Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Controlabilidade Aproximada para uma Equação de Difusão via Estratégia de Stackelberg - Nash

Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque

Teresina - 2014

Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Aproximada para a Equação do Calor via Estratégia de Stackelberg - Nash

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2014

Albuquerque, I. A O.

xxxx Controle Aproximado para a Equação do Calor com Operador Fortemente Elíptico via Estratégia de Stackelberg - Nash.

Ítalo Augusto Oliveira de Albuquerque – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.

1. Análise/ Equações Diferenciais Parciais

CDD 516.36

Dedico esse trabalho a minha querida avó Rosa de Oliveira Araújo e minha mãe Itamara Oliveira de Araújo.

Agradecimentos

À Deus, por ser tudo em minha vida.

À minha família, principalmente minha avó Rosa de Oliveira Araújo e minha querida mãe Itamara de Oliveira Araújo por sempre me apoiarem e acreditarem no meu potencial, pelos conselhos e pelo carinho que recebo até hoje.

À banca examinadora, em especial ao Professor Marcondes Rodrigues Clark por ter sido mais que um orientador, um amigo para toda vida.

Ao corpo docente do PPGMAT, em especial aos professores Isaías Pereira, Roger Peres de Moura, Paulo Alexandre Araújo Sousa, Barnabé Pessoa Lima, entre outros que ajudaram de alguma forma nesse percurso tão difícil mas gratificante.

Aos meus familiares Eliane Albuquerque e Edilbertina Albuquerque por sempre me apoiarem nos meus estudos, pelos conselhos e pelo exemplo de vida.

Ao meu grande amigo Bruno Vasconcelos por estar comigo nessa caminhada desde a graduação, somos um grande grupo de estudo!

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente meus agracimentos.

"Há pessoas que choram por saber que as rosas têm espinhos. Há outras que sorriem por saber que os espinhos têm rosas."

Machado de Assis

Resumo

Nesse trabalho estudamos a controlabilidade aproximada para a equação linear de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = v\chi + \sum_{i=1}^{n} w_i\chi_i,$$

onde A é um operador fortemente elíptico, v é o controle líder globalmente distribuído, $w_1, \ldots, w_n$ são os seguidores localmente distribuídos, χ é a função característica de $\mathcal{O}$ e χ_i é a função característica de $\mathcal{O}_i$ que serão definidos posteriormente.

Usaremos a estratégia de Stackelberg - Nash para mostrar que sobre certas condições o problema acima é aproximadamente controlável em um tempo $T > 0$.

Abstract

In this work we study the approximate controllability for the linear diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = v\chi + \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_i$$

where A is a strongly elliptic operator will be defined later, v is the leading globally distributed control, $w_1, \ldots, w_n$ is the followers locally distributed, χ is the characteristic function of $\mathcal{O}$ and χ_i is the characteristic function of $\mathcal{O}_i$ will be defined later.

We'll use the strategy of Stackelberg-Nash to show that under certain conditions the above problem is approximately controllable on a time $T > 0$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Em muitos sistemas da natureza há a possibilidade de intervenção que permite exercer algum tipo de controle sobre eles. No próprio cotidiano do ser humano, ele está sempre a procura de controlar algo, seus gastos por exemplo, de tal modo que isso gere um estado final desejado. Basicamente a origem da teoria de controle são os sistemas de regulagem onde procura-se desenvolver um processo automático para que um sistema fique numa situação de equilíbrio. Assim um sensor detecta se o sistema está ou não desregulando e um controlador atuaria automaticamente para restabelecer o equilíbrio. Claro que muitos mecanismos engenhosos foram desenvolvidos durante milênios para resolver este problema, porém um caso interessante e bastante conhecido era o de controle de velocidade de moinhos de vento. Huygens[1] inventou um instrumento conhecido como *flyball* que na prática resolvia o problema. Esta mesma idéia do *flyball* foi usada depois por Watt[2] em máquinas para o controle de fluxo de vapor que funcionava, na prática, como um problema de excesso de vibração para velocidades muito altas. Motivado por isso, Maxwell elaborou um modelo matemático para o *flyball* e colocou o problema de eliminação das vibrações como um problema de estabilização. Podemos afirmar que este foi o primeiro problema matemático da teoria de controle ao qual se tem conhecimento. No começo do século XX, o desenvolvimento das redes de comunicações telefônicas, propiciou o aparecimento de novos modelos e a utilização de métodos da teoria de funções a variáveis complexas para eliminação de ruídos e filtragens de sinais. Os trabalhos pioneiros nesta linha deveu-se a

[1] C. Ruygens 1629 - 1695

[2] J. Watt 1736-1819

Blackman[3], Bode[4] e Nyquist[5] do grupo do laboratório Bell. O conjunto de métodos desenvolvidos por eles influenciaram bastante a engenharia e é chamado de teoria de controle clássica, isso foi mais ou menos em 1930. Depois da segunda guerra mundial os métodos de otimização ganharam importância e é um mérito da teoria de Pontriaguin o estudo da teoria de controle ótimo. O desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos propiciou uma nova abordagem para os sistemas de controles lineares. Assim, nas décadas de 1960 e 1970 foi desenvolvido uma teoria estrutural dos sistemas de controle. E nesta abordagem "moderna"baseada no espaço de estados dos sistemas são importantes os conceitos de controlabilidade e observabilidade introduzidos por Kalman, conforme Zuazua [21]. No final do século passado desenvolveram-se os métodos geométricos para o estudo de sistemas de controle não linear. Em 1990, durante as Jornadas Hispano-Francesas sobre Controles de Sistemas Distribuídos que o matemático Jacques Louis Lions[6] pela primeira vez introduziu o conceito de controlabilidade aproximada para a equação do calor em [11] criando uma grande família de problemas aproximadamente controláveis. Nesse mesmo encontro, J.L. Lions mostrou que a controlabilidade aproximada era consequência imediata do Teorema de Hanh-Banach, quando no problema aparece o funcional custo para se obter esse tipo de controlabilidade e ainda caracterizou os controles que aproximam o estado ideal do sistema por meio das soluções de um sistema de otimalidade. Essa dissertação é baseada no artigo de Lions e Díaz [5], no qual é analisado a controlabilidade aproximada para a equação do calor com um operador fortemente elíptico de segunda ordem.

Inicialmente consideraremos um sistema onde o estado é governado pela solução de uma equação diferencial. Esse tipo de sistema recebe o nome de sistema distribuído. Assumiremos que podemos agir nesse sistema com uma hierarquia de controles. Existe um controle líder, v, e os seus n controles seguidores, $w_1, \ldots, w_n$. Após uma observação, o líder fará uma escolha e seus seguidores procuram por um equilíbrio de Nash de suas funções custo. A estratégia de Stackelberg - Nash consiste em distribuir os seguidores em conjuntos abertos $\mathcal{O}_i$, disjuntos dois a dois, de tal forma que, após uma análise, o líder fará a escolha final de todo o sistema.

Essas situações ocorrem em muitos problemas do meio ambiente e nas engenharias, os

[3]1904 -1990

[4]1905 - 1982

[5]H. Nyquist 1889 - 1976

[6]J.L. Lions 1928-2001

quais em muitos casos o sistema em questão não é distribuído. Para a formulação do nosso problema imaginemos um lago em um determinado local, representado por um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O estado é denotado por u que é uma função vetorial $u = (u_1, \ldots, u_n)$, onde cada u_i é uma função de $x \in \Omega$ e $t \in [0, +\infty]$, onde t o tempo. Cada função u_i pode ser vista como as concentrações das variações químicas no lago ou mesmo seus organismos hospedeiros. No local existem $P_1, \ldots, P_n$ agentes locais, ou mesmo certos organismos vivos como as plantas. Cada P_i poderá fazer uma escolha w_i com algumas restrições e dentre elas existe um líder que fará uma escolha v. Denotamos por $\Sigma = \partial(\Omega \times (0, T))$. Portanto a equação que rege esse problema é dada por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = \text{Fontes} + \text{Causas} + \text{Controle Global} + \text{Controle Local em } Q \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

O objetivo geral do líder é manter o lago o mais limpo possível com o menos custo e tempo. Em outras palavras, se a situação em $t = 0$ não é inteiramente satisfatória, o líder deseja conduzir o sistema em um intervalo de tempo escolhido $(0, T)$ o mais próximo possível do estado ideal denotado por u^T. Cada P_i tem essencialmente a mesma meta, mas P_i deverá seguir algumas restrições para que o estado u fique próximo de sua localização. Para isso introduzimos a função ρ_i, suave em $\overline{\Omega}$ tal que

$$\rho_i(x) \geqslant 0, \;\; \rho_i \equiv 1 \text{ próximo de } P_i. \tag{1.2}$$

Então P_i tentará escolher w_i de tal maneira que o estado no tempo T esteja próximo de $\rho_i u^T$ com o menor custo possível. Introduzimos assim o funcional custo

$$J_i(v; w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega [\rho_i(u(\cdot, T) - u^T)]^2 dx, \tag{1.3}$$

onde a primeira integral representa o custo de w_i, α_i é uma constante positiva dada e a segunda integral é a distância do estado atual no tempo T e o estado desejado u^T. A função $\rho_i(x)$ funciona como um peso, ou seja, faz com que o sistema não seja cooperativo. O operador $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é definido por:

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x)\varphi \tag{1.4}$$

Assumiremos que a equação que rege o estado do sistema é dada por

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = v\chi + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i\chi_i \text{ em } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \end{array}\right. \tag{1.5}$$

onde χ é a característica de $\mathcal{O} \subset \Omega$ e χ_i é a característica de $\mathcal{O}_i \subset \Omega$, v é o controle globalmente distribuído em $\mathcal{O}$ e w_i é o controle localmente distribuído em $\mathcal{O}_i$. A função $\rho_i(x)$ funciona como um peso, ou seja, faz com que o sistema não seja cooperativo, dessa forma dados $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j =$.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 2 listamos alguns resultados clássicos e fixamos algumas notações que serão utilizados no decorrer desse trabalho, os quais serão enunciados sem demonstração e com indicações das referências para possíveis consultas.

No capítulo 3 provaremos algumas propriedades importantes para o operador elíptico A e estudaremos a existência e unicidade de solução para o problema (1.5).

Finalmente, no capítulo 4 demonstraremos a contrololabilidade aproximada para o problema (1.5), a existência e unicidade do equilíbrio de Nash e a otimalidade dos seguidores e do líder.

Capítulo 2

Terminologia e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições, notações básicas da teoria de Equações diferenciais parciais e os resultados preliminares fundamentais que serão usados ao longo desse trabalho. As demonstrações desses resultados não serão feitas mas poderão ser encontradas nas refêrencias bibliográficas.

2.1 Noções Básicas de Distribuições Escalares e Espaços de Sobolev

No decorrer desse trabalho denotaremos por Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e a norma em $L^2(\Omega)$ como $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ ou simplesmente $|\cdot|$. Outras normas serão especificadas de acordo com o contexto dos resultados trabalhados.

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denotaremos o suporte de f como sendo o conjunto

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciaveis com suporte compacto em Ω.

Um multi-índice é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números naturais. Escreveremos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e representamos D^α como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}$$

Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ quando:

(i) Todas as u_n possuírem suporte em um compacto $K \subset \Omega$;

(ii) A sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u uniformemente em K juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido com as propriedades (i) e (ii) acima será denotado por $D(\Omega)$. Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear e contínua sobre $D(\Omega)$, ou seja, é uma aplicação $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g), \forall\, f, g \in D(\Omega), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. Se $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em $D(\Omega)$, então $T\varphi_n \longrightarrow T\varphi$ em $\mathbb{R}$.

O valor de T aplicado numa função φ será denotado por $\langle T, \varphi\rangle$. A seguir, definimos uma noção de convergência para esse funcionais. Dizemos que $T_n \longrightarrow T$ em $D(\Omega)$ quando $\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para todo $\varphi \in D(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω com essa noção de convergência será denotado por $D'(\Omega)$. Definimos também a derivada distribucional de ordem α de T como sendo a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle,\ \forall\, \varphi \in D(\Omega).$$

Sejam $p \in [1, \infty)$ e $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant m$, ou ainda,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leqslant m\}.$$

A norma nesse espaço será denotada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|_{L^p}^p\Big)^{1/p}.$$

Com essa norma, pode-se provar que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach (Ver [4]). Esses espaços são chamados de espaços de Sobolev. Quando $p = 2$ eles recebem uma notação especial, a saber,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

onde $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$ (Ver [14]). Embora $D(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$, em geral $D(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Dessa forma, denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{W^{m,p}(\Omega)}^{D(\Omega)}$ que também é um espaço de Sobolev e se $p = 2$ denotaremos $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. O dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W^{-m,p}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

2.2 Resultados de Análise, Medida e Teoria do Controle

Consideremos $T > 0$, X um espaço de Banach e $p \in [1, \infty]$. Definimos

$$L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \longrightarrow X;\ u \text{ é mensurável e } \|u(t)\|_X \in L^p(0,T)\}$$

com a norma

(I) $$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|^p_X dt\Big).$$

Se $p = \infty$, munimos $L^\infty(0,T;X)$ com a norma

(II) $$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\|u(t)\|_X.$$

O espaço $L^p(0,T;X)$ e $L^\infty(0,T;X)$ são espaços de Banach munido com a norma (I) e (II) respectivamente (Ver [13]). Um caso particularmente importante é quando $p = 2$ e X for um espaço de Hilbert. Nesse caso o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt,\ \forall u,v \in L^2(0,T;X).$$

Com isso, temos os seguintes resultados:

Lema 2.2.1. *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e suponhamos que* $X \hookrightarrow Y$. *Se* $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, *então*
$$L^s(0,T;X) \hookrightarrow L^r(0,T;Y)$$

Demonstração: Ver [13] ■

Teorema 2.2.1. *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Se* $u \in L^p(0,T;X')$ *e* $v \in L^p(0,T;X)$ *então a dualidade entre esses espaços é dada por*

$$\big\langle u,v\big\rangle_{L^p(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \big\langle u(t),v(t)\big\rangle dt.$$

Demonstração: Ver [18]. ■

Teorema 2.2.2. *Consideremos* X *e* Y *espaços de Hilbert tais que* $X \hookrightarrow Y$, $u \in L^p(0,T;X)$, $u' \in L^p(0,T;Y)$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então* $u \in C^0([0,T];Y)$.

Demonstração: Ver [4] ■

Definição 2.2.1. *Sejam* D *um conjunto compacto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Dizemos que* f *satisfaz as condições de Carathéodory sobre* D *se:*

(i) $f(t,x)$ *é mensurável em* t *para cada* x *fixo;*

(ii) $f(t,x)$ *é contínua em* x *para cada* t *fixo;*

(iii) Para cada compacto $U \subset D$ *existe uma função real integrável* $m_\mu(t)$ *tal que*

$$|f(t,x)| \leqslant m_\mu(t), \ \forall\,(t,x) \in U.$$

Teorema 2.2.3. ***(Carathéodory)*** *Consideremos* $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\}$ *com* $a, b > 0$ *e* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R. *Então o problema de valor inicial*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

tem uma solução $x(t)$ *em algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta, \ \beta > 0.$

Demonstração: Ver [14]. ∎

Corolário 2.2.1. *Sejam* D *um aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* D. *Então (2.1) tem solução para qualquer* $(t_o, x_0) \in D$.

Demonstração: Ver [14]. ∎

Corolário 2.2.2. *Sejam* $[0, w] \times B$, *onde* $0 < w < +\infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leqslant b, \ b > 0\}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja* φ *solução de*

$$\left|\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \ |x_0| \leqslant b. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Suponhamos que em qualquer intevalo I *onde* φ *esteja definida tenhamos* $|\varphi(t)| \leqslant M$, *para todo* $t \in I, M$ *independe de* t *e* $M < b$. *Então* φ *tem um prolongamento até* $[0, w]$.

Demonstração: Ver [14]. ∎

Definição 2.2.2. *Sejam* H_1 *e* H_2 *espaços de Hilbert e* $T : H_1 \longrightarrow H_2$ *um operador linear e limitado. Então o operador adjunto* $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ *satisfaz*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \ \forall\, x \in H_1, \ \forall\, y \in H_2.$$

Teorema 2.2.4. *(Existência e Unicidade) Seja* $T : H_1 \longrightarrow H_2$ *como na definição (2.2.2). Então o operador* $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ *existe, é único e é linear e limitado. Além disso,*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Demonstração: Ver [10]. ∎

Lema 2.2.2. *(Desigualdade de Gronwall) Consideremos* u *uma função não negativa em quase todo ponto e integrável em (0,T),* $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)\varphi(s)ds, \ \forall\, t \in [0,T], C \geqslant 0.$$

Então

$$\varphi(t) \leqslant C \exp\Big(\int_0^t u(s)ds\Big).$$

Demonstração: Ver [7]. ∎

Teorema 2.2.5. *Sejam* $k \in \mathbb{N}, a_{ij}, b_i, a_0 \in C^{k+1}(\overline{\Omega}), f \in W^{k,2}(\Omega)$ *com* Ω *de classe* C^{k+2}*. Suponhamos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$\left|\begin{array}{l} Au = f \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Então $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ *e existe uma constante positiva* $C = C(k,\Omega,a_{ij},b_i,a_0)$ *tal que*

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leqslant C(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Demonstração: Ver [1]. ∎

Teorema 2.2.6. *Sejam* X *um espaço de Banach e* X' *o seu dual topológico. Consideremos* $u, g \in L^1(0,T;X)$*. São equivalentes:*

(i) $u(t) = \xi + \displaystyle\int_0^T g(s)ds$, $\xi \in X$ *não depende de* t*;*

(ii) Para cada $\varphi \in D(0,T)$ *tem-se:*

$$-\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = \int_0^T g(t)\varphi(t)dt$$

(iii) Para cada $x' \in X'$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}(u(t),x') = \Big\langle g(t), x' \Big\rangle \text{ em } D'(0,T)$$

Demonstração: Ver [16]. ∎

Teorema 2.2.7. *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e seja* (x_n) *uma sequência limitada em* X*. Então* (x_n) *admite uma subsequência fracamente convergente em* X*.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Teorema 2.2.8. *Seja* $F \subset E$ *um subespaço linear. Se para cada funcional linear* $f \in E^*$ *tal que*

$$(f, x) = 0, \ \forall x \in F$$

implicar que $f \equiv 0$, *então* $\overline{F} = E$.

Demonstração: Ver [4]. ■

Teorema 2.2.9. *(Du Bois Raymond) Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado. Se*

$$\int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx = 0, \ \forall v \in D(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Ver [15]. ■

Teorema 2.2.10. *(Regra da Cadeia) Sejam* g *uma função de classe* $C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $g(0) = 0$ *e* $\|g'(s)\| \leqslant M, \ \forall s \in \mathbb{R}$ *e para alguma constante* M. *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então*

$$g \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ u) = (g' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Demonstração: Ver [15] ■

Teorema 2.2.11. *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* Γ *regular.*
(i)Se $n > 2m$ *temos que* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *onde* $p \in \left[1, \frac{2n}{n - 2m}\right]$.
(ii) Se $n = 2m$, *então* $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *onde* $p \in [1, \infty)$.
(iii) Se $n = 1$ *e* $m \geqslant 1$, *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [4]. ■

Lema 2.2.3. *(Desigualdade de Young) Sejam* $p > 1, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \ \forall a \geqslant 0, \forall b \geqslant 0.$$

Demonstração: Ver [4]. ■

Lema 2.2.4. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4]. ■

Teorema 2.2.12. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach tais que* $X \hookrightarrow Y$ *e* $0 < p \leqslant \infty$*. Então* $L^p(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y) = L^p(0,T;X \cap Y)$.

Demonstração: Ver [11] ■

Teorema 2.2.13. *(Representação de Riesz) Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$*. Então existe um único* $u \in L^q(\Omega)$*, com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *tal que*

$$\left\langle \varphi, f \right\rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$|u|_{L^p(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [4] ■

Teorema 2.2.14. *(Lax - Milgram) Seja* V *um espaço de Hilbert. Se* $a(u,v)$ *é uma forma bilinear, contínua, coerciva em* $V \times V$ *e* f *é uma forma linear contínua sobre V, então o problema variacional abstrato*

$$a(u,v) = (f,v)$$

possui uma única solução $u \in V$*. Além disso, a aplicação* $f \mapsto u$ *é linear e lipschitziana de* V' *em* V *com constante de Lipschitz igual a* α^{-1}*, onde* α *é a constante de coercividade de* $a(u,v)$*.*

Demonstração: Ver [15]. ■

Teorema 2.2.15. *Sejam* V *um espaço de Hilbert,* $A \subset V$ *um conjunto convexo e* F *uma função Gateaux-Diferenciável tal que* $F' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um funcional linear. Então são equivalentes:*

(i) F *é estritamente convexo;*

(ii) $F(v) > F(u) - \left\langle F'(u), v-u \right\rangle, \ \forall u,v \in A.$

Demonstração: Ver [6]. ∎

Definição 2.2.3. *Sejam* X *um espaço topológico e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é semicontínua inferiormente em* $x_0 \in X$ *se para cada* $\varepsilon > 0$ *existe uma vizinhança* V_{x_0} *em torno de* x_0 *tal que*

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

para cada $x \in V_{x_0}$*. Equivalentemente,* f *é semicontínua inferiormente em* x_0 *se*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \inf f(x) \geqslant f(x_0) \quad .$$

Demonstração: Ver [4] ∎

Teorema 2.2.16. *Sejam* X *um espaço de Hilbert e* F *um funcional convexo e Gateaux diferenciável com* F' *contínua. Se* $u \in X$ *então são equivalentes:*
(i) u *é solução de* $\inf\limits_{x \in X} F(u)$;
(ii) $\left\langle F'(u), v - u \right\rangle \geqslant 0, \ \forall v \in X$;

Demonstração: Ver [6] ∎

Teorema 2.2.17. *Sejam* E *um espaço reflexivo e* $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexa, coerciva e semicontínua inferiormente. Então* F *possui um ponto de mínimo global. Além disso, se* F *é estritamente convexa, então este ponto é único.*

Demonstração: Ver [6]. ∎

Teorema 2.2.18. *(Fenchel - Rockafellar) Consideremos* X *e* Y *espaços de Hilbert,* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *funções semicontínuas inferiormente e convexas. Sejam*

$$v = \inf_{x \in X}\{f(x) + g(Ax)\}$$
$$v^* = \inf_{q \in Y^*}\{f^*(-A^*q) + g^*(q))\}$$

onde $f^*(p) = \sup\limits_{x \in X}[\left\langle p, x \right\rangle - f(x)]$ *é a conjugada de* f*. Se* $0 \in int[A(D(f)) - D(g)]$*, então temos:*
(i)$v + v^* = 0$
(ii)Existe $q' \in Y^*$ *tal que* $f^*(-A^*q') + g^*(q') = v^*$

Demonstração: Ver [3]. ∎

Teorema 2.2.19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $a \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ e $b \in (L^\infty(\Omega \times (0,T)))^n$ e $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ tal que φ é solução de*

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A^*\varphi + a\varphi - div(b\varphi) = 0 \\ \varphi = 0 \ \text{em} \ \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi^0 \ \text{em} \ \Omega \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Se $\varphi = 0$ em $\mathcal{O} \times (0,T)$, onde $\mathcal{O} \subset \Omega$, então $\varphi^0 \equiv 0$, isto é, $\varphi^0(x) = 0, \ \forall x \in \Omega$.

Demonstração: Ver [8]. ∎

Definição 2.2.4. *Um sistema de equações diferenciais é **exatamente controlável** em um tempo $T > 0$ se, e somente se, dados f_0 e f_1, funcionais definidos em um espaço de Banach Υ (Também chamadas de espaço das funções admissíveis para o sistema), existir uma função controle $v : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que o problema de Cauchy*

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t X = F(t, X, v) \\ X\big|_{t=0} = f_0 \end{array} \right.$$

*satisfaz $X\big|_{t=T} = f_1$. Se $f_1 = 0$, dizemos que o sistema é **nulo controlável** ou tem a propriedade de **controlabilidade nula**.*

Definição 2.2.5. *Dizemos que um sistema é **aproximadamente controlável** em um tempo $T > 0$ se, e somente se, para cada $f_0, f_1 \in \Upsilon$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe um controle $v : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a solução do problema de Cauchy associado ao sistema*

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t X = F(t, X, v) \\ X\big|_{t=0} = f_0 \end{array} \right.$$

satisfaz

$$\|X\big|_{t=T} - f_1\|_\Upsilon < \varepsilon.$$

Em outras palavras, o espaço das funções admissíveis é denso em Υ.

Teorema 2.2.20. ***(Alternativa de Fredholm)*** *Sejam H um espaço de Hilbert e $K : H \longrightarrow H$ um operador linear compacto. Então:*

(i) dim$N(Id - K)$ é finito;

(ii) Im$(Id - K)$ é um subespaço fechado e Im$(Id - K) = (N(Id - K^*))^\perp$;

(iii) $(Id - K)$ é injetivo se, e somente se, for sobrejetivo;

(iv) dim$\mathsf{N}(\mathtt{Id} - \mathsf{K})$ =*dim*$\mathsf{N}(\mathtt{Id} - \mathsf{K}^*)$*;*

onde denotamos por Im$(\mathtt{Id}-\mathsf{K})$ *a imagem do operador* $(\mathtt{Id}-\mathsf{K})$, $\mathsf{N}(\mathtt{Id}-\mathsf{K})$ *é o núcleo do operador* $(\mathtt{Id} - \mathsf{K})$ *e* $\mathtt{Id}$ *é o operador identidade.*

Demonstração: Ver [19] ■

Teorema 2.2.21. *(Da continuação única de Mizohatta) Seja* $u(x,t)$ *uma solução da equação (1.5), definida na vizinhança da origem, satisfazendo*

$$u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

para $x_n = 0$*. Então* $u(x,t)$ *é nula na vizinhança da origem.*

Demonstração: Ver [20] ■

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções

3.1 Propriedades do operador A

Primeiramente provaremos algumas propriedades importantes do operador elíptico A definido em (1.4) que serão de grande auxílio na prova da existência e unicidade de soluções para o problema (1.5).

Teorema 3.1.1. *O operador adjunto de* A, *denotado por* A^* *é dado por*

$$A^*v = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \Big(a_0(x) - \sum_{i=i}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}\Big)v,$$

onde $a_{ij}(x), b_i(x), a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Integrando por partes e usando o fato de $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
&(Au, v)_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\\
&= \Big(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}), v\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, v\Big) + (a_0(x)u, v)\\
&= \Big(u, -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i})\Big) + \Big(u, \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i}v\Big) + (u, a_0(x)v)\\
&= (u, A^*v)
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.1.2. *Se* $a_{ij}(x), b_i(x), a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$. *Então* A *é contínuo.*

Demonstração: Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Assim, usando o Teorema (2.2.11) temos

$$\begin{aligned}
|(Au, v)| &\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_\infty \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}||\frac{\partial v}{\partial x_j}|dx + \sum_{i,j=1}^{n} \|b_i\|_\infty \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}||v|dx + \|a_0\|_\infty \int_\Omega |u||v|dx \\
&\leqslant C_1 \int_\Omega \Big(|\nabla u||\nabla v| + |\nabla u||v| + |u||v|\Big)dx \\
&\leqslant C_1\Big(|\nabla u||\nabla v| + |nablau||v| + |u||v|\Big) \\
&\leqslant C_1\Big(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\Big) \\
&= C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|a_0\|_\infty\}$ e $C = C_1 + C_1C_2 + C_1C_3$.

Portanto A é contínuo. ■

A demonstração da coercividade é mais delicada e não vale em geral, mas contornaremos esse fato usando o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Assumiremos que o operador A seja fortemente elíptico, ou seja, existe $\alpha_1 > 0$ tal que*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx \geqslant \alpha_1|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} > 0.$$

Então existem constantes $\gamma = \gamma(\|b_i\|_\infty, \alpha_1, \|a_0\|_\infty)$ e β tais que:

$$\beta\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leqslant (Au, u) + \gamma\int_\Omega u^2 dx.$$

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
\alpha_1|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx \\
&\leqslant (Au, u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}u dx - \int_\Omega a_0(x)u^2 dx \\
&\leqslant (Au, u) + \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_\infty \int_\Omega |\nabla u||u|dx + \|a_0\|_\infty \int_\Omega u^2 dx
\end{aligned}$$

Notemos que, se $c, d \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ então:

$$cd = \sqrt{2\varepsilon}c\frac{d}{\sqrt{2\varepsilon}} \leqslant \varepsilon c^2 + \frac{1}{4\varepsilon}d^2$$

Daí, seja ε tal que $\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_\infty = \frac{\alpha_1}{2}$. Então:

$$\alpha_1|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant (Au, u) + \frac{\alpha_1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_\infty}{4\varepsilon} + \|a_0\|_\infty\right)\int_\Omega u^2 dx,$$

donde obtemos

$$\beta|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant (Au, u) + \gamma \int_\Omega u^2 dx,$$

onde $\beta = \frac{\alpha_1}{2}$ e $\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_\infty}{4\varepsilon} + \|a_0\|_\infty$. ■

Agora podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. *Se* $a_{ij}(x), b_i(x), a_0(x) \in L^\infty(\Omega)$*, então existem constantes* $\gamma(\|b_i\|_\infty, \alpha_1, \|a_0\|_\infty)$ *e* $\mu \geqslant \gamma$ *tal que o problema*

$$\left| \begin{array}{l} Au + \mu u = f \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ sobre } \Sigma. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

tem uma única solução fraca em $H^1_0(\Omega)$.

Demonstração: Considere $f \in L^2(\Omega)$ e $\mu \geqslant \gamma$. Para aplicarmos o Teorema de Lax-Milgram consideremos a forma bilinear associada ao problema (3.1) dada por:

$$A_\mu(u, v) = \int_\Omega uv dx,$$

onde $A_\mu(u, v) = A(u, v) + \mu \int_\Omega uv dx$. De maneira análoga ao que foi feito com o operador A (Vide Teorema (3.1.2)), segue que:

$$A_\mu(u, v) \leqslant C\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} + \mu C_4\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \alpha\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)},$$

onde $\alpha = \min\{C, C_4\}$. Para a coercividade usamos o Lema (3.1.1), como segue:

$$\beta\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant A(u, u) + \gamma \int_\Omega u^2 dx \leqslant (Au, u) + \mu \int_\Omega u^2 dx.$$

Donde segue que,

$$\beta\|u\|^2_{H^1_0} \leqslant A_\mu(u, u).$$

Como a forma linear $u \mapsto \int_\Omega fudx$ é linear e contínua, concluimos pelo Teorema de Lax-Milgram que o problema (3.1) tem uma única solução em $H^1_0(\Omega)$. ■

Dessa forma podemos obter uma caracterização do espectro, a partir da Alternativa de Fredholm, para o problema (3.1).

Teorema 3.1.4. *Considere o operador* A *definido em (1.4) com* $a_{ij}(x), b_i(x), a_0(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ *e* $u \in H^1_0(\Omega)$*. Então ocorre exatamente uma das alternativas abaixo:*

*(i)**Alternativa 1**: O problema* $Au = f$ *possui uma única solução para cada* $f \in L^2(\Omega)$*;*

*(ii)**Alternativa 2**: O problema homogêneo* $Au = 0$ *possui solução não trivial* $u \neq 0$*;*

(iii) Se ocorrer a segunda alternativa, a dimensão do núcleo $N = \{u \in H^1_0(\Omega) \; ; \; Au = 0\}$ *é finita e é igual a dimensão do subespaço* $N^* = \{u \in H^1_0(\Omega) \; ; \; A^*u = 0\}$.

(iv) O problema $Au = f$ *tem uma solução fraca para cada* $f \in L^2(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\left\langle f, v \right\rangle = \int_\Omega f v dx, \ \forall v \in N^*$$

Demonstração: Seja $\gamma \geqslant 0$ como no Teorema (3.1.3). Portanto o problema (3.1) tem uma única solução para cada $f \in L^2(\Omega)$. Defina o operador $S_\gamma : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ tal que $S_\gamma(f) = u$ se, e só se, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (3.1). Mostraremos que o operador S_γ está nas condições da Alternativa de Fredholm. De fato, pelo Teorema (3.1.3) temos que S_γ está bem definido e como o operador A é linear, segue que S_γ é linear. Note que, para qualquer que seja $f \in L^2(\Omega)$ temos:

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant A_\gamma(u, u) = \int_\Omega f u dx \leqslant C |f|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|S_\gamma f\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\beta} |f|_{L^2(\Omega)}.$$

Daí segue que o operador S_γ é contínuo. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ contínua e compactamente, então o operador S_γ é compacto de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Portanto

$$\begin{aligned} Au = f \ &\Leftrightarrow Au + \gamma u = f + \gamma u \\ &\Leftrightarrow u = S_\gamma(f + \gamma u) = S_\gamma(f) + \gamma S_\gamma(u) \\ &\Leftrightarrow u - \gamma S_\gamma(u) = S_\gamma(f). \end{aligned}$$

Logo o problema $Au = f$ equivale a

$$u - Ku = S_\gamma(f),$$

com $K = \gamma S_\gamma(u)$ compacto de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Daí, segue da Alternativa de Fredholm, que só pode ocorrer uma das alternativas acima. Como o operador A é linear temos que a segunda alternativa não pode ocorrer, pois se ocorresse teríamos a solução trivial $u = 0$, donde segue que somente o ítem (i) pode ocorrer.

∎

Em vista do Teorema (2.2.4) segue que o adjunto de A, A^*, também é linear, contínuo e coercivo. Isto será de grande importância no cálculo da otimalidade do líder pois garantirá a existência e unicidade de certos problemas muito úteis nesse estudo.

3.2 Existência e Unicidade de Solução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(0,T) \subset \mathbb{R}$. Escrevemos $Q = \Omega \times (0,T)$ e $\Sigma = \partial Q$. Estudaremos a existência e unicidade de solução para o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma = \partial(Q) \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde A é o operador definido em (1.4), o qual satisfaz as hipóteses dos Teoremas (3.1.1) e (3.1.2).

Teorema 3.2.1. *Sejam* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *e* $f \in L^2(Q)$. *Então o problema (3.2) tem uma única solução tal que*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),\phi) + (Au,\phi) = (f,\phi),\ \forall \phi \in D(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Demonstração: Como $H_0^1(\Omega)$ é separável então existem $w_1, \dots, w_m, \dots$ tais que:

$$\left| \begin{array}{l} w_i \in H_0^1(\Omega), \forall i \in \mathbb{N} \\ (w_i, w_j) = 0, \text{ se } i \neq j \text{ e } (w_i, w_j) = 1, \text{ se } i = j \\ \overline{[w_i, \dots, w_m]} = H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Esta última afirmação significa que as combinações lineares finitas desses elementos são densas em $H_0^1(\Omega)$. Escreveremos $V_m = [w_i, \dots, w_m]$ o subespaço gerado por $w_1, \dots, w_n$. Como $\overline{V_m} = H_0^1(\Omega)$, temos que existe $u_{0m} \in V_m$ tal que $u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Consideremos o seguinte problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, \\ (u'_m, r) + (Au_m, r) = (f, r),\ \forall r \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Se $u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{j0m}(t)w_j$ e $u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)w_j$ então fazendo $r = w_j$ em (3.5), obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} g'_{jm} = -(Au_m, w_j) + (f, w_j), \\ g_{jm}(0) = a_{j0m}. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Fixado m e denotanto

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \ldots, z_m) = (g_{1m}, \ldots, g_{mm}) \quad \text{e} \\ z_0 &= (a_{10m}, \ldots, a_{m0m}) \end{aligned}$$

então (3.6) pode reescrito como sucede

$$\left| \begin{array}{l} z' = F(t, z) \\ z(0) = z_0, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

onde $F(t, z) = (F_1(t, z), \ldots, F_m(t, z))$ com

$$F_i(t, z) = -(Az_i, w_j) + (f, w_j).$$

Seja $D = [0, T] \times B$, onde $B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \leqslant b\}$ com $b > 0$ e $z_0 \in B$. Logo, fixado z o termo (Az_j, w_j) não depende de t e como $f \in L^2(Q)$ implica que $F(t, z)$ é mensurável para cada $t \in [0, T]$ com z fixo e $j = 1, \ldots, m$. Agora, fixado t o termo (f, w_j) não depende de z e a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda_0 : \;\; & \mathbb{R}^m \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ & z = (z_1, \ldots, z_m) \mapsto \Lambda_0(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j w_j \end{aligned}$$

é contínua, visto que

$$|\Lambda_0(z)|_{H_0^1(\Omega)} = |\sum_{j=1}^{m} z_j w_j|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant (\sum_{j=1}^{m} |w_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{m} |z_j|^2)^{1/2} = C|z|_{\mathbb{R}^n}$$

Temos também que a aplicação,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : \;\; & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \in [w_1, \ldots, w_m] \mapsto \Lambda_1(z) = (Az, w_j) \end{aligned}$$

é contínua, pois o operador A é contínuo! Logo a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_0 : \;\; & \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \mapsto (Az, w_j) \end{aligned}$$

é contínua para todo $j = 1, \ldots, m$ e t fixado. Assim, como z varia em B existe uma constante $k_B > 0$ tal que $|(Az_m, w_j)| < k_B$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} |F_j(t, z)| &\leqslant |(Az_j, w_j)| + |(f, w_j)| \\ &\leqslant k_B + |(f, w_j)| = m_j(t), \end{aligned}$$

onde $m_j(t)$ é integrável, donde segue que $F_j(t,z)$ é integrável em $[0,T]$. Assim $F(t,z)$ está nas condições de Carathéodory e pelo Teorema (2.2.3) o problema (3.7) tem solução em algum intervalo $[0,t_m],\ 0 < t_m < T$. Tomando $r = u_m \in V_m$ em (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 &\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \alpha\|u_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leqslant (u'_m, u_m) + (Au_m, u_m) \\ &\leqslant |f|^2_{L^2(\Omega)}|u_m|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u_m|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde α é a constante de coercividade do operador A. Integrando em $(0,t),\ 0 < t < t_m$, obtemos:

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} - |u_m(0)|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant |f(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leqslant c_1 + \int_0^t |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $u_m(0) = u_{0m}$ converge para u_0 em $H^1_0(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então a sequência $(u_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Daí

$$|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c + \int_0^t |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds. \tag{3.10}$$

Pela Desigualdade de Gronwall, resulta:

$$|u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant N, \tag{3.11}$$

onde $N = c\exp(T)$. Seja B como no Corolário (2.2.2). Fazendo esse conjunto maior, caso necessário, para que $N < b^2$. Logo, pelo Corolário (2.2.2), $u(t)$ tem um prolongamento até $[0,T]$. Assim, para cada m existe u_m solução do problema aproximado. Integrando (3.8) de 0 a T, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\int_0^T \|u_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leqslant c_1 + \int_0^T |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leqslant c_1 + NT, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ou seja,

$$\int_0^T \|u_m\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{c_1 + NT}{\alpha}, \tag{3.13}$$

donde segue que (u_m) é limitada em $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Como $H^1_0(\Omega)$ é fracamente relativamente compacto, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_m), tal que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{3.14}$$

Identificando $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com o seu dual $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então de (3.14) temos:

$$\int_0^T (u_m(t), w(t))dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w(t))dt,\ \forall w \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{3.15}$$

Tomemos $w(t) = \theta(t)\cdot v, \theta \in D(0,T)$ e $v \in H^{-1}(\Omega)$, então (3.15) equivale a

$$\int_0^T (u_m(t), v(t))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v(t))\theta(t)dt, \tag{3.16}$$

donde $(u_m(t), v(t)) \longrightarrow (u(t), v(t))$ no sentido das distribuições em $[0,T$. E como $\frac{d}{dt}$ é contínua em $D'(0,T)$, temos

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), v(t)) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u(t), v(t)),\ \text{em } D'(0,T). \tag{3.17}$$

Temos também que o operador $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é contínuo, e portanto, temos que $(Au_m, w) \longrightarrow (Au, w)$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Daí,

$$\int_0^T (Au_m(t), w(t))dt \longrightarrow \int_0^T (Au(t), w(t))dt. \tag{3.18}$$

Tomando $w = \theta(t)\cdot v,\ \theta \in D(0,T), v \in H^{-1}(\Omega)$, obtemos:

$$\int_0^T (Au_m(t), v(t))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (Au(t), v(t))\theta(t)dt. \tag{3.19}$$

Concluimos que $A(u_m, v) \longrightarrow (Au, v)$ no sentido das distribuições. Para provarmos que $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ usaremos o Teorema (2.2.5).

Com efeito, fazendo $r = u_m'$ em (3.5) temos

$$\begin{aligned} |u_m'|^2_{L^2(\Omega)} + (Au_m, u_m') &= (f, u_m') \\ &\leqslant |f|^2_{L^2(\Omega)}|u_m'|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|u_m'|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Como A é positivo, ele admite uma única raíz quadrada, veja por exemplo [17]. Dessa forma

$$A(u_m, u_m') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/2}u_m|^2 \tag{3.21}$$

Substituindo (3.21) em (3.20) e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T |u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}|A^{1/2}u_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|A^{1/2}u_m(0)|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |f(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T |u_m'(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt, \end{aligned} \tag{3.22}$$

se, e somente se,

$$2\int_0^T |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt \leqslant c_2\|u_m(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^T |f(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt, \quad (3.23)$$

onde c_2 é a constante de continuidade de A. Como $u_m(0) \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$, então essa sequência é limitada. Como $f(t) \in L^2(\Omega)$, então

$$\int_0^T |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt \leqslant c_3. \quad (3.24)$$

Como $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ é Banach, então (u'_m) tem uma subsequência, ainda denotada pela mesma notação, tal que $u'_m \longrightarrow \xi$, onde $\xi \in L^2(\Omega)$. Mas

$$\frac{d}{dt}(u_m, v) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u, v), \text{ em } D'(0,T). \quad (3.25)$$

Segue que $\xi = u'$, donde $u'(t) \in L^2(\Omega)$. Multiplicando a equação aproximada (3.5) por $\theta(t) \in D(0,T)$, integrando de 0 a T com $n > m$, fixo obtemos:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u_m(t), r), \theta(t) \right\rangle + \int_0^T (Au_m(t), r)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), r)\theta(t)dt. \quad (3.26)$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ e, usando as convergências (3.17) e (3.19), obtemos:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u(t), r), \theta(t) \right\rangle + \int_0^T (Au(t), r)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), r)\theta(t)dt, \quad (3.27)$$

para todo $r \in V_m$ e $\theta \in D(0,T)$. Por densidade, (3.27) vale para todo $r \in H^1_0(\Omega)$ no sentido das distribuições. Escrevendo $L(t) = f(t) - Au(t)$ obtemos:

$$\left\langle -\int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt, r \right\rangle = \left\langle \int_0^T L(t)\theta(t)dt, r \right\rangle, \forall\, r \in H^1_0(\Omega) \quad (3.28)$$

E assim,

$$-\int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt = \int_0^T L(t)\theta(t)dt \quad (3.29)$$

no sentido das distribuições. Devido a cadeia de imersões $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, segue que $L \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pelo Teorema (2.2.6) temos

$$u(t) = \xi + \int_0^T L(s)ds, \quad (3.30)$$

donde

$$\left\langle u'(t), \theta(t) \right\rangle = \left\langle L(t), \theta(t) \right\rangle, \ \forall\, \theta \in D(0,T). \quad (3.31)$$

Em outras palavras, $u'(t) = L(t)$ no sentido vetorial das distribuições, e como $L \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ segue que,

$$u' = L \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (3.32)$$

e, assim

$$u' + Au = f \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.33}$$

Escrevemos $Au(t) = G$, onde $G = f(t) - u'(t) \in L^2(\Omega)$ e pelo Teorema (2.2.5) com $k = 0$, segue que

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{3.34}$$

Dessa forma tem-se pelo Teorema (2.2.12) que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

Vamos agora verificar a condição inicial $u(0) = u_0(x)$. Como (u_m) é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e (u'_m) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, devido a cadeia de imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ existem subsequências de (u_m) e (u'_m), ainda denotadas da mesma forma, tais que

$$\int_0^T (u_m(t),v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt \tag{3.35}$$

e

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt, \tag{3.36}$$

onde $\theta \in C^1[0,T], \theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0, \forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Daí,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u_m(t),v)\theta(t)]dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[(u(t),v)\theta(t)]dt, \tag{3.37}$$

o que acarreta

$$-(u_m(0),v) \longrightarrow -(u(0),v). \tag{3.38}$$

Mas, por hipótese, $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$, donde segue, por unicidade do limite, que

$$u(0) = u_0.$$

<u>**Unicidade**</u>: Suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções do problema (3.3). Dessa forma $w = u_1 - u_2$ é solução de

$$\left\|\begin{array}{l} \dfrac{dw}{dt} + Aw = 0 \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ w(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.39}$$

Notemos que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 = (\frac{dw(t)}{dt}, w(t))$ e $(Aw,w) \geqslant \alpha|w|^2 \geqslant 0$. Da equação (3.39), obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + (Aw,w) = 0, \tag{3.40}$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leqslant 0. \tag{3.41}$$

Integrando de 0 a s e usando a condição $w(0) = 0$, obtemos:

$$0 \leqslant |w(s)|^2 \leqslant 0, \ \forall s \in [0, T] \tag{3.42}$$

Portando $w = 0$ quase sempre, e assim, $u_1 = u_2$ quase sempre. ■

Capítulo 4

Controlabilidade Aproximada

Nesse capítulo mostraremos a controlabilidade aproximada para o sistema (1.5) em um tempo $T > 0$, a existência e a unicidade do equilíbrio de Nash, a otimalidade para os seguidores e para o líder.

4.1 Controlabilidade Aproximada

Definimos o funcional custo como sendo:

$$J_i(v; w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{2}\|w_i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))} + \frac{\alpha_i}{2}\|\rho_i(u(\cdot, T) - u^T)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.1}$$

O líder faz uma escolha v e os seus seguidores tentam encontrar um equilíbrio de Nash para seu custo, ou seja, eles procuram por controles $w_1, \ldots, w_n$ tais que

$$J_i(v; w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1} \ldots, w_n) \leqslant J_i(v; w_1, \ldots, w_{i-1}, \widetilde{w}_i, w_{i+1} \ldots, w_n), \tag{4.2}$$

para todo $\widetilde{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$. O líder deseja que o estado global $u(\cdot, T)$ em todo domínio Ω esteja tão perto quanto possível de u^T. Isto ocorrerá se para cada estado ideal u^T o sistema for aproximadamente controlável, ou seja, se

"$u(x, t; v; w_1, \ldots, w_n)$ descreve um subespaço denso do espaço determinado por v"

A equação que rege o estado do sistema é dado por (1.5). Assumiremos que

$$\begin{cases} \rho_i \in L^\infty(\Omega), \rho_i \geqslant 0 \\ \rho_i = 1 \text{ em } G_i \subset \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde G_i é uma região próxima de w_i.

Assumiremos também que $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, $w_i \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ e $u(x, t)$ é a solução única do problema (1.5). Com isso temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. *Quando a inequação (4.2) tem solução única e* ν *percorre o conjunto* $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$*, as funções* $u(x,t)$ *descrevem um subespaço denso de* $L^2(\Omega)$*. Em outras palavras, se a estratégia de Stackeberg - Nash é seguida o sistema (1.5) é aproximadamente controlável.*

Demonstração: Assumindo que $\widetilde{w}_i$ é solução única da inequação (4.2), então

$$(*)\frac{d}{dt}J_i(\nu,\widetilde{w}_i)\Big|_{t=0}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{J(w_i+h\widetilde{w}_i)-J(w_i)}{h}=0,$$

ou seja,

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}_i}w_i\widetilde{w}_i\,dxdt+\alpha_i\int_{\Omega}\rho_i^2(u(\cdot,T)-u^T)\widetilde{u}(T)dx=0,\tag{4.4}$$

onde $\widetilde{u}(t)$ é solução de

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial t}+A\widetilde{u}=\widetilde{w}_i\chi_i,\ \text{em } Q\ (i=1,2,\dots,n)\\ \widetilde{u}(0)=0 \text{ em } \Omega\\ \widetilde{u}=0 \text{ sobre } \Sigma.\end{array}\right.\tag{4.5}$$

De fato, analisando cada termo separadamente de (*) temos

$$\begin{aligned}&\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}[(w_i+h\widetilde{w}_i)^2-w_i^2]dxdt\right\}\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{h}{2}\int_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}(2w_i\widetilde{w_i}+h\widetilde{w_i}^2)dxdt\right\}\\ &=\int_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}w_i\widetilde{w_i}\,dxdt,\end{aligned}\tag{4.6}$$

e,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega}\rho_i^2[u(T)+h\widetilde{u}(T)-u^T]^2dx-\frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega}\rho_i^2[u(T)-u^T]^2\right\}dx\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\frac{\alpha_i}{2}\left\{\int_{\Omega}\rho_i^2\Big[(u(T)-u^T)^2+2h(u(T)-u^T)\widetilde{u}(T)+h^2\widetilde{u}(T)-(u(T)-u^T)^2\Big]\right\}\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\frac{\alpha_i}{2}\int_{\Omega}\rho_i^2h\Big[2(u(T)-u^T)\widetilde{u}(T)+h\widetilde{u}(T)\Big]dx\\ &=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\alpha_i}{2}\left\{\int_{\Omega}\rho_i^2\Big[2(u(T)-u^T)\widetilde{u}(T)+h\widetilde{u}(T)\Big]dx\right\}\\ &=\alpha_i\int_{\Omega}\rho_i^2\Big[u(T)-u^T\Big]\widetilde{u}(T)dx\end{aligned}\tag{4.7}$$

Inicialmente daremos uma caracterização para o seguidor $w_i, i=1,\dots,n$. Para isso, introduzimos o estado adjunto ρ_i dado por

$$\left|\begin{array}{l}-\dfrac{\partial\rho_i}{\partial t}+A^*\rho_i=0,\ \text{em } Q\\ \rho_i(x,T)=\rho_i^2(u(T)-u^T),\ \text{em } \Omega\\ \rho_i=0,\ \text{sobre } \Sigma.\end{array}\right.\tag{4.8}$$

onde A^* denota o adjunto de A. Multiplicando $(4.8)_1$ por $\widetilde{u}(t)$, integrando de 0 a T e usando a equação $(4.5)_1$, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \cdot \widetilde{u}(t)dt + \int_0^T A^*\rho_i \cdot \widetilde{u}(t) &= -\rho_i \cdot \widetilde{u}(t)\Big|_0^T + \int_0^T (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + A\widetilde{u})\rho_i dt \\ &= -\rho_i^2(u(T) - u^T)\widetilde{u}(T) + \int_0^T \rho_i \widetilde{w}_i \chi_i dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega \rho_i^2(u(T) - u^T)\widetilde{u}(T)dx = \int_0^T \int_{O_i} \rho_i \widetilde{w}_i dxdt \tag{4.10}$$

Substituindo (4.10) em (4.4) temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{O_i} w_i \widetilde{w}_i dxdt + \alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(u(\cdot,T) - u^T)\widetilde{u}(T)dx \\ &= \int_0^T \int_{O_i} w_i \widetilde{w}_i dxdt + \alpha_i \int_0^T \int_{O_i} \rho_i \widetilde{w}_i dxdt \\ &= \int_0^T \int_{O_i} (w_i + \alpha_i \rho_i)\widetilde{w}_i dxdt = 0, \ \forall \widetilde{w}_i \in L^2(O_i \times (0,T)). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Daí,

$$w_i = -\rho_i \alpha_i \quad \text{q.s. em } \mathcal{O}_i \times (0,T) \tag{4.12}$$

Concluímos então, que se $w = \{w_1, \dots, w_n\}$ é um equilíbrio de Nash, temos que

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + Au + \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i \chi_i = v\chi \text{ em } Q \\ &-\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + A^*\rho_i = 0, \text{ em } Q \\ &u(0) = 0, \rho_i(x,T) = \rho_i^2(u(T) - u^T), \text{ em } \Omega \\ &u = 0, \rho_i = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{aligned} \right. \tag{4.13}$$

Provaremos que o conjunto $u(\cdot, T; v; w_1, \dots, w_n) = u(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$, onde u é solução de (4.13) e v percorre o conjunto $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$. Como o sistema é linear, por translação, assumiremos que $u^T \equiv 0$. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e suponhamos que

$$(u(T), f)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T)). \tag{4.14}$$

Observe que para cada líder v temos uma solução única $u(t)$, portanto a equação acima é válida para todo $u(T)$.

Considere $\{\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ solução do sistema adjunto

$$\left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + A^*\varphi = 0, \text{ em } Q \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + A\psi_i = -\alpha_i \varphi \chi \text{ em } Q \\ \varphi(T) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 \psi_i, \text{ em } \Omega \\ \psi(0) = 0, \text{ em } \Omega \\ \varphi = \psi_i = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Multiplicando $(4.15)_1$ por u e $(4.15)_2$ por ρ_i, respectivamente e integrando de 0 a T e depois em Ω, temos:

$$\begin{aligned} -\int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot u dt + \int_0^T (A^* \cdot \varphi) u dt &= -\varphi \cdot u\Big|_0^T + \int_0^T \varphi \cdot (\frac{\partial u}{\partial t} + Au) dt \\ &= -\Big(f + \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 \psi_i, u(T)\Big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \varphi \cdot (\frac{\partial u}{\partial t} + Au) dx dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Também,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \cdot \rho_i dt + \int_0^T A\psi_i \cdot \rho_i \cdot \varphi dt = -\int_0^T \alpha_i \varphi \chi \rho_i dt \\ &\Leftrightarrow \psi(T) \cdot \rho_i(T) + \int_0^T \psi_i \cdot (-\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + A^* \rho_i) = -\alpha_i \int_0^T \rho_i \varphi \chi dt \\ &\Leftrightarrow (\psi_i(T), \rho_i(T))_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \psi_i \cdot (-\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + A^* \rho_i) dx dt = -\alpha_i \int_0^T \int_\Omega \rho_i \varphi \chi dt \end{aligned} \tag{4.17}$$

Somando de 1 a n, usando (4.8), $(4.13)_2$, $(4.15)_3$ e o fato de que $u^T \equiv 0$ obtemos:

$$-(f + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(T)\rho_i^2, u(T))_{L^2(\Omega)} = -(f, u(T))_{L^2(\Omega)} - (\sum_{i=1}^{n} \psi_i(T)\rho_i^2, u(T))_{L^2(\Omega)}, \tag{4.18}$$

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(\frac{\partial u}{\partial t} + Au) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \varphi \nu \chi dx dt - \int_0^T \int_\Omega \varphi \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i \chi_i dx dt \tag{4.19}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i(T), \rho_i(T))_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i, \rho_i^2 u(T))_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i \rho_i^2, u(T))_{L^2(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Substituindo (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.16) e (4.17) e somando essas equações, temos que:

$$-(f, u(T))_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \varphi \nu \chi dx dt = 0. \tag{4.21}$$

Usando a hipótese (4.14) temos,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi \nu dx dt = 0, \ \forall \nu \in L^2(\Omega). \tag{4.22}$$

E pelo Teorema de Du Bois Raymond, segue que:

$$\varphi = 0 \text{ q.s em } \mathcal{O} \times (0, T) \text{ q.s} \tag{4.23}$$

Pelo Teorema de Continuação Única de Mizohata, obtemos que:

$$\varphi = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T). \tag{4.24}$$

Com esse resultado temos que ψ_i é solução de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \psi_i}{\partial t} + A\psi_i = 0 \\ \psi(0) = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi_i = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Multiplicando $(4.25)_1$ por ψ_i obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi_i|^2 + (A\psi_i, \psi_i) = 0. \tag{4.26}$$

Sendo $(A\psi_i, \psi_i) \geqslant 0$, visto ser o operador A coercivo, segue que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi_i|^2 \leqslant 0. \tag{4.27}$$

Integrando de 0 a t e usando a condição inicial $\psi(0) = 0$, obtemos:

$$|\psi_i(t)|^2 \leqslant 0, \tag{4.28}$$

donde segue que $\psi = 0$ em Q. Da igualdade (4.14) e $(4.15)_3$ chegamos a conclusão que $f = 0$. Pelo Teorema (2.2.8) segue que o espaço das funções admissíveis é denso em $L^2(\Omega)$, donde segue o resultado. ■

4.2 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Consideremos

$$\left\| \begin{array}{l} H_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)) \\ H = H_1 \times \ldots \times H_n, \end{array} \right. \tag{4.29}$$

e seja

$$\begin{aligned} L_i : \ & H_i \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ & L_i\widetilde{w_i} = \widetilde{u_i}(T), \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde $\widetilde{u_i}(T)$ é solução de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial t} + A\widetilde{u_i} = \widetilde{w}_i\chi_i, \text{ em } Q \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \widetilde{u}_i(0) = 0 \text{ em } \Omega \\ \widetilde{u}_i = 0 \text{ sobre } \Sigma \end{array} \right. \tag{4.31}$$

Pelo Teorema (3.2.1) temos que $\widetilde{u_i} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\widetilde{u_i}' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e usando o Teorema (2.2.2) temos que $\widetilde{u_i} \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $\widetilde{u_i} \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega))$ o que garante que L_i está bem definido. Se multiplicarmos $(4.31)_1$ por $\widetilde{u_i}$ e integrarmos de 0 a T e sobre Ω, obtemos:

$$\int_0^T (\widetilde{u_i'}, \widetilde{u_i})dt + \int_0^T (A\widetilde{u_i}, \widetilde{u_i})dt = \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \widetilde{w_i}\widetilde{u_i}dtdx. \tag{4.32}$$

Usando Cauchy-Schwarz e o fato do operador A ser coercivo temos:

$$\alpha\|\widetilde{u_i}\|_{H_0^1}^2 \leqslant |\widetilde{w_i}|_{L^2(\Omega)}|\widetilde{u_i}|_{L^2(\Omega)} \leqslant \beta\|\widetilde{w_i}\|_{H_i}\|\widetilde{u_i}\|_{H_0^1}, \tag{4.33}$$

onde β é uma constante de imersão de H_0^1 em $L^2(\Omega)$. Daí,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\widetilde{u_i}(t)\|_{H_0^1} \leqslant \widetilde{C}\|\widetilde{w_i}\|_{H_i}. \tag{4.34}$$

Donde segue que:

$$\|\widetilde{u_i}\|_{C^0(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant \widetilde{C}\|\widetilde{w_i}\|_{H_i}, \tag{4.35}$$

ou seja,

$$\|L_i\widetilde{w_i}\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}\|\widetilde{w_i}\|_{H_i} \tag{4.36}$$

Pelo Teorema (2.2.11) tem-se

$$\begin{aligned} |L_i\widetilde{w_i}|_{L^2(\Omega)} & \leqslant C_1\|L_i\widetilde{w_i}\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leqslant C\|\widetilde{w_i}\|_{H_i} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Portanto $L_i \in \mathcal{L}(H_i; L^2(\Omega))$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Seja z solução de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} + Az = v\chi \text{ em } Q \\ z(0) = 0 \text{ em } \Omega \\ z = 0 \text{ sobre } \Sigma. \end{array} \right. \tag{4.38}$$

Seja u solução da equação $(1.5)_1$. Então $\eta = u - z$ é solução da equação

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + A\eta = \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_i. \tag{4.39}$$

Pela definição do operador L_i, temos:

$$u(\eta, T; v; w) = \sum_{i=1}^{n} L_i \widetilde{w_i} + z(T), \tag{4.40}$$

ou ainda,

$$u(T) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{u_i} + z(T). \tag{4.41}$$

Portanto o funcional (4.1) pode ser reescrito como sendo

$$J_i(v; w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{2}\|w_i\|_{H_i} + \frac{\alpha_i}{2}\|\rho_i(\sum_{i=1}^{n} L_i \widetilde{w_i} - \eta^T)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.42}$$

onde $\eta^T = u^T - z^T$. Como w_i é um equilíbrio de Nash então vale a equação de Euler - Lagrange (4.4) que, de acordo com (4.42), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(w_i, \widetilde{w_i})_{H_i} + \alpha_i(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i, L_i \widetilde{w_i})_{L^2(\Omega)} = \alpha_i(\rho_i^2 \eta^T, L_i \widetilde{w_i})_{L^2(\Omega)}. \tag{4.43}$$

Como $L_i \in \mathcal{L}(H_i, L^2(\Omega))$, então $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, H_i))$ e assim,

$$(w_i, \widetilde{w_i})_{H_i} + \alpha_i(L_i^*(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i), \widetilde{w_i})_{L^2(\Omega)} = \alpha_i(L_i^*(\rho_i^2 \eta^T), \widetilde{w_i})_{L^2(\Omega)}. \tag{4.44}$$

Portanto,

$$w_i + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i) = \alpha_i(L_i^* \rho_i^2 \eta^T) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{4.45}$$

Quando i varia de 1 a n podemos imaginar que

$$f = (\alpha_1(L_1^* \rho_1^2 \eta^T), \dots, \alpha_n(L_n^* \rho_n^2 \eta^T)) \tag{4.46}$$

é um vetor de H. Então para todo $f \in H$ defina o operador

$$\left| \begin{array}{l} (Lw, \widetilde{w}) = (f, \widetilde{w}) \\ Lw_i = w_i + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i w_i) \\ L \in \mathcal{L}(H, H). \end{array} \right. \tag{4.47}$$

Mostraremos que (4.47) tem solução única para cada $f \in H$ o que acarretará na existência e unicidade para o equilíbrio de Nash. Assim, devemos mostrar que L satisfaz as condições do Teorema de Lax - Milgram. De fato, L é **linear**. Pois

$$\begin{aligned} L(y_i + w_i) &= y_i + w_i + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i(y_i + w_i)) \\ &= y_i + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i y_i) + w_i + \alpha_i L_i^*(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i) \\ &= L y_i + L w_i. \end{aligned}$$

L é **contínua**, pois o operador $\alpha L_i^*(\rho_i^2 \eta^T)$ é contínuo. Para provar a coercividade usaremos indução finita. Se $n = 1$ temos

$$(Lw, w) = |w_1|_{H_1}^2 + \alpha_i \|\rho_1 L_1 w_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \geqslant |w_1|_{H_1}^2 = |w|_H^2. \tag{4.48}$$

Suponhamos $n > 1$. Então

$$(Lw, w) = \sum_{i=1}^{n} |w_i|_{H_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\rho_i \sum_{i=1}^{n} L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)}. \tag{4.49}$$

Notemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |w_i|_{H_i}^2 = \|w\|_H^2$ e

$$\begin{aligned} \rho_i \sum_{i=1}^{n} L_j w_j &= \rho_i \sum_{i=1}^{n} L_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j - \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (\rho_i - \rho_j) L_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Suponhamos agora que $\alpha_i = \alpha$. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha (\sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \alpha (\sum_{j=1}^{n} (\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \\ &= \alpha \Big| \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i w_i \Big|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} ((\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \\ &\geqslant \Big| \alpha \sum_{i,j=1}^{n} ((\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \Big|. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Usando o fato de L_i ser contínuo e aplicando a desigualdade elementar $2ab \leqslant a^2 + b^2$

com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ temos,

$$
\begin{aligned}
|\alpha \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}(\rho_i-\rho_j)L_jw_j,\rho_iL_iw_i)_{L^2(\Omega)}| &\leqslant \alpha\sum_{i,j=1}^{n}\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\|L_iw_i\|_{L^2(\Omega)}\|L_jw_j\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \alpha \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}C_1\sum_{i,j=1}^{n}|w_i|_{H_i}|w_j|_{H_j}\\
&\leqslant \alpha C_1 \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}\|w\|_H^2.
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(Lw,w) &= \|w\|_H^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\rho_i\sum_{i=1}^{n}L_jw_j,\rho_iL_iw_i)_{L^2(\Omega)}\\
&= \|w\|_H^2+\alpha\Big|\sum_{i=1}^{n}\rho_iL_iw_i\Big|^2_{L^2(\Omega)}+\alpha\sum_{i,j=1}^{n}((\rho_i-\rho_j)L_jw_j,\rho_iL_iw_i)_{L^2(\Omega)}\\
&\geqslant \|w\|_H^2-\alpha\Big|\sum_{i,j=1}^{n}((\rho_i-\rho_j)L_jw_j,\rho_iL_iw_i)_{L^2(\Omega)}\Big|\\
&\geqslant \|w\|_H^2-\alpha C_1\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}\|w\|_H^2\\
&= \Big(1-\alpha C_1\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}\Big)\|w\|_H^2.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Onde $C_1 = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{c_i,c_j\}$, c_i, c_j constantes de continuidade de L_i, L_j respectivamente. Suponha que $\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}$ seja suficientemente pequeno de tal forma que

$$K_0 = 1-\alpha C_1\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}>0.$$

Daí obtemos,

$$(Lw,w)\geqslant K_0\|w\|_H^2. \tag{4.54}$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram segue a existência e unicidade para o problema

$$Lw = f, \tag{4.55}$$

onde w é o equilíbrio de Nash e f é dado em (4.46). Logo temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Suponhamos que*

$$
\left|\begin{aligned}
&\alpha=\alpha_i>0\\
&\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{\|\rho_i-\rho_j\|_\infty\|\rho_i\|_\infty\}<\varepsilon.
\end{aligned}\right.
\tag{4.56}
$$

Então existe um único equilíbrio de Nash w_i *para o funcional* J_i.

4.3 Otimalidade para os Seguidores

De acordo com o Teorema (4.1.1) a inequação (4.1) tem solução única, ou seja, o problema (4.13) é aproximadamente controlável. Para isso mostramos que (4.1) implica em (4.4). Agora mostraremos que vale a recíproca, para assim concluir a boa definição dos seguidores. Para isso usaremos o Teorema (2.2.15).

Teorema 4.3.1. *O funcional (4.1) é estritamente convexo.*

Demonstração: Com efeito, sejam $\lambda \in (0,1)$, $w_i \neq \widetilde{w_i}$ e $u \neq \widetilde{u}$. Escrevemos

$$J_i(w) = \widehat{J}_i(w) + \widetilde{J}_i(u),$$

onde

$$\widehat{J}_i(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} w_i^2 dxdt$$

e

$$\widetilde{J}_i(u) = \frac{\alpha_i}{2}\|\rho_i(u(T) - u^T)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\widehat{J}_i(\lambda w_i + (1-\lambda)\widetilde{w_i}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} [\lambda w_i + (1-\lambda)\widetilde{w_i}]^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \lambda^2 w_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)w_i\widetilde{w_i} + (1-\lambda)^2\widetilde{w_i}^2 dxdt \\
&< \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \lambda^2 w_i^2 + \lambda(1-\lambda)w_i^2 + \lambda(1-\lambda)\widetilde{w_i}^2 + (1-\lambda)^2\widetilde{w_i}^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \lambda w_i^2 + (1-\lambda)\widetilde{w_i}^2 dxdt \\
&= \lambda\widehat{J}_i(w_i) + (1-\lambda)\widehat{J}_i(\widetilde{w_i}), \forall\, i = 1,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

isto é,

$$\widehat{J}_i(\lambda w_i + (1-\lambda)\widetilde{w_i}) = \lambda\widehat{J}_i(w_i) + (1-\lambda)\widehat{J}_i(\widetilde{w_i}), \forall\, 1 = 1,\ldots,n. \tag{4.58}$$

Agora, escrevendo $u^T = \lambda u^T + (1-\lambda)u^T$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}_i(\lambda u + (1-\lambda)\widetilde{u}) &= \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big[\lambda(u-u^T) + (1-\lambda)(\widetilde{u}-u^T)\Big]^2 dx \\
&= \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big[\lambda^2(u-u^T)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(u-u^T)(\widetilde{u}-u^T) \\
&\quad +(1-\lambda)^2(\widetilde{u}-u^T)^2\Big] dx \\
&< \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big\{\lambda^2(u-u^T)^2 + \lambda(1-\lambda)[(u-u^T)^2 + (\widetilde{u}-u^T)^2] \\
&\quad +(1-\lambda)^2(\widetilde{u}-u^T)^2\Big\} dx \\
&= \lambda\widetilde{J}_i(u) + (1-\lambda)\widetilde{J}_i(u)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Daí segue que J_i é estritamente convexo, donde segue que (4.4) equivale a (4.1). ∎

4.4 Otimalidade Para o Líder

Consideremos o seguinte funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt, \tag{4.60}$$

que denota o custo que o líder faz com a sua escolha v. Queremos que este custo seja mínimo de tal forma que a solução no instante final esteja bem próximo do estado ideal. Nesse sentido, temos o seguinte problema de minimização

$$\begin{cases} \inf J(v) \\ \text{sujeito a } u(T) \in u^T + \varepsilon B, \end{cases} \tag{4.61}$$

onde $B = \{f \in L^2\Omega; \|f\|_{L^2\Omega} \leqslant 1\}$, $\varepsilon > 0$ e u é solução do problema (4.13). Introduzimos os seguintes funcionais

$$F_1(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt \tag{4.62}$$

e

$$F_2(u) \begin{cases} 0, \text{ se } u \in u^T + \varepsilon B \\ +\infty, \text{ se } u \notin u^T + \varepsilon B \end{cases} \tag{4.63}$$

Assim, (4.61) torna-se equivalente a encontrar

$$\inf_{v\in L^2(\Omega)} \{F_1(v) + F_2(M(v))\}, \tag{4.64}$$

onde $M : L^2(\mathcal{O} \times (0,T)) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é tal que $M(v) = u(T; v)$. Pela regularidade da u, segue que M é um operador linear e contínuo. Aplicando o Teorema (2.2.18) com $F_1 = f, F_2 = g$ e $A = M$, obtemos:

$$\inf_{v\in L^2(\Omega)} \{F_1(v) + F_2(M(v))\} = -\inf_{f\in L^2(\Omega)} \{F_1^*(M^*f) + F_2^*(-f)\}, \tag{4.65}$$

onde $M^* : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ é o operador adjunto de M e

$$F_i^*(w) = \sup_{\widehat{w}\in L^2(\Omega)} \{(w, \widehat{w}) - F_i(\widehat{w})\}$$

é a conjugada de F_i. Usando a equação (4.21) temos que

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi v \chi dxdt = \int_\Omega f u(T) dx, \tag{4.66}$$

onde φ é solução de (4.21). Daí

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi v\chi dxdt = (M(v), f), \tag{4.67}$$

ou ainda,

$$(v, M^*f) = (v, \varphi), \tag{4.68}$$

donde segue que $M^*f = \varphi$. Observe que

$$\begin{aligned} F_1^*(f) &= \sup_{\widehat{v}\in L^2(\Omega)} \{(f, v) - F_1(v)\} \\ &= \sup_{v\in L^2(\Omega)} \{\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt\} \\ &= \sup_{v\in L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt, \end{aligned} \tag{4.69}$$

ou seja,

$$F_1^*(v) = F_1(v). \tag{4.70}$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned} F_2^*(f) &= \sup_{\widehat{\varphi}\in L^2(\Omega)} \{(f, \widehat{\varphi} - F_2(\varphi))\} \\ &= \sup_{\widehat{\varphi}\in u^T+\varepsilon B} \{(f, \widehat{\varphi})\}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Escrevendo $\widehat{\varphi} = u^T + \varepsilon g$ temos

$$\begin{aligned} F_2^*(f) &= \sup_{g\in B}\{f, u^T + \varepsilon g\} \\ &= (f, u^T) + \varepsilon \sup_{g\in B}\{(f, g)\} \\ &= (f, u^T) + \varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

De (4.70) e (4.72) segue que

$$\inf_{v\in L^2(\Omega)}\{F_1(v) + F_2(M(v))\} = -\inf_{f\in L^2(\Omega)}\{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi^2 dxdt + \varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)} - (f, u^T)\}. \tag{4.73}$$

Seja $F : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$F(f) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi^2 dxdt + \varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)} - (f, u^T). \tag{4.74}$$

Temos que (4.61) equivale a

$$\inf_{v\in L^2(\Omega)}\{F_1(v) + F_2(M(v))\} = -\inf_{f\in L^2(\Omega)}\{F(f)\} \tag{4.75}$$

Para mostrar a existência e unicidade de (4.61) usaremos o Teorema (2.2.17).

<u>Afirmação 1</u>: $F(f)$ é semicontínua inferiormente.

Com efeito, seja $\{f_n\} \subset L^2(\Omega)$ uma sequência tal que

$$f_n \longrightarrow f, \tag{4.76}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ é tal que $\{\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ é solução de (4.15). Devemos mostrar que $F(f_n) \longrightarrow F(f)$ em $L^2(Q)$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} -\varphi_n + A^*\varphi_n = 0, \text{ em } Q \\ \varphi_n = 0, \text{ sobre } \Sigma \\ \varphi_n(\cdot, T) = f_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \psi(T)\rho_i \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.77}$$

Dessa forma $\sigma_n = f_n - f$ é solução de

$$\begin{cases} -\sigma_n + A^*\sigma_n = 0, \text{ em } Q \\ \sigma_n = 0, \text{ sobre } \Sigma \\ \sigma_n(\cdot, T) = f_n - f, \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{4.78}$$

Multiplicando $(4.78)_1$ por σ_n e integrando em Q obtemos

$$|\sigma_n|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c|f_n - f|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.79}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos $\sigma_n \longrightarrow 0$ em $L^2(Q)$. Mas, observe que subtraindo $(4.77)_3$ de $(4.15)_3$, obtemos que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em $L^2(Q)$. Portanto,

$$\begin{aligned} F(f_n) &= \frac{1}{2}\int_{O\times(0,T)} f_n^2 dxdt + \varepsilon\|f_n\|_{L^2(\Omega)} - (f_n, u^T) \\ &= \frac{1}{2}\int_{O\times(0,T)} \varphi_n^2 dxdt + \varepsilon\|f_n\|_{L^2(\Omega)} - (f_n, u^T). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ segue o resultado.

<u>Afirmação 2</u>: $F(f)$ é estritamente convexo.

Com efeito, sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $r, s \in L^2(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned} F(\lambda r + (1-\lambda)s) &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (M^*(\lambda r + (1-\lambda)s))^2 dxdt \\ &+\varepsilon\|\lambda r + (1-\lambda)s\|_{L^2(\Omega)} - (\lambda r + (1-\lambda)s, u^T) \end{aligned} \tag{4.81}$$

Note que, usando a desigualdade elementar $2ab > a^2 + b^2$ com $a > 0$ e $b > 0$, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (M^*(\lambda r + (1-\lambda)s))^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left\{\lambda^2(M^*r)^2 + 2\lambda(1-\lambda)M^*rM^*s + (1-\lambda)^2(M^*s)^2\right\} dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left\{\lambda^2(M^*r)^2 + \lambda(1-\lambda)((M^*r)^2 + (M^*s)^2) + (1-\lambda)^2(M^*s)^2\right\} dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \left\{\lambda(M^*r)^2 + (1-\lambda)(M^*s)^2\right\} dxdt, \end{aligned} \tag{4.82}$$

e também,

$$\left\| \begin{array}{l} \|\lambda r+(1-\lambda)s\|_{L^2(\Omega)} < \lambda\|r\|_{L^2(\Omega)} + (1-\lambda)\|s\|_{L^2(\Omega)} \\ (\lambda r+(1-\lambda)s, -u^T) = \lambda(r, -u^T) + (1-\lambda)(s, u^T). \end{array} \right. \tag{4.83}$$

Daí, segue que

$$F(\lambda r+(1-\lambda)s) < \lambda F(r) + (1-\lambda)F(s). \tag{4.84}$$

o que acarreta em F ser estritamente convexo.

<u>Afirmação 3</u>: $F(f)$ é coerciva.

Devemos provar que

$$\lim_{|g|\longrightarrow\infty} \inf \frac{F(g)}{|g|} \geqslant \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0. \tag{4.85}$$

Para a prova desse resultado usaremos os argumentos como em Fabre-Puel-Zuazua [8] e Zuazua [21].

Seja g_j uma sequência em $L^2(\Omega)$ divergente e φ_j solução única de

$$\left| \begin{array}{l} -\varphi_j^{'} + A^*\varphi_j = 0, \ \text{em } Q \\ \varphi_j = 0, \ \text{sobre } \Sigma \\ \varphi_j(T) = g_j, \ \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.86}$$

Tome $\overline{g_j} = \dfrac{g_j}{|g_j|}$ e $\overline{\varphi_j} = \dfrac{\varphi_j}{|\varphi_j|}$. Por linearidade segue que $\overline{\varphi_j}$ é solução de

$$\left| \begin{array}{l} -\overline{\varphi_j}' + A^*\overline{\varphi_j} = 0, \ \text{em } Q \\ \overline{\varphi_j} = 0, \ \text{sobre } \Sigma \\ \overline{\varphi_j}(T) = \overline{g_j}, \ \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.87}$$

Logo $F(g_j) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (M^*g_j)^2 dxdt + \varepsilon\|g_j\|_{L^2(\Omega)} - (g_j, u^T)$ que ao dividirmos por $|g_j|$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{F(g_j)}{|g_j|} &= \frac{|g_j|}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (M^*\overline{g_j})^2 dxdt + \varepsilon + (\overline{g_j}, u^T) \\ &= \frac{|g_j|}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\overline{\varphi_j})^2 dxdt + \varepsilon + (\overline{g_j}, u^T). \end{aligned} \tag{4.88}$$

Para provarmos a coercividade distinguiremos dois casos:

<u>Primeiro Caso</u>: $\displaystyle\lim_{j\longrightarrow\infty} \inf \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\overline{\varphi_j})^2 dxdt > 0$;

Como $|g_j| \longrightarrow \infty$ quando $j \longrightarrow \infty$ temos que o primeiro termo de (4.88) tende a infinito enquanto que os outros dois permanecem limitados.

<u>Segundo Caso</u>: $\displaystyle\lim_{j\longrightarrow\infty} \inf \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\overline{\varphi_j})^2 dxdt = 0$;

Daí, extraímos uma subsequência de $(\overline{\varphi_j})$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (\overline{\varphi_j})^2 dxdt \longrightarrow 0, \tag{4.89}$$

quando $j \longrightarrow \infty$. Notemos que $|\overline{g_j}| \leqslant 1$, e podemos extrair uma subsequência convergente em $L^2(\Omega)$ tal que

$$\overline{g_j} \rightharpoonup \overline{g}, \text{ em } L^2(\Omega). \tag{4.90}$$

Denotemos por $\overline{\varphi}$ solução única de

$$\left|\begin{array}{l} -\overline{\varphi}' + A^*\overline{\varphi} = 0, \text{ em } Q \\ \overline{\varphi} = 0, \text{ em } \Sigma \\ \overline{\varphi}(T) = \overline{g}, \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.91}$$

Mostraremos que $\overline{\varphi_j} \rightharpoonup \overline{\varphi}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Com efeito, seja $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e seja u solução única do seguinte problema

$$\left|\begin{array}{l} u' + Au = \theta \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ u(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.92}$$

Multiplicando $(4.87)_1$ por u e integrando em Q obtemos

$$\begin{aligned} & -(\overline{\varphi_j}', u)_{L^2(Q)} + (A^*\overline{\varphi_j}, u)_{L^2(Q)} = 0 \\ & \Leftrightarrow -(\overline{\varphi_j}(T), u(T))_{L^2(\Omega)} + (\overline{\varphi_j}, u' + Au)_{L^2(Q)} = 0 \\ & \Leftrightarrow (\overline{\varphi_j}, \theta)_{L^2(Q)} = (\overline{g_j}, u(T))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Como $\overline{g_j} \rightharpoonup \overline{g}$ em $L^2(\Omega)$ então

$$(\overline{g_j}, u(T))_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (\overline{g}, u(T))_{L^2(\Omega)} \tag{4.94}$$

Multiplicando (4.91) por u e integrando em Q obtemos:

$$\begin{aligned} (\overline{\varphi}, \theta)_{L^2(Q)} &= (\overline{g}, u(T))_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{j\longrightarrow\infty} (\overline{g_j}, u(T))_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{j\longrightarrow\infty} (\overline{\varphi_j}, u(T))_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.95}$$

Logo $\overline{\varphi_j} \longrightarrow \overline{\varphi}$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Por (4.89) segue que

$$\overline{\varphi} \equiv 0, \text{ em } \mathcal{O}\times(0,T) \tag{4.96}$$

Pelo Teorema (2.2.19) temos que $\overline{g} = 0$ donde $\overline{g_j} \rightharpoonup 0$ em $L^2(\Omega)$ e assim segue (4.85). Pelo Teorema (2.2.17) temos que o problema (4.61) tem solução única e global.

Vamos agora dar uma caracterização para o controle líder v a partir de uma certa desigualdade variacional. Seja f solução de (4.73). Pelo Teorema (2.2.16) temos que:

$$\left\langle F'(f), v - f \right\rangle \geqslant 0, \forall v \in L^2(\Omega). \tag{4.97}$$

Mas,

$$\begin{aligned} F(f+\lambda(v-f)) &= \frac{1}{2}(M^*(f+\lambda(v-f)), M^*(f+\lambda(v-f)))_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \\ &+\varepsilon|f+\lambda(v-f)|_{L^2} - (f+\lambda(v-f), u^T) \\ &= \frac{1}{2}(M^*f+\lambda M^*v-\lambda M^*f, M^*f+\lambda M^*v-\lambda M^*f)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \\ &+\varepsilon\frac{|f+\lambda(v-f)|^2_{L^2}}{|f+\lambda(v-f)|_{L^2}} - (f+\lambda(v-f), u^T) \end{aligned} \tag{4.98}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}F(f+\lambda(v-f))\Big|_{\lambda=0} &= \Bigg(\frac{1}{2}\cdot 2(M^*v-M^*f, M^*f+\lambda M^*v-\lambda M^*f)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \\ &+\varepsilon\frac{\left\langle f, v-f\right\rangle}{|f+\lambda(v-f)|_{L^2}} - (v-f, u^T)\Bigg)_{\lambda=0} \\ &= (M^*v-M^*f, M^*f)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \varepsilon\frac{\left\langle f, v\right\rangle}{|f|} - \varepsilon|f|^2 - (v-f, u^T) \end{aligned} \tag{4.99}$$

Como $M^*f = \varphi$ temos,

$$\frac{d}{d\lambda}F(f+\lambda(v-f))\Big|_{\lambda=0} = (\widehat{v}-\varphi, \varphi)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \varepsilon\frac{\left\langle f, v\right\rangle}{|f|} - \varepsilon|f| - (v-f, u^T), \tag{4.100}$$

onde $\widehat{v} = M^*v$. Como f é o ínfimo de F, então, em particular, f é ínfimo de

$$F_1(v) = \frac{\varepsilon}{|v|}(v, \widehat{v}). \tag{4.101}$$

Daí,

$$F_1(f) \leqslant F_1(v),\ \forall v \in L^2(\Omega), \tag{4.102}$$

em particular para $v = \widehat{v}$ temos

$$\frac{\varepsilon}{|f|}(v, f) \leqslant \varepsilon|\widehat{v}|. \tag{4.103}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\widehat{v}-\varphi, \varphi)_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} + \varepsilon|\widehat{v}| - \varepsilon|f| - (\widehat{v}-f, u^T) &\geqslant \frac{d}{d\lambda}F(f+\lambda(v-f))\Big|_{\lambda=0} \\ &= \left\langle F'(f), v-f\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.104}$$

para todo $\nu \in L^2(\Omega)$. Para cada $f \in L^2(\Omega)$, seja φ solução de

$$\left| \begin{array}{l} -\varphi' + A^*\varphi = 0, \text{ em } Q \\ \varphi = 0, \text{ sobre } \Sigma \\ \varphi(T) = f + \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \rho_i^2, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.105}$$

onde ζ_i é solução de

$$\left| \begin{array}{l} -\zeta_i' + A^*\zeta_i = 0, \text{ em } Q \\ \zeta_i = 0, \text{ em } \Sigma \\ \zeta_i(T) = \rho_i^2 u(T), \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.106}$$

e u é solução única de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A^*u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_i \chi_i = \varphi\chi \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ em } \Sigma, \; u(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.107}$$

Sejam $\overline{\varphi} = \widehat{\nu} - \varphi$ e $\overline{\gamma_i} = \widehat{\gamma_i} - \gamma_i$ soluções de

$$\left| \begin{array}{l} -\overline{\varphi}' + A\overline{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega \\ \overline{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \overline{\varphi}(T) = \widehat{\nu} - f + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \overline{\gamma_i}(T) \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.108}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\gamma_i}' + A\overline{\gamma_i} = -\alpha_i \overline{\varphi}\chi_i \text{ em } Q \\ \overline{\gamma_i} = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \overline{\gamma_i}(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{4.109}$$

respectivamente. Multiplicando $(4.107)_1$ por $(\widehat{\nu} - \varphi)$ e integrando em Q obtemos,

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega u(T)(\widehat{\nu}(T) - \varphi(T))dx - \int_Q u(\widehat{\nu} - \varphi)'dxdt \\ \displaystyle + \int_Q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_i \chi_i (\widehat{\nu} - \varphi)dxdt + \int_Q u\,A^*(\widehat{\nu} - \varphi)dxdt = \int_Q \varphi\chi(\widehat{\nu} - \varphi)dxdt. \end{array} \right. \tag{4.110}$$

Multiplicando $(4.106)_1$ por $\widehat{\gamma_i} - \gamma_i$, obtemos

$$\int_\Omega -\zeta(T)(\widehat{\gamma_i}(T) - \gamma_i(T))dx + \int_Q \zeta_i A(\widehat{\gamma_i} - \gamma_i)dxdt + \int_Q \zeta_i(\widehat{\gamma_i} - \gamma_i)'dxdt = 0, \tag{4.111}$$

ou ainda,

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega u(T)\overline{\varphi}(T)dx - \int_Q u\overline{\varphi}'dxdt \\ \displaystyle + \int_Q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_i \chi_i \overline{\varphi}dxdt + \int_Q u\,A^*\overline{\varphi}dxdt = \int_Q \varphi\chi\overline{\varphi}dxdt \end{array} \tag{4.112}$$

e

$$\int_\Omega -\zeta(T)\overline{\gamma_i}(T)dx + \int_Q \zeta_i A\overline{\gamma_i}dxdt + \int_Q \zeta_i\overline{\gamma_i}'dxdt = 0 \tag{4.113}$$

Substituindo (4.108) e (4.109) em (4.112) e (4.113) obtemos, respectivamente:

$$\int_\Omega u(T)\overline{\varphi}(T)dx + \int_Q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\zeta_i\chi_i\overline{\varphi}dxdt = \int_Q \varphi\overline{\varphi}\chi dxdt \tag{4.114}$$

e

$$-\int_Q \alpha_i\overline{\varphi}\zeta_i\chi_i = \int_\Omega \zeta_i(T)\overline{\gamma_i}(T)dx. \tag{4.115}$$

Substituindo (4.115) em (4.114) temos,

$$\int_\Omega u(T)\overline{\varphi}(T)dx - \int_\Omega \zeta_i(T)\overline{\gamma_i}(T)dx = \int_Q \varphi\overline{\varphi}\chi dxdt, \tag{4.116}$$

ou ainda, após inserirmos os valores de $\zeta_i(T)$ e $\overline{\varphi}^(T)$ temos,

$$\int_\Omega u(T)(\widehat{v} - f + \sum_{i=1}^{n} \rho_i\overline{\gamma_i}(T))dx - \int_\Omega \rho_i^2 u(T)\overline{\gamma_i}(T)dx = \int_Q \varphi\overline{\varphi}\chi dxdt, \tag{4.117}$$

o que implica em,

$$\int_\Omega u(T)(\widehat{v} - f)dx = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \varphi(\widehat{v} - \varphi)dxdt. \tag{4.118}$$

Substituindo (4.118) em (4.104) obtemos,

$$(u(T,\widehat{v} - f)) + \varepsilon|\widehat{v}| - \varepsilon|f| - (\widehat{v} - f, u^T) \geqslant 0,\ \forall \widehat{v} \in L^2(\Omega), \tag{4.119}$$

donde,

$$(u(T) - u^T, \widehat{v} - f) + \varepsilon|\widehat{v}| - \varepsilon|f| \geqslant 0,\ \forall \widehat{v} \in L^2(\Omega). \tag{4.120}$$

Com isso demonstramos o seguinte Teorema de otimalidade para o líder

Teorema 4.4.1. *O melhor líder para o sistema (1.5) com* $w_i = -\alpha_i\zeta_i$*, onde* ζ_i *satisfaz*

$$\left|\begin{array}{l} -\zeta_i' + A^*\zeta_i = 0,\ \textit{em } Q \\ \zeta_i = 0,\ \textit{sobre } \Sigma \\ \zeta_i(T) = \rho_i^2 u(T),\ \textit{em } \Omega, \end{array}\right.$$

é aquele que minimiza

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} v^2 dxdt$$

sujeito a condição $u(T) \in u^T + \varepsilon B$ *e é dado pela solução* $\overline{\varphi}$ *do sistema*

$$\left| \begin{array}{l} -\overline{\varphi}' + A\overline{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega \\ \overline{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \overline{\varphi}(T) = \widehat{v} - f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho_i \overline{\gamma_i}(T) \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

com $\overline{\gamma_i}$ *satisfazendo*

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\gamma_i}' + A\overline{\gamma_i} = -\alpha_i \overline{\varphi} \chi_i \text{ em } Q \\ \overline{\gamma_i} = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \overline{\gamma_i}(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

e f *é unicamente determinada pela seguinte desigualdade variacional*

$$(u(T) - u^T, \widehat{v} - f) + \varepsilon|\widehat{v}| - \varepsilon|f| \geqslant 0, \ \forall \widehat{v} \in L^2(\Omega).$$

Referências Bibliográficas

[1] AGMON S., A. Douglis A., L. *Nirenberg, Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 , pp. 623-727, 1959.

[2] ALBUQUERQUE, I. C. A. de, *Controle Hierárquico para a equação do calor via estratégia de Stackelberg-Nash.* Dissertação de Mestrado. João Pessoa, 2011.

[3] AUBIN, J.P, *Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Second Edition. Springer, 1998.

[4] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Velarg, 2011.

[5] Díaz JI, LIONS, J-L. *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies.* In: Díaz JI, editor. Ocean Circulation and Pollution Control- A Mathematical and Numerical Investigation. Berlin: Springer; pp. 17-27, 2005.

[6] EKELAND, I. and TEMAM, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, SIAM, 1999.

[7] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American MAthematical Society, 1997.

[8] FABRE, C., Puel, J. P. and Zuazua, E., *Controlabilité approchée de l'equation de la chaleur linéarie avec contrôles de norme* L^∞ *minimale.* C.R. Acad. Sci. Paris, 316, 679-684, 1993.

[9] HOFFMAN, K., Kunze, R. *Álgebra Linear.* Ed. Polígono. São Paulo, 1970.

[10] KREYSIG, E. *Introductory Functional Analysis With Applications.* Ed. John and Sons. Canadá, 1978.

[11] LIONS, J.L. *Remarques sur la controlabilite approchee.* Jornadas Hispnao-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, Octubre 1990.

[12] LIZANA, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidade de Los Andes, Venezuela, 2000.

[13] MATOS, M. P., *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0, T; X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[14] MEDEIROS, L. A., Rivera, P.H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 1975.

[15] MEDEIROS, L.A. e MILLA MIRANDA,*Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos e Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[16] MEDEIROS, L.A., *Lições de Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[17] MEDEIROS, L.A., *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert*, IM- UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.

[18] MEDEIROS, L.A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM- UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[19] MIRANDA, M. M., *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Campina Grande - PB; EDUEPB, 2013.

[20] MIZOHATTA, S. *Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques.* Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto Ser. A31 219-239, 1958.

[21] ZUAZUA, E., *Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation.* J. Math. Pures et Appl., 76(1997), 570-594.