'}} + F(\xi_0).$$

Mas neste caso, considerando $A > 0$ tal que

$$A > \left(\frac{F(\xi_0)}{\varepsilon}\right)^{p'},$$

temos que

$$F(x) < 2\varepsilon x^{\frac{1}{p'}} \qquad \forall x > A.$$

Portanto, vale também que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}} = 0. \tag{2.6}$$

Considere agora $0 < a < b < \infty$. Veja que, primeiramente integrando por partes, e depois utilizando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x} = \int_a^b x^{\frac{q}{p}-q-1} F(x)^q dx \\
&= \frac{1}{\left(\frac{q}{p}-q\right)}\left[x^{\frac{q}{p}-q}F(x)^q\right]_a^b - \frac{1}{\left(\frac{q}{p}-q\right)}\int_a^b x^{\frac{q}{p}-q} qF(x)^{q-1} f(x) dx \\
&= \frac{p}{q(1-p)}\left[x^{\frac{q}{p}-q}F(x)^q\right]_a^b - \frac{p}{1-p}\int_a^b (x^{\frac{q}{p}-q-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}F(x)^{q-1})(x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f(x))dx \\
&\leqslant \frac{p}{q(1-p)}\left[x^{\frac{q}{p}-q}F(x)^q\right]_a^b - \frac{p}{1-p}\left(\int_a^b x^{\frac{q}{p}-1}f(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b x^{(\frac{q}{p}-q-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{q}{q-1}}F(x)^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \frac{p}{q(1-p)}\left[x^{\frac{q}{p}-q}F(x)^q\right]_a^b - \frac{p}{1-p}\left(\int_a^b x^{\frac{q}{p}-1}f(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b x^{\frac{q}{p}-q-1}F(x)^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= -\frac{p'}{q}\left[\left(\frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}}\right)^q\right]_a^b + p'\left(\int_a^b [x^{\frac{1}{p}}f(x)]^q\frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{q-1}{q}},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

notando é claro que

$$\left(\frac{q}{p}-q-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{q}{q-1} = \frac{q}{p}-1-q.$$

Multiplicando então ambos os lados de (2.7) por $\left(\int_a^b \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{-\frac{q-1}{q}}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant -\frac{p'}{q}\left[\left(\frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}}\right)^q\right]_a^b \left(\int_a^b \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{-\frac{q-1}{q}} + p'\left(\int_a^b [x^{\frac{1}{p}}f(x)]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant -\frac{p'}{q}\left[\left(\frac{F(x)}{x^{\frac{1}{p'}}}\right)^q\right]_a^b \left(\int_{a_0}^{b_0} \left[\frac{x^{\frac{1}{p}}}{x}F(x)\right]^q \frac{dx}{x}\right)^{-\frac{q-1}{q}} + p'\left(\int_a^b [x^{\frac{1}{p}}f(x)]^q \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

onde $0 < a < a_0 < b_0 < b < \infty$ estão fixados. Fazendo então $a \to 0^+$, $b \to +\infty$ em (2.8) e usando (2.3) e (2.6), segue a desigualdade desejada. □

Definição 2.1. *Sejam* (X, μ), (Y, ν) *e* (W, σ) *espaços de medida. Um operador bilinear* P *definido no produto cartesiano do conjunto de funções mensuráveis em* X *pelo conjunto de funções mensuráreis em* Y *e tomando valores no conjunto de funções mensuráveis em* W *é dito um "Operador Produto" se*

1) $\|P(f, g)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$;

2) $\|P(f, g)\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$;

3) $\|P(f, g)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Teorema 2.1 (Caracterização de Operador Produto - Vide [4])**.** *Um operador bilinear* P *é um operador produto se, e somente se, para* $h = P(f, g)$ *temos*

$$xh^{**}(x) \leqslant \int_0^x f^*(t)g^*(t)dt.$$

Teorema 2.2 (Desigualdade de Hölder nos Espaços $L^{p,\infty}$)**.** *Se* P *é um operador produto e*

$$h := P(f, g),$$

onde $f \in L^{p_1,\infty}$, $g \in L^{p_2,\infty}$ *e vale*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1,$$

então $h \in L^{r,\infty}$, *onde*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}.$$

Além disso, temos que

$$\|h\|_{r,\infty} \leqslant r'\|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty}.$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 2.1 temos que

$$h^{**}(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)g^*(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt, \quad \forall x > 0. \tag{2.9}$$

Daí, temos por (2.9) que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{r,\infty} = \sup_{x>0}\left(x^{\frac{1}{r}}h^{**}(x)\right) &\leqslant \sup_{x>0}\left(x^{\frac{1}{r}}\frac{1}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt\right)\\
&= \sup_{x>0}\left(x^{\frac{1}{r}-1}\int_0^x t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)t^{-\frac{1}{r}}dt\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty}\sup_{x>0}\left(x^{\frac{1}{r}-1}\int_0^x t^{-\frac{1}{r}}dt\right)\\
&\leqslant \|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty}\sup_{x>0}\left(x^{\frac{1}{r}-1}\cdot\frac{r}{r-1}\cdot x^{1-\frac{1}{r}}\right)\\
&= r'\|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|h\|_{r,\infty} \leqslant r'\|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2,\infty}.$$

□

Teorema 2.3 (Desigualdade de Hölder em espaços de Lorentz - Vide [4])**.** *Seja* P *um operador produto e defina*

$$h := P(f, g),$$

onde $f \in L^{p_1,q_1}$, $g \in L^{p_2,q_2}$, *e temos*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geqslant \frac{1}{s},$$

$r > 1$, $s \geqslant 1$. *Então* $h \in L^{r,s}$ *e existe existe* $C = C(s, p_1, q_1, p_2, q_2) > 0$ *tal que*

$$\|h\|_{r,s} \leqslant Cr'\|f\|_{p_1,q_1}\|g\|_{p_2,q_2}.$$

Demonstração. O caso $s = \infty = q_1 = q_2$ está demonstrado no Teorema 2.2. Consideremos agora o caso em que $s = \infty$, $q_1 < \infty$, $q_2 < \infty$. Então, note que pelo Teorema 2.1

$$\|h\|_{r,s} = \|h\|_{r,\infty} = \sup_{x>0} x^{\frac{1}{r}}h^{**}(x) \leqslant \sup_{x>0}\frac{x^{\frac{1}{r}}}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned}\sup_{x>0}\frac{x^{\frac{1}{r}}}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt &\leqslant \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\|f\|_{p_1,q_1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\|g\|_{p_2,q_2}\sup_{x>0}x^{\frac{1}{r}-1}\int_0^x t^{-\frac{1}{p_1}}t^{-\frac{1}{p_2}}dt\\ &= \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\|f\|_{p_1,q_1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\|g\|_{p_2,q_2}\sup_{x>0}x^{\frac{1}{r}-1}\int_0^x t^{-\frac{1}{r}}dt\\ &= \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\|f\|_{p_1,q_1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\|g\|_{p_2,q_2}\sup_{x>0}x^{\frac{1}{r}-1}\left(\frac{r}{r-1}\right)x^{1-\frac{1}{r}}\\ &= r'\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\|f\|_{p_1,q_1}\|g\|_{p_2,q_2},\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|h\|_{r,s}\leqslant r'\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\|f\|_{p_1,q_1}\|g\|_{p_2,q_2}.$$

Agora suponha que $s, q_1, q_2 < \infty$. Então, temos pelo Teorema 2.1 e a desigualdade de Hardy (Lema 2.3) que

$$\begin{aligned}\|h\|_{r,s}^s = \int_0^\infty \left[x^{\frac{1}{r}}h^{**}(x)\right]^s\frac{dx}{x} &\leqslant \int_0^\infty\left[\frac{x^{\frac{1}{r}}}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt\right]^s\frac{dx}{x}\\ &\leqslant (r')^s\int_0^\infty\left[x^{\frac{1}{r}}f^{**}(x)g^{**}(x)\right]^s\frac{dx}{x} \qquad (2.10)\\ &= (r')^s\int_0^\infty\frac{[x^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(x)]^s\cdot[x^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(x)]^s}{x}dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geqslant\frac{1}{s}$, e daí, existe $\theta\in[0,1]$ tal que

$$\frac{\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2}=\frac{1}{s}.$$

Neste caso, se $m_1 = q_1/\theta s,\ m_2 = q_2/\theta s$, então temos que

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1,\qquad \frac{1}{m_1}\leqslant\frac{s}{q_1},\qquad \frac{1}{m_2}\leqslant\frac{s}{q_2}.$$

Daí, em (2.10), temos

$$\|h\|_{r,s}\leqslant (r')^s\int_0^\infty\frac{[x^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(x)]^s}{x^{\frac{1}{m_1}}}\cdot\frac{[x^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(x)]^s}{x^{\frac{1}{m_2}}}dx. \qquad (2.11)$$

Além disso, como $q_1\leqslant sm_1$ e $q_2\leqslant sm_2$ então, pelo Lema de Calderón, segue que $f\in L^{p_1,sm_1},\ g\in L^{p_2,sm_2}$, e vale ainda que

$$\|f\|_{p_1,sm_1}\leqslant\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\|f\|_{p_1,q_1},\qquad \|g\|_{p_2,sm_2}\leqslant\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|g\|_{p_2,q_2}. \qquad (2.12)$$

Daí, temos que

$$\frac{[x^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(x)]^s}{x^{\frac{1}{m_1}}}\in L^{m_1}[0,\infty],\qquad \frac{[x^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(x)]^s}{x^{\frac{1}{m_2}}}\in L^{m_2}[0,\infty],$$

e pela desigualdade de Hölder (Teorema 1.1) em (2.11), obtemos

$$\|h\|_{r,s}^{s} \leqslant (r')^{s}\|f\|_{p_1,sm_1}^{s}\|g\|_{p_2,sm_2}^{s}. \tag{2.13}$$

Portanto, de (2.12) e (2.13), temos que

$$\|h\|_{r,s} \leqslant r'\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|f\|_{p_1,q_1}\|g\|_{p_2,q_2}.$$

Os demais casos não apresentam dificuldade pois são apenas pequenas adaptações das ideias utilizadas antes. E segue o resultado. □

Teorema 2.4 (Desigualdade de Hölder (Padrão) em Espaços de Lorentz - Vide [4])**.** *Seja* P *um operador produto e*

$$h := P(f,g)$$

onde $f \in L^{p,q_1},\ g \in L^{p',q_2}$ *e temos*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \qquad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \geqslant 1.$$

Então, $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e vale*

$$\|h\|_{L^1} \leqslant C\|f\|_{p,q_1}\|g\|_{p',q_2},$$

para alguma constante $C = C(p,q_1,q_2) > 0$*.*

Demonstração. De fato, note que pelo Teorema 2.1

$$\begin{aligned}\|h\|_{1,\infty} = \sup_{x>0} xh^{**}(x) &\leqslant \sup_{x>0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\int_0^x f^{**}(t)g^{**}(t)dt\right)\\ &= \int_0^\infty f^{**}(x)g^{**}(x)dx\\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{p}}f^{**}(x)x^{\frac{1}{p'}}g^{**}(x)}{x}dx. \end{aligned}\tag{2.14}$$

Note ainda que, como $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2} \geqslant 1$, então existem $m_1, m_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1, \qquad q_1 \leqslant m_1, \qquad q_2 \leqslant m_2.$$

Daí, por (2.14), a desigualdade de Hölder (Teorema 1.1) e o lema de Calderón (Lema 2.2) temos que

$$\begin{aligned}\|h\|_{1,\infty} \leqslant \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{p}}f^{**}(x)}{x^{\frac{1}{m_1}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{p'}}g^{**}(x)}{x^{\frac{1}{m_2}}}dx &\leqslant \|f\|_{p,m_1}\|g\|_{p',m_2}\\ &\leqslant \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{m_1}}\left(\frac{q_2}{p'}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{m_2}}\|f\|_{p,q_1}\|g\|_{p',q_2},\end{aligned}$$

e logo,

$$\|h\|_{1,\infty} \leqslant \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{m_1}} \left(\frac{q_2}{p'}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{m_2}} \|f\|_{p,q_1}\|g\|_{p',q_2} \tag{2.15}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|dx &= \int_0^\infty h^*(t)dt \\ &= \sup_{x>0} \int_0^x h^*(t)dt \\ &= \sup_{x>0} x \cdot \frac{1}{x}\int_0^x h^*(t)dt \\ &= \sup_{x>0} x \cdot h^{**}(x) \\ &= \|h\|_{1,\infty},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|h\|_{1,\infty}.$$

Portanto, por (2.15), segue o resultado. □

2.2 Limitação do Grupo de Schrödinger em $L^{p,q}$

Estabelecemos aqui um lema analógo ao Lema 1.2 para o grupo linear de Schrödinger, e depois também, para a transformada de Fourier.

Lema 2.4 (Vide [1]). *Seja* $1 \leqslant d \leqslant \infty$, *e* $1 < p < 2$. *Se* p' *é tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *então existe uma constante* $C = C(n, p) > 0$ *tal que*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{p',d} \leqslant C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)}\|\varphi\|_{p,d}, \tag{2.16}$$

para toda $\varphi \in L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$ *e todo* $t \neq 0$.

Demonstração. Fixe $t \neq 0$ e seja $1 < p_0 < p < p_1 < 2$. Então, como $\frac{1}{p_1} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_0}$, então existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}.$$

Pelas estimativas do grupo de Schrödinger $\{e^{it\Delta}\}$ nos espaços $L^q(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.2), segue que $e^{it\Delta} : L^{p_0} \to L^{p_0'}$ e $e^{it\Delta} : L^{p_1} \to L^{p_1'}$ são operadores limitados, e além disso, temos

$$\begin{aligned}\|e^{it\Delta}\|_{L^{p_0}\to L^{p_0'}} &\leqslant C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p_0}-1\right)}, \\ \|e^{it\Delta}\|_{L^{p_1}\to L^{p_1'}} &\leqslant C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p_1}-1\right)}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Daí, pelo Lema 1.5 e pelas limitações do grupo de Schrödinger em (2.17), segue que $e^{it\Delta} : (L^{p_0}, L^{p_1})_{1-\theta,d} \to (L^{p_0'}, L^{p_1'})_{1-\theta,d}$ é limitado nestes espaços de interpolação, e vale ainda que

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}\varphi\|_{(L^{p_0'},L^{p_1'})_{1-\theta,d}} &\leqslant \left(C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p_0}-1\right)}\right)^{\theta} \left(C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p_1}-1\right)}\right)^{1-\theta} \|\varphi\|_{(L^{p_0},L^{p_1})_{1-\theta,d}} \\ &= \left(C^{\theta+(1-\theta)}|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2\theta}{p_0}-\theta+\frac{2(1-\theta)}{p_1}-(1-\theta)\right)}\right) \|\varphi\|_{(L^{p_0},L^{p_1})_{1-\theta,d}} \\ &= C\left(|t|^{-\frac{n}{2}\left(2\left[\frac{\theta}{p_0}+\frac{1-\theta}{p_1}\right]-1\right)}\right) \|\varphi\|_{(L^{p_0},L^{p_1})_{1-\theta,d}} \\ &= C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{p}-1\right)}\|\varphi\|_{(L^{p_0},L^{p_1})_{1-\theta,d}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.20 que vale as seguintes igualdades de interpolação

$$\begin{aligned} (L^{p_0}, L^{p_1})_{1-\theta,d} &= L^{p,d}, \\ (L^{p_0'}, L^{p_1'})_{1-\theta,d} &= L^{p',d}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

desde que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, $\frac{1}{p'} = \frac{\theta}{p_0'} + \frac{1-\theta}{p_1'}$. Portanto, por (2.18) e pelas igualdades em (2.19), segue a desigualdade (2.16). □

Lema 2.5. *Seja* $1 \leqslant d \leqslant \infty$*, e* $1 < p < 2$*. Se* p' *é tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*, então*

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{p',d} = \|\widehat{\varphi}\|_{p',d} \leqslant \|\varphi\|_{p,d}, \tag{2.20}$$

para toda $\varphi \in L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração. Pela desigualdade de Hausdorff-Young, temos que $\mathcal{F} : L^{p_j} \to L^{p_j'}$ ($j = 0, 1$) é um operador limitado, e vale ainda

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{L^{p_0}\to L^{p_0'}} &\leqslant 1, \\ \|\mathcal{F}\|_{L^{p_1}\to L^{p_1'}} &\leqslant 1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Portanto, analogamente como no Lema 2.4, temos que $\mathcal{F} : L^{p,d} \to L^{p',d}$ é um operador limitado, e vale que

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{p',d} \leqslant 1^{\theta}1^{1-\theta}\|\varphi\|_{p,d} = \|\varphi\|_{p,d},$$

para toda $\varphi \in L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 2.6. *Sejam* $0 < p, q \leqslant \infty$*. Então:*

i) $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *(a menos do caso* $p = \infty$ *e* $q < \infty$*);*

ii) Se $f_k \to f$ *em* $S(\mathbb{R}^n)$ *então* $f_k \to f$ *em* $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. O caso $q = \infty$ é óbvio. Consideremos então $p, q < \infty$, e seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Sabe-se que $S(\mathbb{R}^n) \subseteq L^r(\mathbb{R}^n)$ para todos $0 < r \leqslant \infty$. Portanto, pela desigualdade de Chebyshev, segue que

$$f^*(t) \leqslant t^{-\frac{1}{r}} \|f\|_r \qquad \forall 0 < r < \infty.$$

Fixe então $r_1, r_2 > 0$ tais que

$$r_2 < p < r_1.$$

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt + \int_1^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt \\
&\leqslant \|f\|_{r_1}^q \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1-\frac{q}{r_1}} dt + \|f\|_{r_2} \int_1^\infty t^{\frac{q}{p}-1-\frac{q}{r_2}} \\
&= \|f\|_{r_1}^q \left[\frac{1}{q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_1}\right)} t^{q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_1}\right)} \right]_0^1 + \|f\|_{r_2}^q \left[\frac{1}{q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_2}\right)} t^{q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_2}\right)} \right]_1^\infty \\
&= \frac{pr_1}{q(r_1 - p)} \|f\|_{r_1}^q + \frac{pr_2}{q(p - r_2)} \|f\|_{r_2}^q < \infty,
\end{aligned}$$

e segue a afirmação do item i). Além disso, pela desigualdade acima, temos que

$$\left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{pr_1 C_1^q}{q(r_1 - p)} + \frac{pr_2 C_2^q}{q(p - r_2)} \right)^{\frac{1}{q}} d(f, 0), \tag{2.22}$$

onde $C_1 = C_1(r_1), C_2 = C_2(r_2) > 0$ são tais que

$$\|f\|_{r_1} \leqslant C_1 d(f, 0) \qquad \|f\|_{r_2} \leqslant C_2 d(f, 0)$$

e d representa a métrica padrão do espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$. Daí, se $f_k \to f$ em $S(\mathbb{R}^n)$ então $d(f_k - f, 0) \to 0$, e logo, o item ii) segue da desigualdade (2.22). □

Lema 2.7. *Sejam* $2 \leqslant p < \infty$ *e* $1 \leqslant q < \infty$. *Então*

$$\lim_{t \to 0} \|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{p,q} = 0, \tag{2.23}$$

para toda $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. De fato, fixe $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$. Note que, pelo Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned}\|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{p,q} &= \| \left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta}\right)^{\vee} - (\widehat{\eta})^{\vee}\|_{p,q} \\ &\leqslant \|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\|_{p',q}.\end{aligned}$$

Assim, é suficiente provarmos que

$$\|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\|_{p',q} \to 0$$

quando $t \to 0$. Mas de fato, observe primeiramente que para toda $f \in L^{p',q}$ temos

$$\begin{aligned}\|f\|_{p',q} = \left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p'}} f^{**}(s)]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant p\left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p'}} f^{*}(s)]^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= p\left(\int_0^\infty [s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}} f^{*}(s)]^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= p\|s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}} f^*\|_{L^q(0,\infty)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\|_{p',q} \leqslant p\left\|s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\right)^*\right\|_{L^q(0,\infty)}. \tag{2.24}$$

Agora, fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ arbitrários. Note que a função $\gamma : s \in [0,t] \mapsto \gamma(s) = e^{-4\pi^2 is|\xi|^2} - 1$ é de classe C^1. Daí, temos que

$$|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} - 1| = |\gamma(t) - \gamma(0)| = \left|\int_0^t \gamma'(s)ds\right| \leqslant \int_0^t 4\pi^2|\xi|^2 ds = 4\pi^2|\xi|^2 t.$$

Portanto,

$$|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2} - 1| \leqslant 4\pi^2 t|\xi|^2 \quad \forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, como $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$ então existe $C > 0$ tal que $4\pi^2|\xi|^2|\widehat{\eta}(\xi)| \leqslant C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo

$$|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}| \leqslant 4\pi^2 t|\xi|^2|\widehat{\eta}(\xi)| \leqslant Ct \quad \forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Com mais razão,

$$\left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\right)^*(s) \leqslant (Ct)^*(s) = Ct \quad \forall s > 0.$$

Portanto, $s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}\left(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}\right)^* \to 0$ pontualmente quando $t \to 0$. Além disso, do fato que

$$|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta} - \widehat{\eta}| \leqslant 2|\widehat{\eta}|$$

segue que

$$s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta}-\widehat{\eta}\right)^*(s) \leqslant 2s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}(\widehat{\eta})^*(s) \qquad \forall s>0,$$

onde $s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}(\widehat{\eta})^* \in L^q(0,\infty)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\|s^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta}-\widehat{\eta}\right)^*\|_{L^q(0,\infty)} \to 0 \tag{2.25}$$

quando $t \to 0$. Portanto, por (2.24) e (2.25), temos que

$$\|e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\widehat{\eta}-\widehat{\eta}\|_{p',q} \to 0$$

quando $t \to 0$, e segue o resultado. □

Capítulo 3

Propriedades sobre o Fluxo Linear de Schrödinger para Funções p-homogêneas

Neste capítulo apresentamos os resultados mais técnicos presentes neste trabalho. Tais resultados, juntamente com os teoremas de boa colocação, nos garantem por exemplo a existência de soluções auto-similares para NLS (1) em espaços L^p-fraco. Precisamente, estamos interessados em saber quando temos

$$e^{it\Delta}\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{3.1}$$

para certas funções p-homogêneas e certos valores de r ($0 < r \leqslant \infty$). Primeiramente, definamos o que seria uma função p-homogênea.

Definição 3.1. *Uma função φ em $\mathbb{R}^n$ é p-homogênea (ou homogênea de grau $-p$), $p \in \mathbb{C}$, se*

$$\lambda^p \varphi(\lambda x) = \varphi(x) \quad \forall \lambda > 0,$$

ou seja,

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^{-p}\varphi(x).$$

Aqui está um roteiro de como (3.1) será estebelecido (reforçando que tal processo é aplicado para funções p-homogêneas específicas):

1. Primeramente utilizamos a função *gama* como em (1.42) e o núcleo de Gauss definido por
$$G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$
de forma a obter uma expressão para $e^{t\Delta}\varphi$ para $t > 0$.

2. Utilizando o Teorema da Identidade (Teorema 1.15) de análise complexa podemos estender a expressão obtida em 1 anterior para it com $t > 0$, e assim, obtemos uma expressão para $e^{it\Delta}\varphi$ em termos da função H definida em (1.45).

3. Usando que $H(y; a, b)$ é separadamente analítica, concluímos que
$$e^{it\Delta}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

4. Formulando então uma expressão mais explícita para a função H, garantimos que
$$|(e^{it\Delta}\varphi)(x)| \leqslant K_1|x|^{-\mathrm{Re}(p)} + K_2|x|^{\mathrm{Re}(p)-n}$$
para $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ e K_1, K_2 dependendo de n, p, t e R.

5. Finalmente, utilizando 3 e 4 anteriores, concluímos que $e^{it\Delta}\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para
$$r > \max\left\{\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}, \frac{n}{n - \mathrm{Re}(p)}\right\}.$$

Seja w uma função em $S(\mathbb{R}^n)$. Sabe-se que $u(t, x) = (e^{it\Delta}w)(x)$ é a única solução para o problema de valor inicial envolvendo a equação linear de Schrödinger
$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(0) = \phi. \end{cases}$$
Definindo $u_\mu(t, x) := u(\mu^2 t, \mu x)$, não é difícil verificar que u_μ também satisfaz a equação linear de Schrödinger. Por outro lado, temos
$$u_\mu(0, x) = u(0, \mu x) = w(\mu x) = \delta_\mu w,$$
onde δ_μ é o operador dilatação por μ. Portanto, por unicidade de solução da equação linear de schrödinger em $S(\mathbb{R}^n)$, segue que
$$u_\mu(t) = e^{it\Delta}(\delta_\mu w) \tag{3.2}$$

Daí, como $u_\mu(t,x) = u(\mu^2 t, \mu x) = [\delta_\mu(e^{i\mu^2 t\Delta}w)](x)$, temos de (3.2) que

$$e^{it\Delta}(\delta_\mu w) = \delta_\mu(e^{i\mu^2 it\Delta}w). \tag{3.3}$$

Vejamos que a fórmula (3.3) também é válida para distribuições temperadas, onde para toda $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $\mu > 0$ definimos a distribuição $\delta_\mu f \in S'(\mathbb{R}^n)$ por

$$\langle \delta_\mu f, g\rangle := \mu^{-n}\langle f, \delta_{\frac{1}{\mu}} g\rangle \quad \forall\, g \in S(\mathbb{R}^n).$$

De fato, sejam $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ quaisquer. Utilizando (3.3), temos para todos $\mu > 0$ e $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle \delta_\mu(e^{i\mu^2 t\Delta}f), \psi\rangle &= \mu^{-n}\langle e^{i\mu^2 t\Delta}f, \delta_{\frac{1}{\mu}}\psi\rangle \\
&= \mu^{-n}\langle f, e^{i\mu^2 it\Delta}\delta_{\frac{1}{\mu}}\psi\rangle \\
&= \mu^{-n}\langle f, \delta_{\frac{1}{\mu}}(e^{it\Delta}\psi)\rangle \\
&= \langle \delta_\mu f, e^{it\Delta}\psi\rangle \\
&= \langle e^{it\Delta}(\delta_\mu f), \psi\rangle.
\end{aligned}$$

Como ψ é arbitrária, segue que

$$\delta_\mu(e^{i\mu^2 t\Delta}f) = e^{it\Delta}(\delta_\mu f), \tag{3.4}$$

e segue a afirmação. Em particular, se φ é uma função p-homogênea que define distribuição temperada (por exemplo, se $\varphi \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leqslant q \leqslant \infty$, então uma consequência da desigualdade de Hölder em espaços de Lorentz (Teorema 2.3) é que $\varphi \in S'(\mathbb{R}^n)$), então utilizando a fórmula (3.4) e a homogeneidade de φ, temos que

$$\mu^{-p}(e^{it\Delta}\varphi) = e^{it\Delta}(\delta_\mu\varphi) = \delta_\mu(e^{i\mu^2 t\Delta}\varphi),$$

e portanto,

$$e^{it\Delta}\varphi = \mu^{-p}\delta_\mu(e^{i\mu^2 t\Delta}f). \tag{3.5}$$

Em particular, se $\mu = t^{-\frac{1}{2}}$ com $t > 0$ em (3.5), então

$$e^{it\Delta}\varphi = t^{-\frac{p}{2}}\delta_{t^{-\frac{1}{2}}}(e^{i\Delta}\varphi).$$

Portanto, temos os seguintes fatos que podem facilitar nossas análises:

- $e^{i\Delta}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow e^{it\Delta}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall t > 0;$

- $e^{i\Delta}\varphi \in L^r, 0 < r \leqslant \infty \Rightarrow e^{it\Delta}\varphi \in L^r \quad \forall t > 0$, e vale a fórmula

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_r = \|t^{-\frac{p}{2}}(e^{i\Delta}\varphi)(t^{-\frac{1}{2}}\cdot)\|_r = \begin{cases} t^{\frac{n}{2r}-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}}\|e^{i\Delta}\varphi\|_r, & \text{se } r < \infty \\ t^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}}\|e^{i\Delta}\varphi\|_\infty, & \text{se } r = \infty. \end{cases} \tag{3.6}$$

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.2. *Uma função p-homogênea φ, onde $0 < \mathrm{Re}(p) < n$, é dita SC-regular se $e^{it\Delta}\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$ e todo r tal que*

$$r > \max\left\{\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}, \frac{n}{n - \mathrm{Re}(p)}\right\}.$$

Para tal r, $\|e^{it\Delta}\varphi\|_r$ claramente verifica a fórmula (3.6). Se em adição,

$$e^{it\Delta}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

para todo $t > 0$, então φ é dita SC^∞-regular.

Observe que dada uma função φ p-homogênea temos para todo $x \neq 0$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{|x|x}{|x|}\right) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-p} = w(x)|x|^{-p},$$

onde $w = \varphi\left(\frac{\cdot}{|\cdot|}\right)$ é uma função homogênea de grau 0. Convém então primeiramente nos focarmos sobre estudo do grupo de Schrödinger aplicado à função $|\cdot|^{-p}$, pois como vimos acima, todas as outras estão relacionadas a ela de certa forma.

Veja que se $\varphi = |\cdot|^{-p}$, então $\varphi \notin C(\mathbb{R}^n)$ e também $\varphi \notin L^r(\mathbb{R}^n)$ seja qual for $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Porém, o que veremos nos resultados a seguir, é que a imagem de φ pelo fluxo tem propriedades tanto de suavidade como de decaimento.

Proposição 3.1. *Seja $\varphi(x) = |x|^{-p}$ onde $0 < \mathrm{Re}(p) < n$. Para $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$(e^{it\Delta}\varphi)(x) = (4it)^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}H\left(\frac{|x|^2}{4t}; \frac{p}{2}, \frac{n-p}{2}\right),$$

onde H é a função definida em (1.45) por

$$H(y; a, b) = \int_0^1 e^{iyr}r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr,$$

para $a, b \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$ e $y \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Com efeito, utilizando a expressão da função Γ para $c = |x|^2$ e $z = \frac{p}{2}$ em (1.42) e a mudança de variáveis $t = \frac{1}{4s}$, temos para todo $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
|x|^{-p} = (|x|^2)^{-\frac{p}{2}} &= \Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty e^{-|x|^2 t} t^{\frac{p}{2}-1} dt \\
&= \Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4s}} \left(\frac{1}{4s}\right)^{\frac{p}{2}-1} \frac{1}{4s^2} ds \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4s}} s^{-\frac{p}{2}-1} ds \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4s}} s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty G_s(x) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds,
\end{aligned}$$

onde $G_s(x) = (4\pi s)^{-n} e^{\frac{|x|^2}{4s}}$ é o núcleo de Gauss. Vejamos que a integral acima é absolutamente convergente para cada $x \neq 0$, e também, é absolutamente convergente em $L^1(\mathbb{R}^n) + C_0(\mathbb{R}^n)$ no sentido de Bochner (veja [7] Cap.1). De fato, fixado $x \neq 0$ temos que $G_s(x) = (4\pi s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4s}} \to 0$ quando $s \to 0^+$, e daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < s < \delta \Rightarrow G_s(x) \leqslant 1.$$

Portanto, usando também que $e^{-\frac{|x|^2}{4s}} \leqslant 1\ \forall s > 0$, temos que

$$\int_0^\infty |G_s(x) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}| ds \leqslant \int_0^\delta s^{\frac{n}{2}-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}-1} ds + (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_\delta^\infty s^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}-1} ds < \infty,$$

pois $0 < \mathrm{Re}(p) < n$. Além disso, observe que

$$\int_0^\infty G_s(x) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds = \int_0^1 G_s(x) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds + \int_1^\infty G_s(x) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds,$$

onde temos que

$$\int_0^1 \|G_s(\cdot) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}\|_1 ds = \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}-1} ds < \infty \quad (\|G_s(\cdot)\|_1 = 1),$$

e

$$\int_0^\infty \|G_s(\cdot) s^{\frac{n}{2}-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}-1}\|_\infty ds \leqslant (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_1^\infty s^{-\frac{\mathrm{Re}(p)}{2}-1} ds < \infty.$$

E segue as afirmações. Portanto, temos

$$\varphi = 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty G_s(\cdot) s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1} ds,$$

e pela convergência da integral acima em $L^1(\mathbb{R}^n) + C_0(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar o semigrupo do calor $e^{t\Delta}$ para $t > 0$ em ambos lados da equação, onde

$$e^{t\Delta} f := G_t * f.$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
(e^{t\Delta}\varphi)(x) &= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} G_t(y)\int_0^\infty G_s(x-y)s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds\ dy \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty G_t(y)G_s(x-y)s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds\ dy \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} G_t(y)G_s(x-y)dy\ s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty (e^{t\Delta}G_s)(x)s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds, \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

onde comutamos as integrais acima utilizando o Teorema de Fubini, um vez que (por cáculos análogos aos feitos anteriormente)

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} G_t(y)G_s(x-y)dy\ s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds < \infty.$$

Note ainda que

$$(e^{t\Delta}G_s)^\wedge(\xi) = \widehat{G_t}(\xi)\widehat{G_s}(\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}e^{-4\pi^2 s|\xi|^2} = e^{-4\pi^2(t+s)|\xi|^2} = \widehat{G_{t+s}}(\xi),$$

e logo,

$$e^{t\Delta}G_s = G_{t+s}. \qquad (3.8)$$

Daí, por (3.7) e (3.8) temos que

$$e^{t\Delta}\varphi = 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^\infty G_{t+s}(\cdot)s^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}ds. \qquad (3.9)$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, vemos agora que a integral (3.9) acima converge absolutamente em $C_0(\mathbb{R}^n)$. Consideremos a mudança de variáveis $r = \frac{t}{s+t}$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$
\begin{aligned}
(e^{t\Delta}\varphi)(x) &= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_1^0 G_{\frac{t}{r}}(x)\left(\frac{t}{r}-t\right)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}\left(-\frac{t}{r^2}\right)dr \\
&= 4^{-\frac{p}{2}}(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^1 G_{\frac{t}{r}}t^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}}r^{\frac{p}{2}-\frac{n}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr \\
&= (4t)^{-\frac{p}{2}}(4\pi t)^{\frac{n}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^1 (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{r|x|^2}{4t}}r^{\frac{n}{2}}r^{\frac{p}{2}-\frac{n}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr \\
&= (4t)^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^1 e^{-\frac{r|x|^2}{4t}}r^{\frac{p}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Vejamos que a fórmula em (3.10) é válida não só para $t > 0$, mas para todo $t \in \mathbb{C}$ tal que $Re(t) > 0$. Para isso, considere uma função $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, sabe-se que a aplicação $t \mapsto \langle e^{t\Delta}\varphi, \eta\rangle$ é analítica no semiplano $Re(t) > 0$ e contínua no semiplano

$\mathsf{Re}(t) \geqslant 0$. Por outro lado, se multiplicarmos o lado direito da igualdade em (3.10) por $\eta(x)$ e integrarmos em $\mathbb{R}^n$, o resultado será uma função analítica no semiplano $\mathsf{Re}(t) > 0$. Como estas funções coincidem em todo $t > 0$, segue pelo Teorema da identidade (Teorema 1.15) que elas coincidem em todo o semiplano $\mathsf{Re}(t) > 0$. Por continuidade, elas também coincidem em $t = i\tau$ para todo $\tau \in \mathbb{R}-\{0\}$. Assim, como η é arbitrária, temos a igualdade de duas distribuições para os valores de t especificados, e com mais razão, a igualdade de suas funções representantes . Daí

$$(e^{it\Delta}\varphi)(x) = (4it)^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^1 e^{i\frac{|x|^2}{4t}r} r^{\frac{p}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr$$

para todo $t > 0$, e segue o resultado. □

Corolário 3.1. *Sob as hipóteses da Proposição 3.1 anterior segue que:*

(a) $e^{it\Delta}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $t > 0$*;*

(b) $e^{it\Delta}\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $t > 0$*, e vale*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_\infty \leqslant C(p)t^{\frac{-\mathsf{Re}(p)}{2}}.$$

Se em adição $p \in \mathbb{R}$*, então*

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_\infty = |(e^{it\Delta})(0)| = (4t)^{\frac{-p}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Demonstração. (b) De fato, note que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos pela Proposição 3.1

$$\begin{aligned}
|(e^{it\Delta}\varphi)(x)| &= \left|(4it)^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}\int_0^1 e^{i\frac{|x|^2}{4t}r} r^{\frac{p}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr\right| \\
&\leqslant (4t)^{-\frac{p}{2}}|e^{-\frac{\pi p}{4}i}|\int_0^1 r^{\frac{p}{2}-1}(1-r)^{\frac{n}{2}-\frac{p}{2}-1}dr \\
&= C(p)(4t)^{-\frac{p}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})},
\end{aligned}$$

onde $C(p) = |e^{-\frac{\pi p}{4}i}|$. Portanto,

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_\infty \leqslant C(p)(4t)^{-\frac{p}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

No caso particular que $p \in \mathbb{R}$ temos $C(p) = 1$, e logo,

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_\infty \leqslant (4t)^{-\frac{p}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-p}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = |(e^{it\Delta}\varphi)(0)|,$$

e segue o resultado. □

Lema 3.1. *Seja* $a \in \mathbb{C}$ *tal que* $0 < \mathsf{Re}(a) < 1$, *e seja* Ω *o domínio padrão do logarítimo, i.e.,* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$. *Então* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *definida por*

$$f(w) = \int_0^\infty \frac{1}{s^a(s+w)} ds \tag{3.11}$$

é analítica.

Demonstração. Vejamos primeiramente que f está bem definida para todo $w \in \Omega$. Com efeito, fixe $w_0 = x + iy \in \Omega$. Daí, seja $A > 0$ tal que $A > 2|w_0|$. Logo, para todo $s \geqslant A$ temo que

$$s > 2|w_0| \geqslant 2|\mathsf{Re}(w_0)| = 2|x|,$$

e assim, $s + x > 0$ e $s > -2x$. Portanto,

$$|s + w_0| \geqslant |\mathsf{Re}(s + w_0)| = |s + x| = s + x > s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}.$$

Logo,

$$\int_A^\infty \left| \frac{1}{s^a(s+w_0)} \right| ds \leqslant \int_A^\infty \frac{2}{s^{\mathsf{Re}(a)+1}} < \infty,$$

pois $1 < \mathsf{Re}(a) + 1$. Além disso, note que se $y = 0$ então $x > 0$, e daí, $|s + w_0| \geqslant s + x > x$. Se $y \neq 0$, então $|s + w_0| \geqslant |y| > 0$. Assim, temos

$$\int_0^A \left| \frac{1}{s^a(s+w_0)} \right| ds \leqslant \begin{cases} \displaystyle\int_0^A \frac{1}{s^{\mathsf{Re}(a)}|y|} ds, & \text{se } y \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^A \frac{1}{s^{\mathsf{Re}(a)} x} ds, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

que em todo caso é finita, pois $0 < \mathsf{Re}(a) < 1$. Com mais razão

$$\int_0^\infty \frac{1}{s^a(s+w_0)} ds < \infty,$$

e segue a afirmação. Considere agora

$$\Omega_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} : \ |\mathsf{Im}(w)| > \varepsilon\} \subseteq \Omega.$$

Vejamos que f é analítica em Ω_ε para todo $\varepsilon > 0$. De fato, defina

$$g(w) := \int_0^1 \frac{1}{s^a(s+w)} ds, \quad h(w) := \int_1^\infty \frac{1}{s^a(s+w)} ds$$

para todo $w \in \Omega$. Então, é suficiente provarmos que g, h são analíticas em Ω_ε. Seja

$$K(s, w) = \frac{1}{s^a(s+w)}, \quad (s, w) \in [1, \infty) \times \Omega_\varepsilon.$$

Note que :

i) K é contínua em $[1, \infty) \times \Omega_\varepsilon$ (pois o denominador de K é contínuo em $[1, \infty) \times \Omega_\varepsilon$ e nunca se anula).

ii) Fixado $s \in [1, \infty)$, temos que $w \in \Omega_\varepsilon \mapsto s^a(s + w)$ é analítica e nunca se anula em Ω_ε, e portanto, $K(s, \cdot)$ é analítica em Ω_ε para todo $s \in [1, \infty)$ fixado.

iii) Sejam $\lambda, R > 0$ quaisquer. Considere então $A > 2R$ tal que

$$\int_A^\infty \frac{2}{s^{Re(a)+1}} ds < \lambda.$$

Para todo $s \geqslant A,\ w = x + iy \in \Omega_\varepsilon \cap B[0, 2R]$, temos como já visto anteriormente

$$s + x > 0, \quad x > -\frac{s}{2},$$

e assim, $|s + w| > \frac{s}{2}$. Logo,

$$\int_A^\infty \left| \frac{1}{s^a(s + w)} \right| ds \leqslant \int_A^\infty \frac{1}{s^{Re(a)}|s + w|} ds \leqslant \int_A^\infty \frac{2}{s^{Re(a)+1}} ds < \lambda.$$

Portanto, pelo Teorema 1.18, segue que h é analítica em Ω_ε. Agora, para a análise da função g, defina para todo $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(w) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{s^a(s + w)} ds, \quad w \in \Omega_\varepsilon.$$

Para $K(s, w) = \frac{1}{s^a(s+w)}$ é fácil ver que:

i) K é contínua em $[\frac{1}{n}, 1] \times \Omega_\varepsilon$.

ii) $K(s, \cdot)$ é analítica em Ω_ε para toda $s \in [\frac{1}{n}, 1]$.

Assim, pelo Teorema 1.17, segue que g_n é analítica em Ω_ε para todo $n \in \mathbb{N}$. Provemos que $g_n \to g$ uniformemente em Ω_ε. De fato, para todo $w \in \Omega_\varepsilon,\ n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} |g_n(w) - g(w)| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{s^a(s + w)} ds \right| &\leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{s^{Re(a)}|s + w|} ds \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{s^{Re(a)}\varepsilon^2} ds \\ &= \left[\frac{s^{1-Re(a)}}{\varepsilon^2} \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{1-Re(a)}\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

disso segue a afirmação. Portanto, pelo Teorema 1.16, segue que g é analítica em Ω_ε. Assim, concluimos que f é analítica em Ω_ε para todo $\varepsilon > 0$. Consequentemente, f é analítica em $\mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^-$ onde

$$\mathbb{H}^+ = \{w \in \mathbb{C} : Im(w) > 0\},$$

$$\mathbb{H}^- = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}.$$

Vejamos que f é contínua em $\mathbb{R}_+$. Com efeito, fixe $x_0 > 0$ e seja $\lambda > 0$. Note que se $w = x + iy \in \Omega$, $|w - x_0| < \frac{x_0}{2}$ então

$$x_0 - x \leqslant |x - x_0| \leqslant |w - x_0| < \frac{x_0}{2},$$

e assim, $x > \frac{x_0}{2}$, o que implica também em $|w+s| \geqslant x+s > \frac{x_0}{2}$ para todo $s > 0$. Portanto, se $|w - x_0| < \min\{\frac{x_0}{2}, \lambda\}$ temos

$$\begin{aligned}
|f(w) - f(x_0)| &\leqslant \int_0^1 \left| \frac{1}{s^a(s+w)} - \frac{1}{s^a(x_0+s)} \right| ds + \int_1^\infty \left| \frac{1}{s^a(w+s)} - \frac{1}{s^a(x_0(x_0+s))} \right| ds \\
&= \int_0^1 \frac{|w - x_0|}{s^{\mathrm{Re}(a)}|w+s||x_0+s|} ds + \int_1^\infty \frac{|w-x_0|}{s^{\mathrm{Re}(a)}|w+s||x_0+s|} ds \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{\lambda}{s^{\mathrm{Re}(a)}\left(\frac{x_0}{2}\right)x_0} ds + \int_1^\infty \frac{\lambda}{s^{\mathrm{Re}(a)+1}\left(\frac{x_0}{2}\right)} ds \\
&= C(x_0, a) \cdot \lambda,
\end{aligned}$$

e segue a afirmação. Então, pelo Teorema 1.19, f é analítica em todo Ω. □

Lema 3.2. *Se $y > 0$, $\mathrm{Re}(a) > 0$ e $\mathrm{Re}(b) > 0$, e se j e m são inteiros não negativos tal que*

$$j + 2 > \mathrm{Re}(a) \ \textit{e} \ m + 2 > \mathrm{Re}(b),$$

então

$$\begin{aligned}
H(y; a, b) &= y^{-a} \sum_{k=0}^{m} C_k(a,b) e^{\frac{(a+k)\pi i}{2}} y^{-k} + C_{m+1}(a,b) y^{-a-m-1} \times \\
&\frac{m+1}{\Gamma(m+2-b)} \int_0^\infty \int_0^1 (1-s)^m \left(-i - \frac{st}{y}\right)^{-a-m-1} ds e^{-t} t^{m+1-b} dt \\
&+ e^{iy} y^{-b} \sum_{k=1}^{j} C_k(b,a) e^{-\frac{(b+k)\pi i}{2}} y^{-k} + C_{j+1}(b,a) e^{iy} y^{-b-j-1} \times \\
&\frac{j+1}{\Gamma(j+2-a)} \int_0^\infty \int_0^1 (1-s)^j \left(i - \frac{st}{y}\right)^{-b-j-1} ds \ e^{-t} t^{j+1-a} dt,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde

$$C_k(a,b) = \frac{\Gamma(a+k)}{k!} \frac{\Gamma(k+1-b)}{\Gamma(1-b)}. \tag{3.13}$$

Demonstração. Assuma primeiramente que

$$0 < \mathrm{Re}(a) < 1 \ , \quad 0 < \mathrm{Re}(b) < 1.$$

Daí, usando a função gama com $c = r$, $z = 1 - a$, e também com $c = 1 - r$, $z = 1 - b$ temos

$$\begin{aligned}
&\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)H(y; a, b) \\
&= \Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\int_0^1 e^{iyr} r^{a-1}(1-r)^{b-1}dr \\
&= \Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\int_0^1 e^{iyr}\Gamma(1-a)^{-1}\int_0^\infty e^{-rs}s^{-a}ds\Gamma(1-b)^{-1}\int_0^\infty e^{-(1-r)t}t^{-b}dt\ dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1 e^{iyr}e^{-rs}s^{-a}e^{-(1-r)t}t^{-b}drdsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^1 e^{r(iy-s+t)}e^{-t}s^{-a}t^{-b}drdsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{iy-s+t}-1}{iy-s+t}e^{-t}s^{-a}t^{-b}dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{s^{-a}}{-iy-t+s}ds\ e^{-t}t^{-b}dt + e^{iy}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t^{-b}}{iy-s+t}dt\ e^{-s}s^{-a}ds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{s^{-a}}{-iy-t+s}ds\ e^{-t}t^{-b}dt + e^{iy}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{s^{-b}}{iy-t+s}ds\ e^{-t}t^{-a}dt. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Convém então considerar a função

$$f(w) := \int_0^\infty \frac{s^{-a}}{w+s}ds,$$

onde $w \in \Omega$ (Ω domínio padrão do ramo logarítimo), $0 < \mathrm{Re}(a) < 1$. Note que

$$\begin{aligned}
f(1) = \int_0^\infty \frac{s^{-a}}{1+s}ds &\overset{u=1+s}{=} \int_1^\infty \frac{1}{u}(u-1)^{-a}du \\
&\overset{t=\frac{1}{u}}{=} \int_0^1 t\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-a}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t^{1-a}}(1-t)^{-a}dt \\
&= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{(1-a)-1} \\
&= B(a, 1-a) = \Gamma(1-a)\Gamma(a).
\end{aligned}$$

Daí, para $w > 0$, usando a mudança de variáveis $s = wt$, temos

$$\begin{aligned}
f(w) = \int_0^\infty \frac{s^{-a}}{w+s}ds = \int_0^\infty \frac{(wt)^{-a}}{w+wt}wdt &= w^{-a}\int_0^\infty \frac{t^{-a}}{1+t}dt \\
&= w^{-a}f(1) \\
&= w^{-a}\Gamma(1-a)\Gamma(a).
\end{aligned}$$

Logo, como pelo Lema 3.1 a função f é analítca em Ω e também $w \mapsto w^{-a}\Gamma(1-a)\Gamma(a) = e^{-a\log(w)}\Gamma(1-a)\Gamma(a)$ é analítica em Ω, então pelo Teorema da identidade, $f(w) = w^{-a}\Gamma(1-a)\Gamma(a)$ para todo $w \in \Omega$. Como $y > 0$ então $-iy-t,\ iy-t \in \Omega$ para todo $t > 0$, e daí, usando esta expressão de f em (3.10) temos

$$\begin{aligned} H(y;a,b) &= \frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\times \\ &\int_0^\infty \Gamma(1-a)\Gamma(a)(-iy-t)^{-a}e^{-t}t^{-b}dt + e^{iy}\int_0^\infty \Gamma(1-b)\Gamma(b)(iy-t)^{-b}e^{-t}t^{-a}dt \\ &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-b)}\int_0^\infty (-iy-t)^{-a}e^{-t}t^{-b}dt + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-a)}e^{iy}\int_0^\infty (iy-t)^{-b}e^{-t}t^{-a}dt. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Por fim, iremos expressar $(-iy-t)^{-a}$, $(iy-t)^{-b}$ em suas fórmulas de Taylor finitas centradas em $t = 0$ com resto integral. Definindo

$$f(t) = (-iy-t)^{-a}\ , \quad g(t) = (iy-t)^{-b} \tag{3.16}$$

temos

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t) &= a(a+1)\cdots(a+k-1)(-iy-t)^{-a-k}, \\ g^{(k)}(s) &= b(b+1)\cdots(b+k-1)(iy-s)^{-b-k}. \end{aligned}$$

Aém disso, temos

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{1}{m!}\int_0^t (t-s)^m f^{(m+1)}(s)ds \tag{3.17}$$

e

$$g(t) = \sum_{k=0}^{j}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{1}{j!}\int_0^t (t-s)^j f^{(j+1)}(s)ds, \tag{3.18}$$

Por (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), segue que

$$\begin{aligned} H(y;a,b) &= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-b)}\sum_{k=0}^{m}\int_0^\infty \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!}(-iy)^{-a-k}t^{k-b}e^{-t}dt \\ &+ \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-b)}\int_0^\infty \frac{1}{m!}\int_0^t (t-s)^m a(a+1)\cdots(a+m)(-iy-s)^{-a-m-1}ds\ e^{-t}t^{-b}dt \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-a)}e^{iy}\sum_{k=0}^{j}\int_0^\infty \frac{b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!}(iy)^{-b-k}t^{k-a}e^{-t}dt \\ &+ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-a)}e^{iy}\sum_{0}^{j}\frac{1}{j!}\int_0^t (t-s)^j b(b+1)\cdots(b+j)(iy-s)^{-b-j-1}ds\ e^{-t}t^{-a}dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Observe que valem as igualdades

$$
\begin{aligned}
\Gamma(a)\cdot a(a+1)\dots(a+k-1) &= \Gamma(a+k),\\
\int_0^\infty e^{-t}t^{k-b}dt &= \Gamma(k-b+1),\\
a(a+1)\dots(a+m) &= \Gamma(a+m+1),\\
\Gamma(b)\cdot b(b+1)\dots(b+k-1) &= \Gamma(b+k),\\
\int_0^\infty e^{-t}t^{k-a}dt &= \Gamma(k-a+1),\\
b(b+1)\dots(b+m) &= \Gamma(b_m+1).
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Além disso, fazendo as mudanças $u = s/t$ e depois $s = u$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^m(-iy-s)^{-a-m-1}ds = \int_0^1 (1-s)(-iy-ts)^{-a-m-1}t^{m+1}ds,\\
&\int_0^t (t-s)^j(iy-s)^{-b-j-1}ds = \int_0^1 (1-s)^j(iy-ts)^{-b-j-1}t^{j+1}ds.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Portanto de (3.19), (3.20) e (3.21), temos

$$
\begin{aligned}
&H(y;a,b) =\\
&y^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k)}{k!}\frac{\Gamma(k-b+1)}{\Gamma(1-b)}e^{\frac{\pi}{2}(a+k)i}y^{-k}\\
&+\frac{\Gamma(a+m+1)}{m!\Gamma(1-b)}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)(-iy-ts)^{-a-m-1}ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt\\
&+e^{iy}y^{-b}\sum_{k=0}^{j}\frac{\Gamma(b+k)}{k!}\frac{\Gamma(k+1-a)}{\Gamma(1-a)}e^{-\frac{\pi}{2}(b+k)i}y^{-k}\\
&+\frac{\Gamma(b+j+1)}{j!\Gamma(1-a)}e^{iy}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)^j(iy-ts)^{-b-j-1}ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt\\
&=y^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(a+k)}{k!}\frac{\Gamma(k-b+1)}{\Gamma(1-b)}e^{\frac{\pi}{2}(a+k)i}y^{-k}\\
&+\frac{\Gamma(a+m+1)}{m!\Gamma(1-b)}y^{-a-m-1}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)\left(-i-\frac{ts}{y}\right)^{-a-m-1}ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt\\
&+e^{iy}y^{-b}\sum_{k=0}^{j}\frac{\Gamma(b+k)}{k!}\frac{\Gamma(k+1-a)}{\Gamma(1-a)}e^{-\frac{\pi}{2}(b+k)i}y^{-k}\\
&+\frac{\Gamma(b+j+1)}{j!\Gamma(1-a)}e^{iy}y^{-b-j-1}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)^j\left(i-\frac{ts}{y}\right)^{-b-j-1}ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a+m+1)}{m!\Gamma(1-b)} &= \frac{\Gamma(a+m+1)}{(m+1)!}\frac{\Gamma(m+2-b)}{\Gamma(1-b)}\frac{m+1}{\Gamma(m+2-b)}\\ &= C_{m+1}(a,b)\frac{m+1}{\Gamma(m+2-b)},\end{aligned}\tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(b+j+1)}{j!\Gamma(1-a)} &= \frac{\Gamma(b+j+1)}{(j+1)!}\frac{\Gamma(j+2-a)}{\Gamma(1-a)}\frac{j+1}{\Gamma(j+2-a)}\\ &= C_{j+1}(b,a)\frac{j+1}{\Gamma(j+2-a)}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Assim, de (3.22), (3.23) e (3.24) concluímos que

$$\begin{aligned}H(y;a,b) = y^{-a}\sum_{k=0}^{m} C_k(a,b)e^{\frac{(a+k)\pi i}{2}}y^{-k} + C_{m+1}(a,b)y^{-a-m-1}\times\\ \frac{m+1}{\Gamma(m+2-b)}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)^m\left(-i-\frac{st}{y}\right)^{-a-m-1}ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt+\\ +e^{iy}y^{-b}\sum_{k=1}^{j}C_k(b,a)e^{-\frac{(b+k)\pi i}{2}}y^{-k}+C_{j+1}(b,a)e^{iy}y^{-b-j-1}\times\\ \frac{j+1}{\Gamma(j+2-a)}\int_0^\infty\int_0^1(1-s)^j\left(i-\frac{st}{y}\right)^{-b-j-1}ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt,\end{aligned}$$

e então, obtemos a formulação (3.12)-(3.13). Note que estabelecemos a fórmula (3.12) apenas para $y>0$, $0<\mathrm{Re}(a)<1$ e $0<\mathrm{Re}(b)<1$. Por outro lado, a função à direita de (3.12) é analítica em a para $0<\mathrm{Re}(a)<j+2$ com $y>0$ e b ($0<\mathrm{Re}(b)<m+2$) fixados, e também analítica em b para $0<\mathrm{Re}(b)<m+2$ com $y>0$ e a ($0<\mathrm{Re}(a)<j+2$) fixados. Como H é também analítica separadamente então, pelo Teorema da identidade, (3.12) é válido para todos $y>0$ e a,b nas regiões especificadas no lema. □

Proposição 3.2. *Seja* $\varphi=|x|^{-p}$ *onde* $0<\mathrm{Re}(p)<n$. *Então* $e^{it\Delta}\varphi\in L^r(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $t>0$ *e r tal que*

$$r>\max\left\{\frac{n}{n-\mathrm{Re}(p)},\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}\right\};$$

e além disso, $\|e^{it\Delta}\varphi\|_r$ *verfica a fórmula* (3.6).

Demonstração. Pelo Corolário 3.1 sabemos que $e^{it\Delta}\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $t>0$. Daí, fixado $R>0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|e^{it\Delta}\varphi|^r dx &= \int_{|x|\leqslant R}|e^{it\Delta}\varphi|^r dx+\int_{|x|>R}|e^{it\Delta}\varphi|^r dx\\ &\leqslant C(n)\|e^{it\Delta}\varphi\|_\infty^r+\int_{|x|>R}|e^{it\Delta}\varphi|^r dx,\end{aligned}$$

e assim, é suficiente provarmos que $e^{it\Delta}\varphi \in L^r(\mathbb{R}^n \setminus B[0,R])$ para todo $t > 0$. Fixe $\tau > 0$, e sejam j, m inteiros positivos tais que $j + 2 > \mathrm{Re}(p/2) := a$ e $m + 2 > \mathrm{Re}(\frac{n-p}{2}) =: b$. Temos pela Proposição 3.1 e o Lema 3.2 que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$(e^{i\tau\Delta}\varphi)(x) = (4i\tau)^{-\frac{p}{2}}\Gamma(p/2)^{-1}H\left(\frac{|x|^2}{4\tau}; \frac{p}{2}, \frac{n-p}{2}\right) =$$

$$= (4\tau)^{-\frac{p}{2}}e^{-\frac{p\pi i}{4}}\Gamma(p/2)^{-1} \times \left[\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-\frac{p}{2}} \sum_{k=0}^{m} C_k(a,b)e^{\frac{(\frac{p}{2}+k)\pi i}{2}}\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-k} + \right.$$

$$+ C_{m+1}(a,b)\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-a-m-1}\frac{m+1}{\Gamma(m+2-b)}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^m\left(-i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-a-m-1} ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt +$$

$$+ e^{i\frac{|x|^2}{4\tau}}\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-\frac{n-p}{2}}\sum_{k=1}^{j} C_k(b,a)e^{-\frac{(\frac{n-p}{2}+k)\pi i}{2}}\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-k} + C_{j+1}(b,a)e^{i\frac{|x|^2}{4\tau}}\left(\frac{|x|^2}{4\tau}\right)^{-b-j-1}\times$$

$$\left.\frac{j+1}{\Gamma(j+2-a)}\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^j\left(i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-b-j-1} ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt\right] =$$

$$= |x|^{-p}\sum_{k=0}^{m} A_k(a,b)e^{\frac{k\pi i}{2}}\left(\frac{4\tau}{|x|^2}\right)^k + |x|^{-p}A_{m+1}(a,b)\left(\frac{4\tau}{|x|^2}\right)^{m+1}\frac{(m+1)e^{-\frac{p\pi i}{4}}}{\Gamma(m+2-b)}\times$$

$$\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^m\left(-i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-a-m-1} ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt +$$

$$+ |x|^{-n+p}e^{i\frac{|x|^2}{4\tau}}(4\tau)^{\frac{n}{2}-p}\sum_{k=1}^{j} A_k(b,a)e^{-\frac{(n+2k)\pi i}{4}}\left(\frac{4\tau}{|x|^2}\right)^k +$$

$$|x|^{-n+p}A_{j+1}(b,a)e^{i\frac{|x|^2}{4\tau}}(4\tau)^{\frac{n}{2}-p}\left(\frac{4\tau}{|x|^2}\right)^{j+1}\times$$

$$\frac{(j+1)e^{-\frac{p\pi i}{4}}}{\Gamma(j+2-a)}\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^j\left(i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-b-j-1} ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt,$$

onde $A_k(a,b) := \Gamma(p/2)^{-1}C_k(a,b)$. Além disso, temos que para todo $|x| > R$

$$\left|\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^m\left(-i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-a-m-1} ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt\right|$$

$$\leqslant \int_0^\infty\int_0^1 \left|i+\frac{4\tau st}{|x|^2}\right|^{-\mathrm{Re}(a)-m-1} ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^1 \left|1+\frac{(4\tau st)^2}{|x|^4}\right|^{\frac{-\mathrm{Re}(a)-m-1}{2}} ds\ e^{-t}t^{m+1-b}dt$$

$$\leqslant \int_0^\infty e^{-t}t^{m+1-b}dt = \Gamma(m+2-b),$$

e analogamente,

$$\left|\int_0^\infty\int_0^1 (1-s)^j\left(i-\frac{4\tau st}{|x|^2}\right)^{-b-j-1} ds\ e^{-t}t^{j+1-a}dt\right| \leqslant \Gamma(j+2-a).$$

Em suma, temos que para todo $|x| > R$

$$|(e^{i\tau\Delta}\varphi)(x)| \leqslant K_1 \cdot |x|^{-\mathrm{Re}(p)} + K_2 \cdot |x|^{-n+\mathrm{Re}(p)}$$

onde K_1, K_2 dependem de a, b, j, m, τ e R. Como $|\cdot|^{-\mathrm{Re}(p)}, |\cdot|^{-n+\mathrm{Re}(p)} \in L^r(\mathbb{R}^n \setminus B[0, R])$ para todo r tal que

$$r > \max\left\{\frac{n}{\mathrm{Re}(p)}, \frac{n}{n - \mathrm{Re}(p)}\right\},$$

então segue o resultado. □

O Corolário 3.1 e a Proposição 3.2 nos garantem o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *Seja* $\varphi = |x|^{-p}$ *com* $0 < \mathrm{Re}(p) < n$. *Então* φ *é* SC^∞*-regular.*

Nosso objetivo agora é obter o mesmo resultado da Proposição 3.3 anterior mas agora para φ da forma

$$\varphi(x) = \frac{P_k(x)}{|x|^k}\frac{1}{|x|^p},$$

onde $P_k(x)$ é polinômio harmônico homogêneo de grau k. Para isso, precisaremos dos seguintes resultados.

Teorema 3.1. *Suponha que* $P_k(x)$ *é um polinômio homogêneo de grau* k *em* $\mathbb{R}^n$, *i.e,*

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha x^\alpha$$

e também

$$\Delta P_k = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n.$$

Então

$$\mathcal{F}\left(P_k e^{-\pi|\cdot|^2}\right) = (-i)^k P_k e^{-\pi|\cdot|^2}, \tag{3.25}$$

$\mathcal{F}$ *sendo a tranformada de Fourier em* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. É suficiente provarmos que

$$(-i)^k P_k(\xi) e^{-\pi|\xi|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x) e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i \xi\cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sabe-se que $e^{-\pi|\cdot|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$, e logo, temos também $P_k e^{-\pi|\cdot|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$. Daí, utilizando as propriedades em (1.23) e (1.24) para tranformada de Fourier e o Exemplo 1.4, temos

$$\begin{aligned} P_k(D)\left[e^{-\pi|\xi|^2}\right] = P_k(D)\left[(e^{-\pi|\cdot|^2})^\wedge(\xi)\right] &= \left[P_k(-2\pi i\cdot)e^{-\pi|\cdot|^2}\right]^\wedge(\xi) \\ &= (-2\pi i)^k \left[P_k(\cdot)e^{-\pi|\cdot|^2}\right]^\wedge(\xi) \\ &= (-2\pi i)^k \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x) e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i\xi\cdot x} dx., \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde

$$P_k(D) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha \partial^\alpha.$$

Por outro lado, é fácil ver que $P_k(D)e^{-\pi|\xi|^2}$ é da forma $\bar{Q}(\xi)e^{-\pi|\xi|^2}$ onde $\bar{Q}(\xi)$ é um polinômio em $\mathbb{R}^n$. Daí, definindo $Q(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\bar{Q}(\xi)$, temos por (3.26) que

$$Q(\xi)e^{-\pi|\xi|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x)e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx. \tag{3.27}$$

Portanto, se provarmos que $Q(\xi) = (-i)^k P_k(\xi)$ está finalizada a demonstração. Mas, de fato, por (3.27) temos

$$\begin{aligned}
Q(\xi) &= e^{\pi|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n} P_k(x)e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi i\xi, x}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x)e^{-\pi(|x|^2+2i\xi\cdot x-|\xi|^2)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x)e^{-\pi[(x_1+i\xi_1)^2+\ldots+(x_n+i\xi_n)^2]}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{r\neq j} e^{-\pi(x_r+i\xi_r)^2}\left[\int_{\mathbb{R}} P_k(x)e^{-\pi(x_j+i\xi_j)^2}dx_j\right]d\bar{x},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $1 \leqslant j \leqslant n$. Agora, fixados $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n, \xi_j \in \mathbb{R}$ ($\xi_j \neq 0$) quaisquer, defina o polinômio $p^j(y) = P_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Note que, como

$$|p^j(y - ti\xi_j)|e^{-\pi|y|^2} \to 0$$

quando $|y| \to +\infty$ uniformemente em $0 \leqslant t \leqslant 1$, então para $\varepsilon > 0$ artbitrário, existe $R_0 > 0$ tal que

$$|y| > R_0 \Rightarrow |p^j(y - ti\xi_j)|e^{-\pi y^2} < \frac{\varepsilon}{|\xi_j|} \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Daí, para $R > R_0$, considere a curva complexa fechada e suave por partes $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, onde

$$\begin{cases}
\gamma_1(t) = t, \quad -R \leqslant t \leqslant R \\
\gamma_2(t) = R - ti\xi_j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\
\gamma_3(t) = -t - i\xi_j, \quad -R \leqslant t \leqslant R \\
\gamma_4(t) = -R - (1-t)i\xi_j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{cases}$$

Como a aplicação $z \mapsto p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}$ é analítica em $\mathbb{C}$, então pelo teorema de Cauchy

$$0 = \int_\gamma p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz = \sum_{r=1}^{4}\int_{\gamma_r} p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz. \tag{3.29}$$

Mas, por um lado

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz + \int_{\gamma_3} p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz = \\
&= \int_{-R}^{R} p^j(t)e^{-\pi(t+i\xi_j)}dt + \int_{-R}^{R} p^j(-t-i\xi_j)e^{-\pi(-t)^2}(-1)dt \\
&= \int_{-R}^{R} p^j(t)e^{-\pi(t+i\xi_j)}dt - \int_{-R}^{R} p^j(t-i\xi_j)e^{-\pi t^2}dt. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_2} p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz + \int_{\gamma_4} p^j(z)e^{-\pi(z+i\xi_j)^2}dz \\
&= \int_0^1 p^j(R-ti\xi_j)e^{-\pi(R+(1-t)i\xi_j)^2}(-i\xi_j)dt \\
&+ \int_0^1 p^j(-R-(1-t)i\xi_j)e^{-\pi(-R-ti\xi_j)^2}(i\xi_j)dt. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

De (3.29), (3.30) e (3.31) segue que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-R}^{R} p^j(t)e^{-\pi(t+i\xi_j)}dt - \int_{-R}^{R} p^j(t-i\xi_j)e^{-\pi t^2}dt\right| \\
&= |\xi_j|\left|\int_0^1 p^j(R-ti\xi_j)e^{-\pi(R+(1-t)i\xi_j)^2}dt\right. \\
&\left.- \int_0^1 p^j(-R-(1-t)i\xi_j)e^{-\pi(-R-ti\xi_j)^2}dt\right| \\
&\leqslant |\xi_j|\left(\int_0^1 |p^j(R-ti\xi_j)|e^{-\pi R^2}dt + \int_0^1 |p^j(-R-(1-t))|e^{-\pi R^2}dt\right) \\
&< |\xi_j|\left(2\frac{\varepsilon}{|\xi_j|}\right) = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como isto é válido para todo $R > R_0$, então

$$\int_{\mathbb{R}} p^j(t)e^{-\pi(t+i\xi_j)^2}dt = \int_{\mathbb{R}} p^j(t-i\xi_j)e^{-\pi t^2}dt.$$

A identidade acima é óbvia para $\xi_j = 0$. Daí, temos em (3.28) que

$$Q(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{r\neq j} e^{-\pi(x_r+i\xi_r)^2}\left[\int_{\mathbb{R}} P_k(x-i\xi_j)e^{-\pi x_j^2}dx_j\right]d\bar{x}.$$

Aplicando o mesmo processo nas demais variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
Q(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_k(x-i\xi)e^{-\pi|x|^2}dx \\
&= (-i)^k\int_{\mathbb{R}^n} P_k(ix+\xi)e^{-\pi|x|^2}dx.
\end{aligned}$$

Daí, utilizando novamente a ideias anteriores para fazer a mudança "$u = ix$", temos que

$$\begin{aligned}
Q(\xi) = (-i)^k \int_{\mathbb{R}^n} P_k(u+\xi)e^{-\pi|u|^2}dx &= (-i)^k \int_0^\infty e^{-\pi r^2} \int_{|u|=r} P_k(u+\xi)dS(u)dr \\
&= (-i)^k \int_0^\infty e^{-\pi r^2} n|B(0,1)|r^{n-1}P_k(\xi)dr \\
&= (-i)^k P_k(\xi) \int_0^\infty \int_{|x|=r} e^{-\pi|x|^2}dS(x)dr \\
&= (-i)^k P_k(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}dx \\
&= (-i)^k P_k(\xi),
\end{aligned}$$

onde o fato de $P_k(x)$ ser harmônico garante a seguinte fórmula do valor médio:

$$n|B(0,1)|r^{n-1}P_k(\xi) = \int_{|u|=r} P_k(u+\xi)dS(u).$$

E segue o resultado. □

Observação 3.1. *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *e* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ *funções radiais. Mesmo com* f, g *definidas em domínios diferentes, o fato de serem radiais permite estabelecer uma noção de igualdade entre elas, i.e*

$$f = g \quad \textit{se, e somente se,} \quad f(r) = g(r)\ \forall r \geqslant 0.$$

Corolário 3.2. *Seja* $P_k(x)$ *é um polinômio harmônico homogêneo de grau* k *em* $\mathbb{R}^n$*. Suponha que* f *é radial e* $P_k f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*. Então* $\mathcal{F}(P_k f)$ *é também da forma* $P_k g$ *com* g *função radial. Além disso, definindo* $g := \mathcal{F}_{n,k}(f)$*, a transformação* $\mathcal{F}_{n,k}$ *satisfaz*

$$\mathcal{F}_{n,k} = (-i)^k \mathcal{F}_{n+2k,0}, \tag{3.32}$$

onde a igualdade acima ocorre no sentido da Observação 3.1 e $\mathcal{F}_{n+2k,0}$ *representa a transformada de Fourier em* $\mathbb{R}^{n+2k}$*.*

Demonstração. Com efeito, considere o seguinte espaço de Hilbert de funções radiais

$$R := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ radial} : \int_0^\infty |\varphi(r)|^2 r^{2k+n-1} dr < \infty \right\},$$

com o produto interno natural

$$\langle \varphi, \psi \rangle_R = \int_0^\infty \varphi(r)\overline{\psi(r)} r^{2k+n-1} dr.$$

Suponha, sem perda de generalidade, $P_k(x)$ normalizado, i.e.

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_k(x)|^2 dS(x) = 1.$$

É fácil ver que $P_k f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $f \in R$. Além disso, $f \in R$ se, e só se, $f \in L^2(\mathbb{R}^{n+2k})$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\|P_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 |P_k(x)|^2 dx &= \int_0^\infty |f(r)|^2 \int_{|x|=r} |P_k(x)|^2 dS(x) dr \\
&= \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_k(rx)|^2 dS(x) dr \\
&= \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2k+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_k(x)|^2 dS(x) dr \\
&= \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2k+n-1} dr \\
&= \|f\|^2_R, \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

e segue a primeira afirmação. Para a segunda afirmação, basta ver que

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_R &= \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2k+n-1} dr \\
&= \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2k+n-1} \frac{1}{n|B_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,1)| r^{2k+n-1}} \int_{S_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,r)} dS(x) dr \\
&= \frac{1}{n|B_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,1)|} \int_0^\infty \int_{S_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,r)} |f(x)|^2 dS(x) dr \\
&= \frac{1}{n|B_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,1)|} \int_{\mathbb{R}^{n+2k}} |f(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{n|B_{\mathbb{R}^{n+2k}}(0,1)|} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+2k})}. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Neste caso, podemos de fato aplicar a transformada de Fourier relativa a $\mathbb{R}^{n+2k}$ em $f \in R$, e para concluir o corolário é suficiente provarmos que

$$\mathcal{F}_{n,k}(f) = (-i)^k \mathcal{F}_{n+2k,0}(f),$$

para toda $f \in R$. Considere primeiramente $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Como $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então obviamente $P_k f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e logo, $f \in R$. Além disso, pelo Teorema 3.1, temos que

$$(P_k f)^\wedge(\xi) = (-i)^k P_k(\xi) f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, como $\mathcal{F}_{n+2k,0}(f)(\xi) = f(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n+2k}$, então $\mathcal{F}_{n,k}(f) = \mathcal{F}_{n+2k,0}(f)$. Considere agora $f(x) = e^{-\pi s|x|^2}$, $s > 0$. Usando o Teorema 3.1, a homogeneidade de $P_k(x)$ e a proprieadade da transformada de Fourier sob uma dilatação (Teorema 1.8 item 5), segue que

$$
\begin{aligned}
(P_k f)^\wedge(\xi) = (P_k e^{-\pi s|\cdot|^2})^\wedge(\xi) &= s^{-\frac{k}{2}}(P_k(\sqrt{s}\ \cdot)e^{-\pi|\sqrt{s}\ \cdot|^2})^\wedge(\xi) \\
&= s^{-\frac{k}{2}}\left[\delta_{\sqrt{s}}(P_k e\ -\pi|\cdot|^2)\right]^\wedge(\xi) \\
&= s^{-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}}(P_k e^{-\pi|\cdot|^2})^\wedge\left(\frac{\xi}{\sqrt{s}}\right) \\
&= s^{-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}}(-i)^k P_k\left(\frac{\xi}{\sqrt{s}}\right)e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}} \\
&= (-i)^k P_k(\xi)s^{-k-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, para $\xi \in \mathbb{R}^{n+2k}$ temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+2k,0}(f)(\xi) = \mathcal{F}_{n+2k,0}\left[\delta_{\sqrt{s}}(e^{-\pi|\cdot|^2})\right](\xi) &= s^{-k-\frac{n}{2}}\mathcal{F}_{n+2k,0}(e^{-\pi|\cdot|^2})\left(\frac{\xi}{\sqrt{s}}\right) \\
&= s^{-k-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.35) e (3.36), obtemos $\mathcal{F}_{n,k}(f) = (-i)^k\mathcal{F}_{n+2k,0}(f)$. Provemos agora que o subespaço das combinações lineares do conjunto $\{e^{-\pi s|\cdot|^2}\}_{s>0}$, que denotaremos por F, é denso em R. Como R é espaço de Hilbert, basta provarmos que

$$F^\perp = \{0\}.$$

Daí, seja $h \in R$ tal que $h \in F^\perp$. Então, para todo $s > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
0 = \int_0^\infty h(r)e^{-\pi s r^2}r^{n+2k-1}dr &= \int_0^\infty h(r)e^{-\pi s r^2}r^{n+2k-2}r\,dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty h(\sqrt{u})e^{-\pi u r^2}u^{\frac{n}{2}+k-1}du.
\end{aligned}
$$

Portanto, denotando trasformada de Laplace por $\mathcal{L}$, temos $\mathcal{L}(h(\sqrt{\cdot})u^{\frac{n}{2}+k-1})(\pi s) = 0$ para todo $u > 0$. Assim, $h(\sqrt{\cdot})u^{\frac{n}{2}+k-1} = 0$, e logo, $h = 0$. E segue a afirmação. Por fim, considere $f \in R$ qualquer. Então existe $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequência em F tal que $f_j \to f$ em R. A identidade (3.32) é obviamente válida para funções em F, ou seja

$$\mathcal{F}_{n,k}(f_j) = (-i)^k\mathcal{F}_{n+2k,0}(f_j)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí, pela igualdade (3.33), a identidade de Plancherel, e a identidade acima, temos

$$
\begin{aligned}
0 = \lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_R &= \lim_{j\to\infty} \|P_k f_j - P_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \|\mathcal{F}(P_k f_j) - \mathcal{F}(P_k f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \|P_k \mathcal{F}_{n,k}(f_j) - \mathcal{F}(P_k f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|(-i)^k P_k \mathcal{F}_{n+2k,0}(f_j) - \mathcal{F}(P_k f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}
$$

e portanto (a menos de uma subsequência), $\frac{1}{P_k}\mathcal{F}(P_k f)(\xi) = \lim_{j\to\infty}(-i)^k \mathcal{F}_{n+2k,0}(f_j)(\xi)$ para q.t.p $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por outro lado, usando novamente a identidade de Plancherel e usando (3.33), temos

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_{n+2k,0}(f_j) - \mathcal{F}_{n+2k,0}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+2k})} &= \|f_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+2k})} \\
&= C(n,k)\|f_j - f\|_R \to 0
\end{aligned}
$$

quando $j \to \infty$. Portanto, $\mathcal{F}_{n+2k,0}(f)(\xi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}_{n+2k}(f_j)(\xi)$ q.t.p $\xi \in \mathbb{R}^n$ (a menos de uma subsequência). Com mais razão,

$$
\mathcal{F}(P_k f) = (-i)^k P_k \mathcal{F}_{n+2k,0}(f) \quad \text{q.t.p.}
$$

E segue o resutado. □

Proposição 3.4. *Seja $P_k(x)$ um polinômio harmônico homogênio de grau k em $\mathbb{R}^n$, e seja*

$$
\varphi(x) = \frac{P_k(x)}{|x|^k}\frac{1}{|x|^p}, \tag{3.37}
$$

com $0 < \mathrm{Re}(p) < n$. Então a função p-homogênea φ é SC^∞-regular.

Demonstração. De fato, aplicando o Corolário 3.2 e usando a expressão de $e^{it\Delta}$ em termos de transformada de Fourier, temos de maneira distribucional que

$$
\begin{aligned}
e^{it\Delta}(P_k|\cdot|^{-k-p}) &= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\mathcal{F}(P_k|\cdot|^{-k-p})\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2} P_k \mathcal{F}_{n+2k,0}(|\cdot|^{-k-p})\right) \\
&= P_k \mathcal{F}^{-1}_{n+2k,0}\left(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\mathcal{F}_{n+2k,0}(|\cdot|^{-k-p})\right),
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
e^{it\Delta}(P_k|\cdot|^{-k-p}) = P_k e^{it\Delta}_{n+2k,0}(|\cdot|^{-k-p}), \tag{3.38}
$$

onde $e^{it\Delta}_{n+2k,0}$ denota o grupo de Schrödinger em R^{n+2k}. Por outro lado, como por hipótese $0 < Re(p) < n$, então $0 < Re(p) + k < n + 2k$, e daí, pela Proposição 3.1 temos que $e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p}) \in C^{\infty}((0,\infty) \times \mathbb{R}^{n+2k})$ e vale

$$\left(e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p})\right)(x) = (4it)^{-\frac{p+k}{2}}\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)^{-1} H\left(\frac{|x|^2}{4t};\frac{p+k}{2},\frac{n-p-k}{2}\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{n+2k}$. Daí, utilizando a fórmula do Lema 3.2 e as ideias da Proposição 3.2 obtemos analogamente que, fixado $R > 0$, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ dependendo de p, n, k, t e R tais que para todo $x \in \mathbb{R}^{n+2k}$ com $|x| > R$

$$\left|\left(e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p})\right)(x)\right| \leqslant C_1\frac{1}{|x|^{k+Re(p)}} + C_2\frac{1}{|x|^{k+n-Re(p)}}.$$

Interpretando então a função radial $(e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p})$ como função de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\begin{aligned}\left|\left(P_k e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p})\right)(x)\right| &\leqslant C_1\frac{|P_k(x)|}{|x|^{k+Re(p)}} + C_2\frac{|P_k(x)|}{|x|^{k+n-Re(p)}}\\ &\leqslant \tilde{C_1}\frac{1}{|x|^{Re(p)}} + \tilde{C_2}\frac{1}{|x|^{n-Re(p)}}\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| > R$. Portanto $P_k e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p}) \in L^r(\mathbb{R}^n \setminus B[0,R])$ para todo $t > 0$ e r tal que

$$r > \max\left\{\frac{n}{Re(p)}, \frac{n}{n-Re(p)}\right\}.$$

Daí, como $P_k e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$, então $P_k e^{it\Delta}_{n+2k}(|\cdot|^{-k-p}) \in L^r(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$ e r como acima. O resultado segue então da identidade (3.38). $\square$

Capítulo 4

Boa-colocação Local e Global

Neste capítulo é feito o estudo sobre a boa colocação para o PVI (1) em espaços L^p-fraco. No que segue, vamos definir de maneira precisa o que seria uma boa colocação para um problema de valor inicial (PVI). Também, introduzimos os espaços aos quais é feito o estudo da boa colocação local e global, e apresentamos a definição rigorosa do que seria uma solução para o PVI (1) nestes espaços em termos da equação (2). Além disso, como consequência do teorema de boa colocação global, e usando os resultados apresentados no capítulo 3, provamos a existência de soluções globais auto-similares para o PVI (1) em espaços L^p-fraco. De agora em diante, consideraremos sempre

$$\alpha = \frac{2}{\rho} - \frac{n}{\rho+2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2}{\rho} - \frac{n(\rho+1)}{\rho+2}.$$

A principal ferramenta que utilizaremos para estabelecer os teoremas de boa colocação presentes neste capítulo é o teorema do ponto fixo de Banach, a saber:

Teorema 4.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja (M,d) um espaço métrico completo e* $\varphi : M \to M$ *uma contração, i.e, existe* $0 \leqslant c < 1$ *tal que*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant c \cdot d(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$. *Então existe um único* $p \in M$ *tal que* $\varphi(p) = p$.

Demonstração. Vide [23]. □

Definamos então, em nosso contexto, o que seria um problema de valor inicial (PVI) *bem-posto* ou *bem colocado*.

Definição 4.1. *Um PVI é dito ser* **localmente bem-posto** *em um certo espaço de Banach* X *se satisfaz as seguintes condições:*

- *Dado* $\phi \in X$ *existe* $T > 0$ *e uma única* $u \in C([-T,T]:X)$ *solução do PVI.*
- *A aplicação* $\phi \in X \mapsto u \in C([-T,T]:X)$ *é continua.*

Se em adição o tempo T *pode ser considerado arbitrariamente grande, então dizemos que o PVI é* **globalmente bem-posto** *em* X.

Agora, iremos introduzir precisamente os espaços aos quais faremos o estudo da boa colocação.

Definição 4.2. *Seja* $0 < \rho < \infty$ *e* $0 < T \leqslant \infty$. *Denotamos por* E_α *e* $E^T_{\alpha,\beta}$ *os seguintes espaços*

$$E_\alpha = \{u : |t|^{\frac{\alpha}{2}} u \in BC(\mathbb{R}; L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n))\}, \tag{4.1}$$

$$E^T_{\alpha,\beta} = \{u : |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} u \in BC((-T,T); L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n))\} \tag{4.2}$$

com as respectivas normas

$$\|u\|_{(\alpha)} = \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{\rho+2,\infty},$$

$$\|u\|_{(\alpha,\beta)} = \sup_{-T<t<T} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t)\|_{\rho+2,\infty},$$

onde BC *representa a classe das funções contínuas e limitadas correspondendo de um intervalo em um espaço de Banach.*

É fácil ver que os espaços $(E_\alpha, \|\cdot\|_{(\alpha)})$, $(E_{\alpha,\beta}, \|\cdot\|_{(\alpha,\beta)})$ são de fato espaços vetoriais normados. Porém, não está claro que são espaços de Banach. Este é o conteúdo da seguinte proposição.

Proposição 4.1. $(E_\alpha, \|\cdot\|_{(\alpha)})$, $(E_{\alpha,\beta}, \|\cdot\|_{(\alpha,\beta)})$ *são espaços de Banach.*

Demonstração. Vamos provar que E_α é Banach. A prova que $E^T_{\alpha,\beta}$ é Banach análoga. Com efeito, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em E_α. Daí, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{(\alpha)} < \varepsilon \quad \forall m, n \geqslant n_0,$$

e daí

$$|t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon \tag{4.3}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $m, n \geqslant n_0$. Segue que $(u_n(t))$ é sequência de Cauchy em $L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Defina então $u(t) := \lim_n u_n(t)$ em $L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \neq 0$ e $u(0) = 0$. Logo, fazendo $m \to \infty$ em (4.3), obtemos

$$|t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u_n(t) - u(t)\|_{\rho+2\infty} \leqslant \varepsilon \tag{4.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \geqslant n_0$ (é trivialmente válida para $t = 0$). Fixe então $s \in \mathbb{R}$. Como $|t|^{\frac{\alpha}{2}} u_{n_0}$ é contínua em s, então existe $\delta > 0$ tal que se $|t - s| < \delta$ temos

$$\||t|^{\frac{\alpha}{2}} u_{n_0}(t) - |s|^{\frac{\alpha}{2}} u_{n_0}(s)\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Portanto, por (4.4) e (4.5), segue que para todo $|t - s| < \delta$ então

$$\begin{aligned} \||t|^{\frac{\alpha}{2}} u(t) - |s|^{\frac{\alpha}{2}} u(s)\|_{\rho+2,\infty} &\leqslant |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t) - u_{n_0}(t)\|_{\rho+2,\infty} + \||t|^{\frac{\alpha}{2}} u_{n_0}(t) - |s|^{\frac{\alpha}{2}} u_{n_0}(s)\|_{\rho+2,\infty} \\ &\quad + |s|^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{n_0}(s) - u(s)\|_{\rho+2,\infty} \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|t|^{\frac{\alpha}{2}} u$ é contínua em s. Pela arbitrariedade de s, segue que $|t|^{\frac{\alpha}{2}} u$ é contínua. Além disso, por (4.4)

$$|t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{\rho+2,\infty} \leqslant \varepsilon + \sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u_{n_0}(t)\| < \infty,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim, $|t|^{\frac{\alpha}{2}} u$ é limitada. Portando, $u \in E_\alpha$. Por fim, por (4.4), temos para todo $n \geqslant n_0$

$$\|u_n - u\|_{(\alpha)} \leqslant \varepsilon.$$

Portanto $u_n \to u$ em E_α, e segue o resultado. □

Agora, definimos o que se compreende por uma solução para o PVI (1) nos espaços E_α e $E^T_{\alpha,\beta}$.

Definição 4.3. *Seja* $0 < T \leqslant \infty$. *Temos as seguintes definições:*

1. *Uma* **mild solution** *do problema de valor inicial* (1) *no espaço* $E^T_{\alpha,\beta}$ *é uma função a valores complexos* $u \in E^T_{\alpha,\beta}$ *satisfazendo a equação integral* (2) *para todo* $0 < |t| < T$, *tal que* $u(t) \to \phi$ *quando* $t \to 0$ *no sentido das distribuiçoes temperadas.*

2. *Uma* **mild solution global** *do problema de valor inicial* (1) *no espaço no espaço* E_α *é uma função a valores complexos* $u \in E_\alpha$ *satisfazendo a equação integral* (2) *para todo* $0 < |t| < \infty$, *tal que* $u(t) \to \phi$ *quando* $t \to 0$ *no sentido das distribuiçoes temperadas.*

4.1 Soluções Locais em $E^T_{\alpha,\beta}$

Teorema 4.2 (Boa-colocação local)**.** *Seja* $0 < \rho < \infty$ *tal que* $\frac{n\rho}{2} < \frac{\rho+2}{\rho+1}$.

1. *Se* $\phi \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$*, então existe* $0 < T < \infty$ *tal que o problema de valor inicial* (1) *tem uma única* mild solution $u = u(t,x) \in E^T_{\alpha,\beta}$ *com* $T = T(\phi) = C\|\phi\|^{-\frac{\rho}{\delta}}_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$*, onde* $\delta = 1 - \frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)$.

2. *Além disso, se* $\phi_n \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$ *é uma sequência de funções satisfazendo* $\phi_n \to \phi$ *em* $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$*, então existe* $0 < T_0 < \infty$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $n \geqslant n_0$*, as soluções* u_n *e* u *com respectivos dados iniciais* ϕ_n *e* ϕ *pertencem a* $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$ *e* $u_n \to u$ *em* $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$*. Na verdade, a aplicação* $\phi \mapsto u$ *é lipschitziana.*

Demonstração. De fato, seja $\phi \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$. Veja que, se $y := e^{it\Delta}\phi$, então pelo Lema 2.4 temos

$$\begin{aligned}
\|y\|_{(\alpha,\beta)} &= \sup_{-T<t<T} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \\
&\leqslant \sup_{-T<t<T} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \left(C|t|^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)} \|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \right) \\
&= C \sup_{-T<t<T} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |t|^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} \|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \\
&= C\|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty},
\end{aligned}$$

onde pela definição de α, β é fácil ver que

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{n}{2}\left(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2} - 1\right).$$

Defina então $\varepsilon := C\|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$. Em $E^T_{\alpha,\beta}$ considere a seguinte aplicação

$$B(u) := e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s) ds. \tag{4.6}$$

Devemos mostrar que para algum $0 < T < \infty$ existe $u \in E^T_{\alpha,\beta}$ tal que $u = B(u)$. Para isso, note que dadas $u, v \in E^T_{\alpha,\beta}$ e $0 < t < T$, temos pelos lemas 2.4 e 1.3

$$\begin{aligned}
\|B(u) - B(v)\|_{\rho+2,\infty} &= \left\| -i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s) - |v(s)|^\rho v(s)) ds \right\|_{\rho+2,\infty} \\
&\leqslant |\lambda| \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s) - |v(s)|^\rho v(s))\|_{\rho+2,\infty} ds \\
&\leqslant C|\lambda| \int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)} \||u(s)|^\rho u(s) - |v(s)|^\rho v(s)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} ds \\
&\leqslant C|\lambda| W \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} \||u(s) - v(s)| \cdot (|u(s)|^\rho + |v(s)|^\rho)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} ds,
\end{aligned}$$

e logo, notando que $|u-v| \in L^{\rho+2,\infty}$ e $|u|^\rho, |v|^\rho \in L^{\frac{\rho+2}{\rho},\infty}$ onde $\frac{1}{\rho+2}+\frac{\rho}{\rho+2}=\frac{\rho+1}{\rho+2}$, podemos aplicar a desigualdade de Hölder relativa a espaços de Lorentz (Teorema 2.2) para obter que

$$\begin{aligned}
&\|B(u)-B(v)\|_{\rho+2,\infty}\\
&\leqslant C|\lambda|W(\rho+2)\int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}\cdot\left(\||u(s)|^\rho\|_{\frac{\rho+2}{\rho},\infty}+\||v(s)|^\rho\|_{\frac{\rho+2}{\rho},\infty}\right)ds\\
&\leqslant C|\lambda|W(\rho+2)\int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}\cdot\left(\|u(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty}+\|v(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty}\right)ds\\
&=\tilde{C}\int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}\times\\
&\times\left[(s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho+(s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|v(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho\right]ds\\
&\leqslant \tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)})\int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}ds\\
&=\tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)})\int_0^1 (t-tz)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}(tz)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}\cdot t\,dz\\
&=\tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)})t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}\int_0^1 (1-z)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}z^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}dz\\
&=K_{\alpha,\beta}t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)}),
\end{aligned}\tag{4.7}$$

onde

$$K_{\alpha,\beta}:=\tilde{C}\int_0^1(1-z)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}z^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}dz=\tilde{C}\cdot b\left(1-\frac{\alpha-\beta}{2},1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)\right)<+\infty,$$

pois a hipótese que $\frac{n\rho}{2}<\frac{\rho+2}{\rho+1}$ implica em $\frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)<1$ (b é a função beta). Assim, notando que é análogo o cálculo para $-T<t<0$, temos por (4.7) que

$$\begin{aligned}
|t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|B(u)-B(v)\|_{\rho+2,\infty}&\leqslant K_{\alpha,\beta}T^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)})\\
&=K_{\alpha,\beta}T^\delta\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)})\quad\forall -T<t<T,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|B(u)-B(v)\|_{(\alpha,\beta)}\leqslant K_{\alpha,\beta}T^\delta\|u-v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^\rho_{(\alpha,\beta)}+\|v\|^\rho_{(\alpha,\beta)}).\tag{4.8}$$

Seja então $0<T<\infty$ suficientemente pequeno tal que

$$\|y\|_{(\alpha,\beta)}\leqslant C\|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}=\varepsilon<R:=\left(\frac{1}{2^{\rho+1}K_{\alpha,\beta}T^\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}.\tag{4.9}$$

Neste caso, por (4.8) e (4.9), para toda $u \in E^T_{\alpha,\beta}$ tal que $\|u\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant 2\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}\|B(u)\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant \|B(0)\|_{(\alpha,\beta)} + \|B(u) - B(0)\|_{(\alpha,\beta)} &\leqslant \|y\|_{(\alpha,\beta)} + K_{\alpha,\beta}T^{\delta}\|u\|^{\rho+1}_{(\alpha,\beta)} \\ &= \varepsilon + K_{\alpha,\beta}T^{\delta}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho+1} \\ &\leqslant \varepsilon + K_{\alpha,\beta}T^{\delta}2^{\rho+1}R^{\rho}\varepsilon \\ &= 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $B(B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon]) \subseteq B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon]$. Além disso, novamente por (4.8) e (4.9), temos que para todas $u, v \in B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon]$

$$\begin{aligned}\|B(u) - B(v)\|_{(\alpha,\beta)} &\leqslant K_{\alpha,\beta}T^{\delta}\|u - v\|_{(\alpha,\beta)}(\|u\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)} + \|v\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)}) \\ &\leqslant K_{\alpha,\beta}T^{\delta}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}\|u - v\|_{(\alpha,\beta)},\end{aligned}$$

onde

$$K_{\alpha,\beta}T^{\delta}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho} < 1.$$

Assim, $B : B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon] \to B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon]$ é uma contração. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única $u \in B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0,2\varepsilon]$ que satisfaz

$$u = B(u) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^{\rho}u)ds.$$

Provemos então que $u(t) \to \phi$ no sentido distribucional quando $t \to 0$. De fato, note que para toda $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}|\langle e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle - \langle\phi, \eta\rangle| &= |\langle\phi, e^{it\Delta}\eta\rangle - \langle\phi, \eta\rangle| \\ &= |\langle\phi, e^{it\Delta}\eta - \eta\rangle| \\ &\leqslant \|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \cdot \|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} \to 0\end{aligned}$$

quando $t \to 0$, pois $\|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} \to 0$ quando $t \to 0$ pelo Lema 2.7. Daí, veja que

$$|\langle u(t), \eta\rangle - \langle\phi, \eta\rangle| \leqslant |\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| + |\langle e^{it\Delta}\phi - \phi, \eta\rangle|.$$

Assim, é suficiente mostrarmos que $|\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| \to 0$ quando $t \to 0$. Com efeito, como $\|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} \to 0$ quando $t \to 0$, então podemos fixar $0 < \delta < T$ tal que

$$|t| < \delta \Rightarrow \|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} < 1. \tag{4.10}$$

Veja que

$$
\begin{aligned}
\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[-i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^\rho u(s)ds\right]\eta(x)dx \\
&= -i\lambda \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t \left(e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^\rho u(s)\right)(x)\cdot\eta(x)dsdx \\
&= -i\lambda \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{i(t-s)\Delta}|u(s)|^\rho u(s)\right)(x)\cdot\eta(x)dxds \\
&= -i\lambda \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^\rho u(s,x)\left(e^{i(t-s)\Delta}\eta\right)(x)dxds \\
&= -i\lambda \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^\rho u(s,x)\left(e^{i(t-s)\Delta}\eta - \eta\right)(x)dxds \\
&- i\lambda \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^\rho u(s,x)\eta(x)dxds,
\end{aligned}
$$

e portanto, por (4.10) e a desigualdade de Hölder (Teorema 2.3), segue que para todo $0 < |t| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| &\leqslant |\lambda| \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^{\rho+1}\left|\left(e^{i(t-s)\Delta}\eta - \eta\right)(x)\right| dxds+ \\
&+ |\lambda| \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^{\rho+1}|\eta(x)|dxds \\
&\leqslant |\lambda| \int_0^t \||u(s)|^{\rho+1}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}\|e^{i(s-t)\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1}ds+ \\
&+ |\lambda| \int_0^t \||u(s)|^{\rho+1}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}\|\eta\|_{\rho+2,1}ds \\
&\leqslant |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,\infty}) \int_0^t \|u(s)\|^{\rho+1}_{\rho+2,\infty}ds \\
&= |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,\infty}) \int_0^t (s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)\|_{\rho+2,\infty})^{\rho+1}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}ds \\
&\leqslant |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,\infty})\|u\|^{\rho+1}_{(\alpha,\beta)} \int_0^t s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}ds \\
&= |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,\infty})\|u\|^{\rho+1}_{(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)}\right]t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)},
\end{aligned}
$$

onde $1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1) > 0$. Logo, $|\langle u(t)-e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| \to 0$ quando $t \to 0$, e segue a afirmação. Logo, a solução u da equação integral é uma *mild solution* para o problema (1). Agora, provemos a unicidade de tal solução u não apenas na bola $B_{E^T_{\alpha,\beta}}[0, 2\varepsilon]$, mas em todo espaço $E^T_{\alpha,\beta}$. Para isso, considere $v \in E^T_{\alpha,\beta}$ uma outra *mild solution* para o problema (1) relativa ao dado inicial ϕ. Então, analogamente como foi feito na obtenção de (4.8) e usando que $\|u\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant 2\varepsilon$, temos que para todo $0 < W < T$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \\
&= \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|B(u)(t) - B(v)(t)\|_{\rho+2,\infty} \\
&\leqslant K_{\alpha,\beta} W^{\delta} \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} (\|u\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)} + \|v\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)}) \\
&\leqslant \frac{1}{2} \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} + K_{\alpha,\beta} W^{\delta} \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \|v\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)},
\end{aligned}
$$

e logo,

$$
\frac{1}{2} \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \leqslant K_{\alpha,\beta} W^{\delta} \sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \|v\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)}.
$$

Daí, supondo $\sup_{|t|<W} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \neq 0 \ \forall \ 0 < W < T$ teriamos

$$
\frac{1}{2} \leqslant K_{\alpha,\beta} W^{\delta} \|v\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)}, \ \forall \ 0 < W < T,
$$

o que não pode ocorrer. Portanto, existe $0 < W < T$ tal que $u(t) = v(t)$ para todo $|t| < W$. Seja

$$
W_0 = \sup\{0 < W \leqslant T \ : \ u(t) = v(t) \ \forall \ |t| < W\}.
$$

Suponha $W_0 < T$. Então, considerando o problema de valor inicial (1) com dado inicial $u(W_0) = v(W_0)$, podemos analogamente como antes provar que existe $l > 0$ tal que $u(t) = v(t)$ para todo $t \in (W_0 - l, W_0 + l)$. Absurdo! Portanto, $W_0 = T$, o que demonstra a afirmação.

Agora, sejam u_n, u são soluções com respectivos dados inicias ϕ_n, ϕ, onde $\phi_n \to \phi$ em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$ quando $n \to +\infty$. Considere então $0 < T_n, T < \infty$ tais que $u \in E^{T}_{\alpha,\beta}$ e $u_n \in E^{T_n}_{\alpha,\beta}$. Daí, fixe $0 < T_0 < T < \infty$. Como $\|\phi_n\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \to \|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$ quando $n \to +\infty$ então também $T_n \to T$, e logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
T_0 < T_n \quad \forall n \geqslant n_0.
$$

Assim, $u_n, u \in E^{T_0}_{\alpha,\beta}$ para todo $n \geqslant n_0$. Neste caso, por cáculos análogos aos feitos anteriormente (que derivaram (4.8)), $\forall n \geqslant n_0$ temos em $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$ que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{(\alpha,\beta)} &\leqslant \|e^{it\Delta}(\phi_n - \phi)\|_{\alpha,\beta} + \left\| -i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u_n|^{\rho} u_n - |u|^{\rho} u) \| ds \right\|_{(\alpha,\beta)} \\
&\leqslant C\|\phi_n - \phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} + K_{\alpha,\beta} T_0^{\delta} \|u_n - u\|_{(\alpha,\beta)} (\|u_n\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)} + \|u\|^{\rho}_{(\alpha,\beta)}) \\
&\leqslant C\|\phi_n - \phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} + K_{\alpha,\beta} T_0^{\delta} 2^{\rho+1} \varepsilon_0^{\rho} \|u_n - u\|_{(\alpha,\beta)},
\end{aligned}
$$

onde $\varepsilon_0 = C \cdot \max\{\|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}\}$. Ou seja,

$$\|u_n - u\|_{(\alpha,\beta)} \leqslant \frac{C}{1 - K_{\alpha,\beta} T_0^{\delta} 2^{\rho+1} \varepsilon_0^{\rho}} \|\phi_n - \phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Portanto, $u_n \to u$ quando $n \to \infty$ em $E^{T_0}_{\alpha,\beta}$. □

4.2 Soluções Globais no Tempo

Teorema 4.3 (Boa-colocação global). *Seja* $\infty < \rho < \infty$ *tal que* $\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{n\rho}{2} < \rho + 2$.

1. *Existe* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno tal que, se* ϕ *é uma distribuição satisfazendo*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon,$$

então o problema de valor inicial (1) *tem uma* mild solution *global no tempo* $u = u(t,x) \in E_\alpha$. *Esta solução é a única satisfazendo* $\|u\|_\alpha \leqslant 2\varepsilon$.

2. *Além disso, se* ϕ_n *é uma sequência de distribuições tal que*

$$\|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \to 0$$

quando $n \to +\infty$, *e* u_n, u *são as soluções com respectivos dados inciais* ϕ_n *e* ϕ, *então* $u_n \to u$ *em* E_α.

Demonstração. Com efeito seja ϕ uma distribuição tal que

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} = \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < +\infty,$$

e seja B a aplicação como em (4.6) definida em E_α. Tomando $t > 0$ sem perda de generalidade, temos que para todas $u, v \in E_\alpha$

$$\begin{aligned}
\|B(u) - B(v)\|_{\rho+2,\infty} &\leqslant |\lambda| \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s) - |v(s)|^\rho v(s))\|_{\rho+2,\infty} ds \\
&\leqslant |\lambda| C \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} \||u(s)|^\rho u(s) - |v(s)|^\rho v(s)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} ds \\
&\leqslant |\lambda| C W \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} \||u(s) - v(s)| \cdot (|u(s)|^\rho + |v(s)|^\rho)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} ds \\
&\leqslant \tilde{C} \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(s) - v(s)\|_{\rho+2,\infty} \\
&\quad \times (\|u(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty} + \|v(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty}) ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{C}\int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty} \times \\
&\left[(s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s)\|_{\rho+2,\infty})^{\rho} + (s^{\frac{\alpha}{2}}\|v(s)\|_{\rho+2,\infty})^{\rho}\right] ds \\
&\leqslant \tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha)} \left(\|u\|_{(\alpha)}^{\rho} + \|v\|_{(\alpha)}^{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds \\
&= \tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha)} \left(\|u\|_{(\alpha)}^{\rho} + \|v\|_{(\alpha)}^{\rho}\right) t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} \\
&\times \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds \\
&= \tilde{C}\|u-v\|_{(\alpha)} \left(\|u\|_{(\alpha)}^{\rho} + \|v\|_{(\alpha)}^{\rho}\right) t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds, \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

onde verifica-se facilmente que

$$1-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}(\rho+1) = -\frac{\alpha}{2},$$

e além disso,

$$K_\alpha := \tilde{C}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds = \tilde{C}\cdot b\left(1-\frac{\alpha-\beta}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)\right) < +\infty, \qquad (4.12)$$

pois a hipótese $\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{n\rho}{2} < \rho+2$ implica em $\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\frac{\alpha}{2}(\rho+1) < 1$ (b é a função beta). Segue então de (4.11) e (4.12) que

$$|t|^{\frac{\alpha}{2}}\|B(u)-B(v)\|_{\rho+2,\infty} \leqslant K_\alpha\|u-v\|_{(\alpha)}(\|u\|_{(\alpha)}^{\rho} + \|v\|_{(\alpha)}^{\rho}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, tomando supremo em $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\|B(u)-B(v)\|_{(\alpha)} \leqslant K_\alpha\|u-v\|_{(\alpha)}(\|u\|_{(\alpha)}^{\rho} + \|v\|_{(\alpha)}^{\rho}). \qquad (4.13)$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}K_\alpha < 1,$$

e suponha $\|e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} < \varepsilon$. Daí, para toda $u \in E_{(\alpha)}$ tal que $\|u\|_{(\alpha)} \leqslant 2\varepsilon$, temos por (4.13) que

$$
\begin{aligned}
\|B(u)\|_{(\alpha)} \leqslant \|B(0)\|_{(\alpha)} + \|B(u)-B(0)\|_{(\alpha)} &\leqslant \|e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} + K_\alpha\|u\|_{(\alpha)}^{\rho+1} \\
&< \varepsilon + K_\alpha 2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho+1} \\
&= \varepsilon + (K_\alpha 2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho})\varepsilon \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Assim, $B(B_{E_\alpha}[0,2\varepsilon]) \subseteq B_{E_\alpha}[0,2\varepsilon]$. Além disso, novamente por (4.13), temos que para todas $u, v \in B_{E_\alpha}[0,2\varepsilon]$

$$\begin{aligned}\|B(u) - B(v)\|_{(\alpha)} &\leqslant K_\alpha \|u - v\|_{(\alpha)} (\|u\|^\rho_{(\alpha)} + \|v\|^\rho_{(\alpha)}) \\ &\leqslant K_\alpha 2^{\rho+1} \varepsilon^\rho \|u - v\|_{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Logo, B é uma contração em $B_{E_\alpha}[0,2\varepsilon]$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única $u \in B_{E_\alpha}[0,2\varepsilon]$ tal que

$$u = B(u) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^\rho u)ds.$$

Provemos então que $u(t) \to \phi$ no sentido distribucional quando $t \to 0$. De fato, considere $\eta \in S(\mathbb{R}^n)$ arbitrária. Temos primeiramente que

$$|\langle e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle - \langle \phi, \eta\rangle| = |\langle \phi, e^{it\Delta}\eta - \eta\rangle| \leqslant \|\phi\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} \to 0$$

quando $t \to 0$ pelo Lema 2.7. Daí, notando que

$$|\langle u(t), \eta\rangle - \langle \phi, \eta\rangle| \leqslant |\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| + |\langle e^{it\Delta}\phi - \phi, \eta\rangle|,$$

é suficiente provarmos que

$$|\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| \to 0 \quad \text{quando} \to 0.$$

Pelo Lema 2.7 temos que $\|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} \to 0$ quando $t \to 0$. Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \Rightarrow \|e^{it\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,\infty} < 1. \tag{4.14}$$

Utilizando (de maneira mais direta) os mesmos argumentos do Teorema 4.2, temos que para $t > 0$

$$\begin{aligned}\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle &= \left\langle -i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s))ds, \eta \right\rangle \\ &= -i\lambda \int_0^t \left\langle e^{i(t-s)\Delta}(|u(s)|^\rho u(s)), \eta \right\rangle ds \\ &= -i\lambda \int_0^t \left\langle |u(s)|^\rho u(s), e^{i(t-s)\Delta}\eta \right\rangle ds \\ &= -i\lambda \int_0^t \left\langle |u(s)|^\rho u(s), e^{i(t-s)\Delta}\eta - \eta \right\rangle ds - i\lambda \int_0^t \langle |u(s)|^\rho u(s), \eta\rangle ds.\end{aligned}$$

Portanto, utilizando a desigualdade de Hölder e (4.14), temos para todo $|t| < \delta$ que

$$
\begin{aligned}
|\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| &\leqslant |\lambda| \int_0^t \||u(s)|^{\rho+1}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \|e^{i(t-s)\Delta}\eta - \eta\|_{\rho+2,1} ds \\
&+ |\lambda| \int_0^t \||u(s)|^{\rho+1}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \|\eta\|_{\rho+2,1} ds \\
&\leqslant |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,1}) \int_0^t \|u(s)\|_{\rho+2,\infty}^{\rho+1} ds \\
&= |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,1}) \int_0^t \left(s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)\|_{\rho+2,\infty}\right)^{\rho+1} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds \\
&\leqslant |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,1}) \|u\|_{(\alpha)}^{\rho+1} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds \\
&= |\lambda|(1 + \|\eta\|_{\rho+2,1}) \|u\|_{(\alpha)}^{\rho+1} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}(\rho+1)} t^{1-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}
\end{aligned}
$$

onde $1 - \frac{\alpha}{2}(\rho + 1) > 0$. Daí, $|\langle u(t) - e^{it\Delta}\phi, \eta\rangle| \to 0$ quando $t \to 0$, e segue a afirmação.

Agora, considere ϕ_n uma sequência de distribuições tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} = 0.$$

Neste caso, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|e^{it\Delta}\phi_n\|_{(\alpha)} < \varepsilon \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Seja então u_n as soluções respectivas aos dados ϕ_n para $n \geqslant n_0$. Assim, para todo $n \geqslant n_0$, veja que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{(\alpha)} &\leqslant \|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} + \left\| -i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u_n|^\rho u_n - |u|^\rho u) ds \right\|_{(\alpha)} \\
&\leqslant \|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} + K_\alpha \|u - u_n\|_{(\alpha)} (\|u_n\|_{(\alpha)} + \|u\|_{(\alpha)}) \\
&\leqslant \|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)} + K_\alpha 2^{\rho+1} \varepsilon^\rho \|u_n - u\|_{(\alpha)},
\end{aligned}
$$

e logo,

$$\|u_n - u\|_{(\alpha)} \leqslant \frac{1}{1 - K_\alpha 2^{\rho+1}\varepsilon^\rho} \|e^{it\Delta}\phi_n - e^{it\Delta}\phi\|_{(\alpha)}.$$

Portanto, $u_n \to u$ quando $n \to +\infty$ em E_α. □

Proposição 4.2 (Existência de Soluções de Energia Infinita). *Sob as mesmas condições do Teorema 4.3, se o dado inicial $\phi = \phi(x)$ é uma função homogênea suficientemente pequena de grau $-\frac{2}{\rho}$, i.e., $\|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty}$ é finita e suficientemente pequena, então a solução $u = u(x,t)$ obtida pelo teorema 4.3 relativa ao dado inicial ϕ é* auto-similar *ou* invariante por scaling*, ou seja,*

$$u(x,t) = \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 t, \mu x) \quad \forall \mu, t > 0, \;\; \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Com efeito, seja ϕ dado homogêneo de grau $-\frac{2}{\rho}$ tal que

$$\|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \infty.$$

Definamos

$$w(t,x) := (e^{it\Delta}\phi)(x) \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pela propriedade estabelecida em (3.5), segue que

$$w(t,x) = \mu^{\frac{2}{\rho}} w(\mu^2 t, \mu x) \quad \forall \mu > 0, \tag{4.15}$$

i.e., w é invariante por *scaling*. Em particular, para $t > 0$ e $\mu = \frac{1}{\sqrt{t}}$ em (4.15), temos

$$w(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{2}{\rho}} w\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 t, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = t^{-\frac{1}{\rho}} w(1, \frac{x}{\sqrt{t}}),$$

e assim,

$$(e^{it\Delta}\phi)(x) = t^{-\frac{1}{\rho}} \left(e^{i\Delta}\phi\right)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(e^{it\Delta}\phi)(x)\|_{\rho+2,\infty} = \|t^{-\frac{1}{\rho}} \left(e^{i\Delta}\phi\right)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\|_{\rho+2,\infty} &= t^{-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{-\frac{n}{\rho+2}} \|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \\
&= t^{\frac{n}{2(\rho+2)} - \frac{1}{\rho}} \|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \\
&= t^{-\frac{\alpha}{2}} \|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} = \|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \quad \forall t > 0. \tag{4.16}$$

Portanto, se $\|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon_0$ para ε_0 suficientemente pequeno, então por (4.16)

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{it\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon_0,$$

e logo, podemos aplicar o Teorema 4.3 e obter uma solução $u \in E_\alpha$ tal que

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s) ds, \quad t > 0,$$

a qual é a única satisfazendo $\|u\|_\alpha \leqslant 2\varepsilon_0$. Provemos então que

$$u(t,x) = \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 t, \mu x) \quad \forall \mu > 0, \quad \forall t > 0, \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, defina para todo $\mu > 0$

$$u_\mu(t,x) := \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 t, \mu x).$$

Daí, usando novamente que $w(t,x) = (e^{it\Delta}\phi)(x)$ é invariante por *scaling*, e que u satisfaz a equação integral (2), obtemos que

$$\begin{aligned} u_\mu(t,x) &= \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 t, \mu x) \\ &= \mu^{\frac{2}{\rho}} (e^{i\mu^2 t\Delta}\phi)(\mu x) - \mu^{\frac{2}{\rho}} i\lambda \int_0^{\mu^2 t} \left(e^{i(\mu^2 t - s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s)\right)(\mu x)\ ds \\ &= (e^{it\Delta}\phi)(x) - \mu^{\frac{2}{\rho}} i\lambda \int_0^{\mu^2 t} \left(e^{i(\mu^2 t - s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s)\right)(\mu x)\ ds. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por outro lado, pela propriedade (3.4) e a mudança de variáveis $r = \dfrac{s}{\mu^2}$, temos que

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mu^2 t} \left(e^{i(\mu^2 t - s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s)\right)(\mu x)\ ds \\ &= \int_0^{\mu^2 t} \left(e^{i\mu^2 t\Delta} \left[e^{-is\Delta} |u(s)|^\rho u(s)\right]\right)(\mu x)\ ds \\ &= \int_0^{\mu^2 t} \left(e^{it\Delta} \left[\left\{e^{-is\Delta} |u(s)|^\rho u(s)\right\}(\mu \cdot)\right]\right)(x)\ ds \\ &= \int_0^{\mu^2 t} \left(e^{it\Delta} \left[e^{-i\frac{s}{\mu^2}\Delta} |u(s,\mu\cdot)|^\rho u(s,\mu\cdot)\right]\right)(x)\ ds \\ &= \int_0^{t} \left(e^{it\Delta} \left[e^{-ir\Delta} |u(\mu^2 r,\mu\cdot)|^\rho u(\mu^2 r,\mu\cdot)\right]\right)(x)\ \mu^2 dr \\ &= \int_0^{t} \left(e^{i(t-r)\Delta} |u(\mu^2 r,\mu\cdot)|^\rho u(\mu^2 r,\mu\cdot)\right)(x)\ \mu^{2+\frac{2}{\rho}}\mu^{-\frac{2}{\rho}}\ dr \\ &= \mu^{-\frac{2}{\rho}} \int_0^{t} \left(e^{i(t-r)\Delta} |\mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 r,\mu\cdot)|^\rho \mu^{\frac{2}{\rho}} u(\mu^2 r,\mu\cdot)\right)(x)\ dr \\ &= \mu^{-\frac{2}{\rho}} \int_0^{t} \left(e^{i(t-r)\Delta} |u_\mu(r)|^\rho u_\mu(r)\right)(x)\ dr. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Portanto, de (4.17) e (4.18), segue que

$$u_\mu(t) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) ds, \tag{4.19}$$

e logo, u_μ também satisfaz a equação integral (2). Por fim, veja que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{(\alpha)} = \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u_\mu(t,\cdot)\|_{\rho+2,\infty} &= \mu^{\frac{2}{\rho}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(\mu^2 t, \mu\cdot)\|_{\rho+2,\infty} \\ &= \mu^{\frac{2}{\rho}} \mu^{-\frac{n}{\rho+2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(\mu^2 t)\|_{\rho+2,\infty} \\ &= \mu^{\alpha} \sup_{t>0} \mu^{-\alpha} (\mu^2 t)^{\frac{\alpha}{2}} \|u(\mu^2 t)\|_{\rho+2,\infty} \\ &= \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t)\|_{\rho+2,\infty} \\ &= \|u\|_{(\alpha)}, \end{aligned}$$

e logo,

$$\|u_\mu\|_{(\alpha)} = \|u\|_{(\alpha)} \leqslant 2\varepsilon_0. \tag{4.20}$$

Assim, pela unicidade de soluções do Teorema 4.3, temos que

$$u_\mu(t,x) = u(t,x) \quad \forall\mu > 0,\ \forall t > 0,\ \text{q.t.p } x \in \mathbb{R}^n,$$

e segue o resultado. □

Teorema 4.4 (Existência de Soluções Auto-similares)**.** *Em adição as hipóteses do Teorema 4.3, se o dado inicial* ϕ *é da forma*

$$\phi(x) = c|x|^{-\frac{2}{\rho}} \quad \textit{ou} \quad \phi(x) = c\frac{P_k(x)}{|x|^k}\frac{1}{|x|^{\frac{2}{\rho}}},$$

onde $P_k(x)$ *é um polinômio harmônico homogêneo de grau* k *e* $c \in \mathbb{C}$ *é suficientemente pequeno, então a solução* $u = u(x,t)$ *obtida pelo teorema 4.3 relativa ao dado inical* ϕ *é auto-similar.*

Demonstração. Primeiramente, é óbvio que ambas as expressões para ϕ representam funções homogêneas de grau $-\frac{2}{\rho}$. Veja que pelas hipóteses do Teorema 4.3 temos $0 < \frac{2}{\rho} < n$. Pelo mesmo motivo temos também, por um lado, que

$$\rho + 2 > \frac{np}{2}, \tag{4.21}$$

e por outro lado

$$\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{\rho n}{2} = \frac{\rho n - 2}{2} + 1,$$

e logo,

$$\frac{1}{\rho+1} = \frac{\rho+2}{\rho+1} - 1 < \frac{\rho n-2}{2}, \text{ e daí,} \quad \frac{2}{\rho n-2} < \rho+1.$$

Somando 1 em ambos lados da ultima desigualdade obtemos

$$\frac{\rho n}{\rho n-2} < \rho+2. \tag{4.22}$$

Assim, por (4.21) e (4.22) temos

$$\rho+2 > \max\left\{\frac{n}{n-\frac{2}{\rho}}, \frac{n}{(\frac{2}{\rho})}\right\}.$$

Portanto, as proposições 3.2 e 3.4 nos garantem que $\|e^{i\Delta}\phi\|_{L^{\rho+2}} < +\infty$ no caso em que $\phi(x) = c|x|^{-\frac{2}{\rho}}$ e também para $\phi(x) = c\frac{P_k(x)}{|x|^k}|x|^{-\frac{2}{\rho}}$. Daí, pela imersão contínua $L^{\rho+2}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{\rho+2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 1.5), temos que

$$\|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} \leqslant \|e^{i\Delta}\phi\|_{L^{\rho+2}} < +\infty.$$

Portanto, escolhendo $c \in \mathbb{C}$ tal que $\|e^{i\Delta}\phi\|_{\rho+2,\infty} < \varepsilon_0$ para ε_0 suficientemente pequeno, podemos aplicar o Corolário 4.2 ao dado inicial ϕ, e segue o resultado.

$\square$

Capítulo 5

Estabilidade e Decaimento das Soluções

Neste capítulo iremos apresentar propriedades importantes e satisfeitas pelas soluções obtidas nos teoremas 4.2 e 4.3. No que segue, estamos interessados em expor às propriedades de estabilidade assintótica relativa à soluções globais e de decaimento para soluções locais.

A estabilidade assintótica nos espaços E_α aqui abordada é uma propriedade de "proximidade" no infinito relativa a duas soluções, no sentido matemático que,

$$\lim_{|t|\to\infty} |t|^{h+\frac{\alpha}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0,$$

para $u, v \in E_\alpha$ e $h \geqslant 0$, i.e., $|t|^{\frac{\alpha}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty}$ tende a zero quando $|t| \to \infty$ mais rápido que $\dfrac{1}{|t|^h}$. O fato é que, sobre certas condições, impor uma propriedade como acima sobre $e^{it\Delta}$ aplicado a dois dados iniciais, vai ocasionar na mesma propriedade sendo satisfeita pelas respetivas soluções globais.

Com repeito ao decaimento de soluções em $E^T_{\alpha,\beta}$ não é tão diferente, mas aqui a propriedade a ser satisfeita é de $u, v \in E^T_{\alpha,\beta}$ estarem "próximas" na origem, ou rigorosamente,

$$\lim_{|t|\to 0} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0,$$

para $h \geqslant 0$ ($h < 0$ é óbvia). Assim, podemos exergar essa prorpriedade como

$$|t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} \to 0$$

quando $t \to 0$ mais rápido que $|t|^h$. Analogamente, temos que uma propriedade como esta imposta a dois dados iniciais sobre efeitos do grupo $e^{it\Delta}$ garantem a mesma propriedade sendo satisfeita pelas respectivas soluções locais.

Feitas essas considerações, temos o seguinte teorema a respeito da estabilidade assintótica e dacaimento das soluções.

Teorema 5.1. *1. (Estabilidade Assintótica) Suponha* $0 \leqslant h < 1 - \frac{\alpha}{2}(\rho+1)$, *e sejam* $u, v \in E_\alpha$ *duas soluções globais do PVI* (1) *obtidas através do Teorema 4.3 (boa colocação global), correspondendo as respectivas condições iniciais* $\phi, \varphi \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$. *Se*

$$\lim_{|t|\to+\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}+h} \|e^{it\Delta}(\phi - \varphi)\|_{\rho+2,\infty} = 0, \tag{5.1}$$

então

$$\lim_{|t|\to+\infty} |t|^{\frac{\alpha}{2}+h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0. \tag{5.2}$$

2. (Taxa de Decaimento quando $t \to 0$*) Suponha* $\delta = 1 - \frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1) > 0$, *e* $h > -\delta$. *Sejam* $u, v \in E_{\alpha,\beta}$ *duas soluções locais do PVI* (1) *obitidas através do Teorema 4.2 (boa colocação local), correspodendo as respectivas condições iniciais* $\phi, \varphi \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}$. *Se*

$$\lim_{t\to 0} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h} \|e^{it\Delta}(\phi - \varphi)\|_{\rho+2,\infty} = 0 \tag{5.3}$$

então

$$\lim_{t\to 0} |t|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0 \tag{5.4}$$

Demonstração. Para a parte 1 do teorema, observe que é suficiente provarmos que

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0 = \lim_{t\to-\infty} (-t)^{\frac{\alpha}{2}+h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty}.$$

Mas, como as demonstrações em ambos casos são análogas, nos restringiremos a provar apenas a primeira igualdade. Neste caso, considere $t > 0$. Sabe-se que u, v satisfazem as equações

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u(s)|^\rho u(s) ds, \tag{5.5}$$

$$v(t) = e^{it\Delta}\varphi - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |v(s)|^\rho v(s) ds. \tag{5.6}$$

Daí, por (5.5) e (5.6) segue que

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha}{2}+h} \|u(t) - v(t)\|_{\rho+2,\infty} &\leqslant t^{\frac{\alpha}{2}+h} \|e^{it\Delta}(\phi - \varphi)\|_{\rho+2,\infty} \\ &\quad + t^{\frac{\alpha}{2}+h} \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u|u|^\rho - v|v|^\rho) ds \right\|_{\rho+2,\infty}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por outro lado, pelos lemas 2.4, 1.3 e 2.2, e a mudança de variáveis $s \to ts$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u(s)|u(s)|^\rho - v(s)|v(s)|^\rho)ds\right\|_{\rho+2,\infty} \\
&\leqslant \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta}(u(s)|u(s)|^\rho - v(s)|v(s)|^\rho)\|_{\rho+2,\infty}ds \\
&\leqslant C\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}\|u(s)|u(s)|^\rho - v(s)|v(s)|^\rho\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}ds \\
&\leqslant C\cdot W\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}(\|(u(s)-v(s))\cdot(|u(s)|^\rho + |v(s)|^\rho)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty}ds \\
&\leqslant \tilde{C}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}(\|u(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty} + \|v(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty})\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\
&= \tilde{C}\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)-h}[(s^{\frac{\alpha}{2}}\|u(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho + (s^{\frac{\alpha}{2}}\|v(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho]\times \\
&\times s^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\
&\leqslant \tilde{C}(\|u\|^\rho_{(\alpha)} + \|v\|^\rho_{(\alpha)})\int_0^t (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)-h}s^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\
&= \tilde{C}(\|u\|^\rho_{(\alpha)} + \|v\|^\rho_{(\alpha)}) \\
&\times \int_0^1 (t-ts)^{-\frac{n}{2}(\frac{2(\rho+1)}{\rho+2}-1)}(ts)^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)-h}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}\cdot tds \\
&= \tilde{C}(\|u\|^\rho_{(\alpha)} + \|v\|^\rho_{(\alpha)}) \\
&\times t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)-h}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds \\
&= \tilde{C}(\|u\|^\rho_{(\alpha)} + \|v\|^\rho_{(\alpha)})t^{-\frac{\alpha}{2}-h}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds,
\end{aligned}
$$

pois pela definição de α, β segue que

$$1 - \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\rho = 0.$$

Portanto, como $\|u\|_{(\alpha)}, \|v\|_{(\alpha)} \leqslant 2\varepsilon$, temos em (5.7) que

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} &\leqslant t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty} \\
&+ \tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

Fixe agora $M > 0$. Usando o fato que a aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto |t|^{\frac{\alpha}{2}}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}$ é contínua e limitada e a hipótese que $|t|^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty} \to 0$ quando $|t| \to +\infty$, temos que

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant M} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty, \qquad \sup_{t\geqslant 0} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty.$$

Escolha também $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\Gamma := \tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds < 1.$$

Portando, por (5.8), temos que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant M} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}\\
&\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant M} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty}\\
&+\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant M}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}\right) ds\\
&\leqslant \sup_{t\geqslant 0} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty}+\Gamma\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant M} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant M} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}\leqslant \frac{1}{1-\Gamma}\sup_{t\geqslant 0} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty.$$

Portanto, como $M > 0$ é arbitrário, segue que

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty.$$

Defina então

$$A := \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty.$$

Daí, novamente por (5.8), e pela hipótese (5.1) sobre as condições iniciais, temos que

$$\begin{aligned}
A &:= \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}\\
&\leqslant \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty}\\
&+\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)}\left(\limsup_{t\to+\infty}(ts)^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}\right) ds\\
&= 0 + A\cdot\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha}{2}(\rho+1)} ds = A\Gamma,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$A(1-\Gamma) = 0,$$

e portanto,

$$A = \limsup_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0.$$

Com mais razão,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}+h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0,$$

e segue a primeira parte do Teorema. Para a parte 2 do teorema, exatamente como antes, é suficiente provarmos que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty}=0.$$

Considere então $0<t<T$. Analogamente como visto antes, temos que

$$\begin{aligned} t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} &\leqslant t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty}+ \\ &+t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u|u|^\rho-v|v|^\rho)ds\right\|_{\rho+2,\infty}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} & t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u(s)|u(s)|^\rho-v(s)|v(s)|^\rho)ds\right\|_{\rho+2,\infty}\leqslant \\ & \leqslant \tilde{C}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\int_0^t(t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}(\|u(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty}+\|v(s)\|^\rho_{\rho+2,\infty})\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\ & =\tilde{C}t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\int_0^t(t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}((s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|u(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho+(s^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\|v(s)\|_{\rho+2,\infty})^\rho)\times \\ & \times s^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\ & \leqslant \tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\int_0^t(t-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}s^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(s)-v(s)\|_{\rho+2,\infty}ds \\ & =\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\int_0^1(t-ts)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}(ts)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}(ts)^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}\cdot tds \\ & =\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h+1}\int_0^1(1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}\times \\ & \times (ts)^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds \\ & =\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho t^{\delta}\int_0^1(1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}(ts)^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \delta &:= 1-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1) \\ &= \frac{\alpha-\beta}{2}-h-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h+1. \end{aligned}$$

Portanto, em (5.9), temos

$$\begin{aligned} & t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} \\ & \leqslant t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|e^{it\Delta}(\phi-\varphi)\|_{\rho+2,\infty} \\ & +\tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^\rho t^\delta\int_0^1(1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h}(ts)^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(ts)-v(ts)\|_{\rho+2,\infty}ds \end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora, usando a hipótese (5.3) sobre as condições iniciais podemos, de forma análoga ao que foi feito na parte 1 do teorema, ver que

$$D := \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} < +\infty.$$

Portanto, tomando $\limsup_{t\to 0^+}$ na desigualdade (5.10) obtemos que

$$0 \leqslant D \leqslant \tilde{C}2^{\rho+1}\varepsilon^{\rho}B\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h} ds \cdot \lim_{t\to 0^+} t^{\delta} = 0,$$

visto que

$$\int_0^1 (1-s)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} s^{-\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)+h} ds < +\infty,$$

pois como $h > -\delta = -1 + \frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1)$ temos

$$\frac{\alpha-\beta}{2}(\rho+1) - h < 1.$$

Assim,

$$D = \limsup_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0,$$

e logo,

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\alpha-\beta}{2}-h}\|u(t)-v(t)\|_{\rho+2,\infty} = 0.$$

Isto conclui a demonstração.

□

Referências Bibliográficas

[1] Ferreira L., Villamizar-Roa E., Silva P. - *On the existence of infinite energy solutions for nonlinear Schrodinger equations.* Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), nº6, 1977-1987.

[2] Tartar L. - *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces.* Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer Berlin, Heidelberg, 2007.

[3] Bergh J., Löfström J. - *Interpolation Spaces* : An Indroduction. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1976.

[4] O'Neil R. -*Convolution operators and L(p,q) spaces.* Duke Math. J. 30 (1) 129 - 142, March 1963.

[5] Folland G. -*Real Analysis* : Modern Techniques and Their Applications. 2ª Ed. Wiley-Interscience Publication. EUA, 1999.

[6] Cazenave T., Weissler F. - *Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations*, Math. Z. 228 (1998), no.1, 83–120.

[7] Cazenave T. - *Semilinear Schrödinger equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, (2003).

[8] Cazenave T., Weissler F., - *The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in* H^1. Manuscripta Math. 61 (1988), no. 4, 477-494.

[9]] Cazenave T., Weissler F. - *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in* H^s. Nonlinear Anal. 14 (1990), no. 10, 807-836.

[10] Kato, T. - *On nonlinear Schrödinger equations. II.* H^s*-solutions and unconditional well posedness* J. Anal. Math. 67 (1995), 281-306.

[11] Ginibre J., Velo G. - *On the global Cauchy problem for some nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), no. 4, 309-323.

[12] Linares F., Ponce G. - *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Second edition. Springer, New York, 2015.

[13] Grafakos L. - *Classical Fourier analysis.* Third edition. Springer, New York, 2014.

[14] Stein E., Shakarchi R. - *Complex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, 2003.

[15] Ash R., Novinger W. - *Complex variables* . Dover Publications. Mineola, N.Y, 2007.

[16] Hunt R. - *On L(p,q) spaces.* Enseign. Math. (2) 12 (1966), 249–276.

[17] Schrödinger E. - *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules.* American Physical Society, v. 28, n. 6, p. 1049, 1926.

[18] Griffiths D. - *Introduction to Quantum Mechanics*, 2ª ed. Upper Saddle River, Nova Jérsei: Prentice Hall, 2004.

[19] Ferreira L., Villamizar-Roa E. - *Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations.* Khayyam Publishing, Differential Integral Equations 19, 2006, no. 12, 1349-1370.

[20] Barros V., Ferreira L., Pastor A. - *On the two-power nonlinear Schrödinger equation with non-local terms in Sobolev-Lorentz spaces.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 26 (5) (2019), Paper No. 39, 29 pp

[21] Myint-U T., Debnath L. - *Linear partial differential equations for scientists and engineers.* Springer Science & Business Media, 2007.

[22] Oliveira O. - Notas de Aula : *Medida e Integração.* IMEUSP, São Paulo, 2016.

[23] Domingues H. - *Espaços Métricos e Introdução à Topologia.* Atual Editora, São Paulo, 1982.