Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Ramon Soares Carvalho

Sobre a C^0-suficiência de jatos de germes analíticos

Teresina - 2014

Ramon Soares Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Sobre a C^0-suficiência de jatos de germes analíticos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

Teresina - 2014

CARVALHO, Ramon Soares.

xxxxx Sobre a C^0-suficiência de jatos de germes analíticos.

Ramon Soares Carvalho – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

1. Teoria de singularidade

CDD 516.36

Dedico meus esforços e meu trabalho à minha família que tanto me apoiou nos momentos difíceis e que esteve ao meu lado na minha caminhada acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus por tudo o que Ele me proporcionou na minha vida, pelas experiências vividas até aqui. Agradeço a Deus por ter chegado até muito mais longe do que eu pude imaginar.

Agradeço aos meus pais Francisco Simplício Carvalho e Judite Bezerra Soares, que me trouxeram ao mundo, me educaram e me ensinaram a lutar pelos meus sonhos. Agradeço aos meus irmãos,irmãs, tios, primos e à minha querida vó Alzira, a quem eu amo de coração. Agradeço à minha família por ter me dado suporte para alcançar o sonho de ter um curso superior e o privilégio de ser Mestre em Matemática pela UFPI.

Agradeço pelos meus amigos de infância e de escola, em particular aos amigos Luciano(Lulu), Robert, Anderson, Michael, Juliene, Carla, Cristina, Benedito,e tantos outros companheiros que fizeram parte da minha história.

Agradeço aos meus professores da Unidade Escolar Raimundo Wall Ferraz que me ensinaram o conhecimento dos livros e da vida. A eles meu respeito e admiração.

Agradeço às igrejas Batista em Água Mineral e à igreja Cristã Evangélica Rio de Águas Vivas. Agradeço pelas orações e pelos momentos bons que pude usufruir, e pelas amizades que fiz em ambas.

Agradeço aos meus amigos da UFPI, aos amigos que fiz no curso de Matemática desde da minha entrada em 2007 , em particular aos amigos Edvalter, Valdir, Emerson Matos, Leonardo, Samara, Fernanda, Edvaldo, e outros que "minha memória fraca" não pôde lembrar. Todos nós chegamos mais longe do que pensávamos que chegaríamos. Devagar se vai ao longe.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFPI com os quais criei amizade. Sou muito grato por esse convívio e pelas lições aprendidas.

Agradeço pela minha turma de Fundamentos, alunos meus com os quais eu pude ensinar um pouco do meu conhecimento e com quem criei amizades fortes. Desejo-lhes o sucesso em suas vidas nessa caminhada que nos comprometemos de estudar Matemática.

Agradeço ao professor Antônio Jorge pelas aulas de Inglês que foram de grande ajuda no decorrer do mestrado. De maneira simples grandes coisas acontecem.

Agradeço à Delite Barros e Darcy Passos pelo apoio que me deram e pelos ricos conselhos que fizeram de mim uma pessoa melhor.

Agradeço a uma pessoa que entrou em minha vida e que dela nunca sairá: Bruna você resolveu equações na minha simples vida que nenhum matemático da Terra foi capaz de solucionar.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“*Grandes coisas fez o Senhor por nós, e por isso estamos alegres*”.

Salmos 126,3 .

Resumo

No estudo da Teoria de Singularidade caracterizamos os pontos críticos de germes de funções suaves e analíticas. Neste trabalho apresentamos as noções introdutórias e essenciais para esta caracterização, como a Álgebra Comutativa, Funções Analíticas e E.D.O. A partir de um exemplo particular no caso real, apresentamos uma extensão, para o caso analítico, da C^0-suficiência de jatos de germes analíticos. Para uma tal abordagem, demonstramos lemas que nos levarão a associar a C^0-suficiência analítica de um jato com uma desigualdade que envolva o gradiente do respectivo germe.

Palavras-chave: C^0-suficiência, germes analíticos, jatos.

Abstract

In the study of Theory of Singularity we caracterize the critical points of germs of smooth and analitical functions. In this work, we presente the introductory and essential notions for this caracterization, as the Commutative Algebra, Analytical Functions and O.D.E. From an particular example in the real case, we presente an extension, for the analytical case, the C^0-suficiency of jets of analytical germs. For this approach, we show lemmes which will let us to associate the analytical C^0-sufficiency of jet with an desiguality of gradiente of the respective germe.

Key words : C^0-suficiency, analytical germs, jets.

Contents

Chapter 1

Preliminares

Iniciaremos o nosso trabalho dando uma breve exposição dos conceitos básicos de Álgebra Comutativa, Teoria da Singularidade e Equações Diferenciais Ordinárias. Os temas aqui apresentados podem ser encontrados nas referências [**8**], [**5**], [**9**] e [**4**].

1.1 Noções de Álgebra Comutativa

Definição 1.1.1. *Um anel comutativo com unidade* $(A, +, \cdot\,)$ *é um conjunto* A *com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por* $+$ *(chamada* adição*) e de uma operação denotada por* $\cdot$ *(chamada* multiplicação*) que satisfazem as seguintes condições:*

1. *A adição é associativa*

$$\forall\ x, y, z \in A,\ \ (x + y) + z = x + (y + z).$$

2. *Existe um elemento neutro com respeito à adição*

$$\exists\ 0 \in A; \forall\ x \in A,\ \ 0 + x = x + 0 = x.$$

3. *Todo elemento de* A *possui um oposto com respeito à adição*

$$\forall\ x \in A, \exists\ z \in A;\ \ x + z = z + x = 0.$$

4. A adição é comutativa

$$\forall\ x, y \in A,\ \ x + y = y + x.$$

5. A multiplicação é associativa

$$\forall\ x, y, z \in A,\ \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z).$$

6. Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação

$$\exists\ 1 \in A; \forall\ x \in A,\ \ 1\cdot x = x\cdot 1 = x.$$

7. A multiplicação é comutativa

$$\forall\ x, y \in A,\ \ x\cdot y = y\cdot x.$$

8. A multiplicação é distributiva relativamente à adição

$$\forall x, y, z \in A,\ \ x\cdot (y + z) = x\cdot y + x\cdot z.$$

Observações:

1. O elemento neutro aditivo é único, pois se 0 e $0'$ são dois elementos neutros para a adição, temos $0 = 0 + 0' = 0'$.

2. O oposto aditivo é único, pois se y e y' são dois opostos de x com respeito à adição, temos $y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0 + y' = y'$. O oposto de x é denotado por $-x$.

Exemplo 1.1: $(\mathbb{Z}, +, \cdot\,), (\mathbb{Q}, +, \cdot\,), (\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot\,), (\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ são exemplos de anéis comutativos.

Exemplo 1.2: Dados dois anéis $(A_1, +_1, \cdot_1\,)$ e $(A_2, +_2, \cdot_2\,)$, podemos construir um novo anel da maneira seguinte: no conjunto $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, definimos as operações:

$$(a_1, a_2) + (a_2, a_3) := (a_1 +_1 a_1', a_2 +_2 a_2')$$

$$(a_1, a_2) \cdots (a'_1, a'_2) := (a_1 \cdots a'1, a_2 \cdots a'2)$$

$(A_1 \times A_2, +, \cdots)$ é um anel, chamado *produto direto* de A_1 com A_2, onde o elemento neutro com respeito à adição é $(0_{A_1}, 0_{A_2})$ e o elemento neutro com respeito à multiplicação é $(1_{A_1}, 1_{A_2})$.

Exemplo 1.3: Mais geralmente, dados r anéis $(A_1, +_1, \cdots_1), ..., (A_r, +_r, \cdots_r)$, definimos a noção de produto direto $A_1 \times ... \times A_r$ de maneira análoga.

Definição 1.1.2. *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal de A se*

1. $x + y \in I, \forall\ x, y \in I$
2. $a \cdot x \in I, \forall\ x \in I, \forall\ a \in A$.

Exemplo 1.4: Seja $n \geqslant 0$ um inteiro. Então o subconjunto $n\mathbb{Z} := \{zn; z \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal do anel dos inteiros.

Exemplo 1.5: Mais geralmente, seja $(A, +, \cdot)$ um anel e sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_t$ elementos de A. Então o subconjunto $A\alpha_1 + \cdots + A\alpha_t := \{a_1\alpha_1 + \cdots + a_t\alpha_t; a_1, \cdots, a_t \in A\}$ é um ideal de $(A, +, \cdot)$.

Definição 1.1.3. *Um ideal $\mathfrak{M}$ de A é dito* ideal maximal *se $\mathfrak{M} \subsetneqq A$ e se não existe ideal contido propriamente entre $\mathfrak{M}$ e A, isto é, se não existe ideal J tal que $\mathfrak{M} \subsetneqq J \subsetneqq A$.*

O ideal $2\mathbb{Z}$ é um ideal maximal de Z.

Definição 1.1.4. *Um anel A com exatamente um ideal maximal $\mathfrak{M}$ é um anel local.*

Definição 1.1.5. *Um $A-$módulo é um grupo abeliano M no qual A atua linearmente, ou seja, existe uma ação $\mu : A \times M \to M$, denotada por $\mu(a, m) := am$ tal que*

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$1x = x$$

$\forall a, b \in A;\ x, y \in M.$

Exemplo 1.5: Se A é um corpo $\mathbb{K}$, então um $A-$módulo é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial.

Exemplo 1.6: $\forall A$ anel e $I \subset A$ ideal, então I é um $A-$módulo

Definição 1.1.6. *Um submódulo M' de M é um subgrupo de M o qual é fechado em relação à multiplicação pelos elementos de A.*

O grupo abeliano quociente $\frac{M}{M'}$ herda uma estrutura de $A-$módulo de M, com ação natural definida por $a(x + M') = ax + M'$.

Definição 1.1.7. *Se M, N são $A-$módulos, sua* soma direta $M \oplus N$ *é o conjunto de todos os pares (x, y) com $x \in M,\ y \in N$. $M \oplus N$ é um $A-$módulo.*

Definição 1.1.8. *Se $(M_i)_{i\in I}$ é uma família de $A-$módulos, define-se sua soma direta $\bigoplus_{i\in I} M_i$; como segue: cada elemento $x \in$ seus elementos são famílias $(x_i)_{i\in I}$ tais que $x_i \in M_i$ para cada $i \in I$ e quase todos os x_i são 0.*

Definição 1.1.9. *Um $A-$módulo livre é um $A-$módulo isomorfo à um $A-$módulo da forma $\bigoplus_{i\in I} M_i$ onde cada $M_i \cong A$ (como um $A-$módulo).*

Definição 1.1.10. *Um $A-$módulo livre finitamente gerado é portanto isomorfo ao anel soma direta $A \oplus \cdots \oplus A$ (n parcelas), denotada por A^n.*

Para os nossos estudos será de fundamental importância o Teorema de Nakayama que não demonstraremos aqui por fugir dos nossos objetivos.

Teorema 1.1.1. [Teorema de Nakayama] *Seja A um anel local, $\mathfrak{M}$ seu ideal maximal e P um $A-$módulo. Se $M \subset P$ é um submódulo finitamente gerado e $N \subset P$ é um submódulo tal que $M \subset N + \mathfrak{M}M$, então $M \subset N$.*

Demonstração: [5].

1.2 Germes de Conjuntos e Funções

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. No conjunto $\mathcal{P}(x)$ formado por todos os subconjuntos de X, definimos a relação de equivalência: $A \sim_x B$ se, e somente se, $A \cap U = B \cap U$ para alguma vizinhança U de x em X.

Definição 1.2.1. *Uma classe de equivalência da relação $\sim_x$ é chamada um germe de subconjunto de X no ponto x. Denotaremos a classe de equivalência do subconjunto $A \subset X$ por A, deixando o ponto x subentendido.*

Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ qualquer e Y um conjunto qualquer e considere o conjunto dos pares $M = \{(U, f)\}$, onde U é uma vizinhança de x em X e $f : U \to Y$ é uma função qualquer. Introduzimos uma relação de equivalência em M:

$(U_1, f_1) \approx_x (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f_1|_{U_0} = f_2|_{U_0}$ para alguma vizinhança U_0 de x com $U_0 \subset U_1 \cap U_2$.

Definição 1.2.2. *Uma classe de equivalência da relação $\approx_x$ é chamada um germe de função de X em Y no ponto x. Denotaremos a classe de equivalência (U, f) simplesmente por f.*

1.3 Germes de Funções Suaves

Quando $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p$ e $f : U \to Y$ é uma função suave, em que U é alguma vizinhança de um ponto $x \in X$, então o conjunto dos germes de funções correspondentes será denotado por $\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $p = 1$ o conjunto dos germes será denotado apenas por $\mathcal{E}_n$.

1.4 Germes de Funções Analíticas

No caso $X = \mathbb{C}^n, Y = \mathbb{C}^p$, consideraremos apenas as funções $f : U \to Y$ analíticas, onde U é uma vizinhança de $x \in X$, isto é, aplicações que podem ser escritas como séries de potências convergentes em torno de cada ponto x em U. O conjunto dos germes de funções analíticas $f : U \to Y$ será denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Quando $p = 1$ o conjunto dos germes correspondentes será denotado simplesmente por $\mathcal{O}_n$.

$\mathcal{O}_n$ é um anel comutativo com unidade. Consideraremos apenas os germes na origem $x = 0$.

Proposição 1.4.1. *1. $\mathcal{O}_n$ é um anel local e seu único ideal maximal é $\mathfrak{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n; f(0) = 0\}$.*

2. A $k-$ésima potência do ideal $\mathfrak{M}_n$ é gerado por todos os monômios de grau k, isto é, por $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ com $|a| = a_1 + \cdots a_n = k$. Além disso, $\mathfrak{M}_n^k = \{f \in \mathcal{O}_n; \frac{\partial^{|a|} f(0)}{\partial x^a} = 0,$ para todo a com $0 \leqslant |a| < k\}$.

3. *Um ideal* $I \subset \mathcal{O}_n$ *possui codimensão finita , isto é,* $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} < \infty$, *se e somente se* $\mathfrak{M}^k \subset I$ *para algum inteiro* k.

Demonstração:

1. Claramente $\mathfrak{M}_n$ é um ideal e qualquer elemento $f \notin \mathfrak{M}_n$ possui um inverso $\frac{1}{f}$ o qual é também um germe em $\mathcal{O}_n$.

$\blacksquare$

2. Faremos a prova somente para $k = 1$ e a continuação da prova é feita por indução. Se $f \in \mathfrak{m}_n$, então existe um disco $D_r = \{x \in \mathbb{C}^n; |x| < r\}$ e um representante do germe f (denotado por f) definido nesse disco D_r.

   Para $x \in D_r$ tem-se que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d(f(tx))}{dt} dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$$

   As funções $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$ são elementos de $\mathcal{O}_n$ e a expressão acima mostra que f pertence ao ideal gerado por $x_1, \cdots, x_n$.

$\blacksquare$

3. Se $\mathfrak{M}^k \subset I$ então a sobrejeção natural $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{M}^k} \to \frac{\mathcal{O}_n}{I}$ mostra que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{M}^k}$. Podemos identificar $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathfrak{M}^k.}$ com o espaço vetorial de polinômios em $x_1, ..., x_n$ de grau estritamente menor que k e esse espaço vetorial possui dimensão finita, isto é, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}^k} < \infty$.

   Reciprocamente, se $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} < \infty$, então a sequência

$$\mathcal{O}_n \subset I + \mathfrak{M} \subset I + \mathfrak{M}^2 \subset I + \mathfrak{M}^3 \subset \cdots \subset I + \mathfrak{M}^k \subset \cdots$$

   contém um número finito de inclusões estritas. Portanto, existe um inteiro k tal que $I + \mathfrak{M}^k = I + \mathfrak{M}^{k+1}$. Isto implica que $\mathfrak{M}^k \subset I + \mathfrak{M}\mathfrak{M}^k$, assim pelo teorema de Nakayama temos que $\mathfrak{M}^k \subset I$.

$\blacksquare$

Definição 1.4.1. *Define-se o número de Milnor de* f *por* $\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$, *onde* $J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$.

1.5 Elementos de Equações Diferenciais Ordinárias

Seja U um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ onde $\mathbb{R}$ é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano $n-$dimensional. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ será denotado por $(t, x), t \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ em $\mathbb{E}$.

Seja $f : U \to \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não-degenerado da reta, podendo o intervalo I ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 1.5.1. *Uma função diferenciável* $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{E}$ *chama-se solução da equação*

$$(1)\ \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

no intervalo I *se*

1$-$ *o gráfico de* φ *em* I *está contido em* U *e*

2$-$ $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$ *para todo* $t \in \mathrm{I}$. *Se* t *é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva. A equação acima chama-se* equação diferencial ordinária de primeira ordem *e é denotada abreviadamente por*

$$x' = f(t, x).$$

Chamamos *problema de Cauchy* ao problema

$$(2) x' = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

sob hipóteses bem gerais sobre f existe uma e só uma solução φ dessa equação num intervalo que contém t_0 e tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Uma tal φ será chamada de *solução do problema com dados iniciais* (t_0, x_0).

Para os nossos estudos será de fundamental importância dos teoremas abaixo, os quais não demonstraremos aqui (exceto o Teorema de Gronwall) por fugir dos nossos objetivos. A demonstração dos mesmos se encontam em **[9].**

Teorema 1.5.1. **[Teorema de Existência]** *Seja* f *contínua em* $U = \mathrm{I}_a \times B_b$, *onde* $\mathrm{I}_a = \{t; |t - t_0 \leqslant a|\}, B_b = \{x; |x - x_0| \leqslant b\}$. *Se* $|f| \leqslant M$ *em* U, *existe solução de*

$$x' = f(t, x),\ \ x(t_0) = x_0$$

em I_a, *onde* $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Outro resultado bastante conhecido é o seguinte

Teorema 1.5.2. [Teorema de Gronwall] *Sejam* u, v *funções contínuas não-negativas em* $[a, b]$ *tais que , para* $\alpha \geqslant 0$, *satisfazem a*

$$u(t) \leqslant \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$, *então* $u \equiv 0$.

Demonstração: Se $\alpha > 0$, para $\gamma(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds$, temos $\gamma(a) = \alpha, \gamma(t) \geqslant \alpha$. De $\gamma'(t) = v(t)u(t) \leqslant v(t)\gamma(t)$, temos $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \leqslant v(t)$.

Integrando entre a e t obtemos

$$\frac{\gamma(t)}{\alpha} = e^{\int_a^t v(s)ds},$$

de onde

$$u(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Se $\alpha = 0$, o caso anterior implica que, para $\alpha' > 0$,

$$u(t) \leqslant \alpha' e^{\int_a^t v(s)ds},$$

para todo $t \geqslant a$, donde $u(t) \equiv 0$.

$\blacksquare$

Seja U um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Um campo vetorial de classe $C^k, 1 \leqslant k \leqslant \infty$, em U, é uma aplicação $X : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$(3)\ x' = X(x)$$

As soluções desta equação são as aplicações diferenciais

$$\varphi : I \to U$$

tais que

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t))$$

para todo $t \in I$, são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais de* X.

Definição 1.5.2. *Um ponto* $x \in U$ *é dito ponto singular de* X *se* $X(x) = 0$*, e ponto regular de* X *se* $X(x) \neq 0$.

Definição 1.5.3. *Uma equação diferencial do tipo* (3) *é chamada equação diferencial autônoma, isto é, independente de tempo.*

Definição 1.5.4. *O conjunto* $\gamma_p = \{\varphi(t,p); t \in I_p\}$*, isto é, a imagem da curva integral de* X *pelo ponto* p*, chama-se órbita de* X *pelo ponto* p.

Consideremos agora o sistema

$$(4)\ x' = f(t,x)$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é contínua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto.

Definição 1.5.5. *Seja* $\varphi(t)$ *uma órbita de* (4) *definida para* $t \geqslant 0$*. Diz-se que* $\varphi(t)$ *é estável se para todo* $\epsilon > 0$ *existir* $\delta > 0$ *tal que se* $\psi(t)$ *é solução de* (4) *e* $|\psi(0)-\varphi(0)| < \delta$ *então* $\psi(t)$ *está definida para todo* $t \geqslant 0$ *e* $|\psi(t) - \varphi(t)| < \epsilon, \forall t \geqslant 0$*. Se além disso, existir* δ_1 *tal que* $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$ *implica* $\lim x \to \infty |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$ *então* φ *diz-se assintoticamente estável.*

Consideremos um sistema autônomo

$$(5)\ x' = f(x), f : U \to \mathbb{R}^n$$

de classe C^1. $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. A solução de (5) passando por $x \in U$ será sempre indicada por $\varphi_x(t)$, com $\varphi_x(0) = x$.

Seja $V : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Ponhamos, para cada $x \in U, v'(x) = \frac{d(V(\varphi(x(t))))}{dt}|_{t=0}$.

Definição 1.5.6. *Seja* x_0 *um ponto singular de* (5)*. Uma função de Liapounov para* x_0 *é uma função* $V : U \to \mathbb{R}$ *diferenciável definida em um aberto* $U \ni x_0$*, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $V(x_0) = 0$*, e* $V(x) > 0, \forall x \neq x_0$

2. $V' \leqslant 0$ *em* U

A função de Liapounov V *diz-se estrita quando*

3. $V' < 0$ *em* $U - x_0$

Teorema 1.5.3. *Seja* x_0 *um ponto singular de* (5)*. Se existe uma função de Liapounov para* x_0*, então* x_0 *é estável. Se a função for estrita,* x_0 *é assintoticamente estável.*

Definição 1.5.7. *Um ponto singular* x_0 *do sistema* (5) *diz-se* instável *quando não for estável.*

Teorema 1.5.4. *Consideremos um sistema autônomo* (5)*, admitindo um ponto singular* x_0*. Seja* D *um domínio em* U *tal que* $x_0 \in \partial D$*. Suponhamos que existe uma função* $C^1 V : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $V > 0$ *e* $V' > 0$ *em* D *e* $V \equiv 0$ *em* ∂D*. Então* x_0 *é instável.*

Chapter 2

Motivação para estudar a C^0–suficiência

Antes de abordarmos a C^0–suficiência de jatos analíticos e sua caracterização, partiremos de uma situação mais simples, aonde os pré-requisitos são temas habituais de um curso de Análise em Várias Variáveis, como Teorema da Aplicação Inversa e Teorema da Submersão.

2.1 Teorema da Aplicação Inversa e Forma Local da Submersão

Sejam U, V, W subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$, respectivamente. Seja $f : U \to V$ uma função com coordenadas $f_1, ..., f_n$. Dizemos que f é uma função *suave* de classe C^∞ quando todas as derivadas parciais

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

existem e são contínuas em U. Dizemos que f é um *difeomorfismo* suave de U em V quando f for suave, bijetiva e sua inversa f^{-1} também.

Agora suponhamos $f : U \to V$ suave. Para todo ponto $a \in U$ existe uma transformação linear $D_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, chamada a *diferencial* de f em a, a qual é precisamente a transformação linear, cuja matriz associada em relação à base canônica é a chamada *Matriz Jacobiana*

$$\mathrm{Jac}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

O caso em que $f : U \to V$ é uma restrição de uma transformação linear $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, então f é claramente suave e um cálculo do Jacobiano nos dará $D_a f = F$ para todo ponto $a \in U$. Um dos fatos básicos que precisaremos conhecer acerca da diferencial é a Regra da Cadeia: se temos um triângulo comutativo de funções suaves

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & W \end{tikzcd}$$

e um ponto $a \in U$ com $f(a) = b$, então o triângulo correspondente das diferenciais comuta

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^p \arrow[dr, "D_b g"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "D_a f"] \arrow[rr, "D_a h"] & & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

Teorema 2.1.1. *No caso em que* $n = p$ *e* $f : U \to V$ *é um difeomorfismo, tem-se que em cada ponto* $a \in U$ *a diferencial* $D_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é invertível.*

Demonstração: Uma vez que teremos o triângulo comutativo de funções suaves

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "f^{-1}"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "I"] & & U \end{tikzcd}$$

Agora seja $a \in U$ e $b = f(a)$. Pela Regra da Cadeia teremos o triângulo comutativo de diferenciais

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^p \arrow[dr, "D_b f^{-1}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "D_a f"] \arrow[rr, "I"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

o qual indica que $D_a f$ é invertível com inversa $D_b f^{-1}$.

■

A recíproca do teorema nem sempre é verdadeira globalmente. Entretanto podemos obtê-la localmente que é o conteúdo do Teorema da Função Inversa cuja demonstração pode ser vista em [**6**]

Teorema 2.1.2. [**Teorema da Função Inversa**] *Se* $f : U \to V$ *é suave, e* $a \in U$ *é tal que* $D_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é invertível, então existem vizinhanças abertas* U', V' *de* a *e* $f(a)$*, respectivamente tais que* $f : U' \to V'$ *é um difeomorfismo.*

Como consequência do Teorema acima apresentaremos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.3. [**Forma Local da Submersão**] *Seja* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *uma aplicação suave com* $f(0) = 0$ *e* $D_0 f$ *de posto* p*: então existe um difeomorfismo local* $h : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *onde* $0 \in U, h(0) = 0$ *e*

$$f \circ h^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_p).$$

Demonstração: Consideraremos a matriz Jacobiana de f. Podemos supor que ela possui uma submatriz de ordem $p \times p$ invertível e podemos supor ainda que sejam as correspondentes das p-primeiras coordenadas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_p} & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_p} & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Defina a função suave $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x), \cdots, f_p(x), x_{p+1}, \cdots, x_n)$$

onde $f_1, \cdots, f_p$ são as funções-coordenada de f.

Note que uma simples análise do Jacobiano de F mostra que ela é invertível:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_p} & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_p} & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial f_p(0)}{\partial x_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema da Função Inversa a função F possui uma restrição h a qual é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$. Observe que se $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é a função projeção definida por $\pi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_p)$ então

$$f \circ h^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = \pi \circ F \circ h^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = \pi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_p),$$

para uma vizinhança da origem.

■

2.2 Um caso particular

Trataremos de resolver um problema simples, antes de abordarmos o teorema principal. Usaremos a notação $j^1 f(0)$ para designar a transformação linear

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \frac{\partial f(0)}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial f(0)}{\partial x_n} x_n.$$

Observação: Usamos a notação

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$$

significando que f é um germe tal que $f(0) = 0$.

Teorema 2.2.1. *Seja* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *uma função suave tal que* $\mathrm{grad} f(0) \neq 0$. *Então, para toda função* $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *tal que* $j^1 f(0) = j^1 g(0)$, *existe um homeomorfismo local* $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *tal que* $f = g \circ \varphi$, *numa vizinhança da origem.*

Demonstração: Observemos que pelas hipóteses do teorema, $\mathrm{grad} f(0) \neq 0$ significa que f possui pelo menos uma derivada parcial não nula na origem. Podemos supor que $\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} \neq 0$. Aplicando o Teorema da Forma Local da Submersão para f, no caso particular $p = 1$, teremos facilmente a existência de um homeomorfismo (na verdade um difeomorfismo) local $h : U \to (\mathbb{R}^n, 0)$ numa vizinhança aberta U em torno da origem, tal que $f \circ h^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = x_1$.

Novamente, pelas hipóteses do Teorema em questão, $j^1 f(0) = j^1 g(0)$ teremos que $\frac{\partial g(0)}{\partial x_1} \neq 0$. Analogamente aplicamos o Teorema da Forma Local da Submersão em g, obtendo uma vizinhança aberta U' em torno de $0 \in \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo local $k^{-1} : U' \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g \circ k^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = x_1$. Tomando a vizinhança aberta $U'' = U \cap U'$ teremos que $f \circ h^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = x_1 = g \circ k^{-1}(x_1, \cdots, x_n)$, assim obtemos $f = g \circ \varphi$, onde $\varphi : U'' \to (\mathbb{R}^n, 0)$ é dada localmente por $\varphi = k^{-1} \circ h$.

■

Chapter 3

C^0–suficiência

Sejam $x_1, ..., x_n$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{C}^n$. Se $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, denotamos por x^k o monômio $x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$. Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe analítico e $f(x) = \sum a_k x^k$ sua expansão de Taylor em torno da origem. Se r é um inteiro positivo então o r-jato de f é o polinômio

$$j^r f(x) = \sum_{|k| \leqslant r} a_k x^k,$$

onde $|k| = k_1 + \cdots + k_n$.

Se $f \in \mathcal{O}_n$, denotamos por $J(f)$ o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelas derivadas parciais de f e $\mathrm{grad} f$ o germe de função $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ dado por

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Definição 3.0.1. *Dizemos que o* $j^r f$ *é* C^0*–suficiente se, para cada germe de função analítica* $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *tal que* $j^r g(x) = j^r f(x)$, *existe um germe de homeomorfismo*
$h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *tal que* $f = g \circ h$.

Definição 3.0.2. *Denotamos por* $J^r_{\mathbb{C}}(n, 1)$ *o espaço dos* r*–jatos complexos de funções analíticas* $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.

Definição 3.0.3. *Um* r*–jato* $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n, 1)$ *é* ν*–suficiente em* $\mathcal{O}_n$ *se para todo germe analítico* $g \in \mathcal{O}_n$, *com* $j^r g = j^r f$, *os germes dos conjuntos* $f^{-1}(0)$ *e* $g^{-1}(0)$ *são topologicamente equivalentes, isto é, se existe um homeomorfismo local* $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, *tal que* $h(g^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$. *Quando isto ocorre, dizemos que* $f^{-1}(0)$ *e* $g^{-1}(0)$ *possuem o mesmo tipo topológico.*

3.1 Teorema Principal

Teorema 3.1.1. *Seja* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *um germe analítico, então o* r*-jato de* f *é* C^0*-suficiente se, e somente se, existem* $c, \delta > 0$ *tais que*

$$|\mathrm{grad} f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta},$$

para todo x *numa vizinhança aberta de* 0 *em* $\mathbb{C}^n$*.*

Dividiremos a demonstração do Teorema acima por meio de 9 lemas.

Lema 1. *Seja* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *um germe analítico. Se existem* $c, \delta > 0$ *tais que*

$$|\mathrm{grad} f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta},$$

para todo x *numa vizinhança aberta de* 0 *em* $\mathbb{C}^n$*, então o* r*-jato de* f *é* C^0*-suficiente.*

Demonstração: Consideremos $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe analítico. Queremos provar que para qualquer germe g com $j^r g = j^r f$ existe um homeomorfismo local $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $g(h(x)) = f(x)$, para todo x numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^n$.

Podemos assumir que $f'(0) = 0$, pois se alguma das derivadas parciais de f na origem fosse não-nula, teríamos pelo capítulo anterior, trazendo para o caso complexo, que $j^1 f$ é C^0−suficiente.

Definimos a função auxiliar

$$F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad F(x, t) = f(x) + tP(x),$$

onde $P(x) = g(x) - f(x)$ e $x = (x_1, ..., x_n), t \in \mathbb{R}$.

Afirmação : Para x suficientemente pequeno e $0 \leqslant t \leqslant 1$ temos que

$$\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r-\delta},$$

onde c é dado na hipótese do lema.

Com efeito, notemos que $j^r g = j^r f \Rightarrow P^{(i)}(0) = 0, \forall i = 1, ..., r$, onde $P^{(i)}(0)$ é a i−ésima derivada de P avaliada na origem.

Assim, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|P(x)|}{|x|^r} = 0$. Logo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|P(x)|}{|x|^{r-\delta}} = 0$.

Para todo t,

$$\mathrm{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0,$$

para $x = 0$. Logo F possui o ponto $(0, t)$ como ponto singular, em que $0 \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{R}$.

Para $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, x \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
|gradF| &= \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + t\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} + t\frac{\partial P}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right| \\
&\geqslant |gradf(x) + tgradP(x)| \\
&\geqslant |gradf(x)| - |t||gradP(x)| \\
&\geqslant |gradf(x)| - |gradP(x)| \\
&\geqslant c|x|^{r-\delta} - |gradP(x)| \\
&= |x|^{r-\delta}\left(c - \frac{|gradP(x)|}{|x|^{r-\delta}}\right) \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r-\delta},
\end{aligned}$$

para x suficientemente pequeno.

Note que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Portanto o que desejamos é encontrar um homeomorfismo local $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que F é constante ao longo de alguma curva ligando $(x, 0)$ e $(h(x), 1)$.

Defina a função

$$\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, \phi(x, t) = |gradF|^{-2}\overline{P(x)}grad, F$$

restringindo-a para $|x| > 0$ suficientemente pequeno, e onde $\overline{P(x)}$ é o conjugado complexo de $P(x)$. Como $x \neq 0, \phi(x, t)$ está bem definida.

Tomemos o campo vetorial

$$X(x, t) = (0, 1) - \overline{\phi(x, t)},$$

e $X(0, t) = (0, 1)$ se $x = 0$.

Afirmação : O campo vetorial $X(x, t)$ possui as quatro características abaixo:

1. $X(x, t)$ é contínuo em (x, t), para $0 \leqslant t \leqslant 1$;
2. $lim_{x\to 0}\dfrac{|X(x, t) - X(0, t)|}{|x|} = 0$ uniformemente para $0 \leqslant t \leqslant 1$;
3. Para $x \neq 0$, $X(x, t)$ é tangente à superfície de nível $F = constante$, passando por (x, t);
4. Temos que o produto interno $\langle X(x, t), (0, 1)\rangle > 0$, para x numa vizinhança aberta de 0.

De fato, note que $X(x,t) - X(0,t) = (0,1) - \overline{\phi(x,t)} - (0,1) = -\overline{\phi(x,t)}$. Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{|X(x,t)-X(0,t)|}{|x|} &= \lim_{x\to 0}\left[|x|^{-1}|X(x,t)-X(0,t)|\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[|x|^{-1}|\overline{\phi(x,t)}|\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[|x|^{-1}|gradF|^{-2}|P(x)||gradF|\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[|x|^{-1}|gradF|^{-1}|P(x)|\right].
\end{aligned}$$

Como $|gradF| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r-\delta}, \forall \delta > 0$, em particular, temos para $\delta = 1$:

$$\begin{aligned}
|gradF| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r-1} &\Rightarrow |gradF| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r}|x|^{-1}\\
&\Rightarrow |gradF||x| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r}\\
&\Rightarrow |gradF|^{-1}|x|^{-1} \leqslant \frac{2}{c}|x|^{-r}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left[|x|^{-1}|gradF|^{-1}|P(x)|\right] &\leqslant \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{c}|x|^{-r}|P(x)|\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2|P(x)|}{c|x|^{r}}\right] = 0
\end{aligned}$$

Isto prova 1) e 2). A construção de $X(x,t)$ implica 3).

Para provar 4), note que

$$\begin{aligned}
\langle X(x,t),(0,1)\rangle &= \langle (0,1) - \overline{\phi(x,t)},(0,1)\rangle\\
&= \langle (0,1),(0,1)\rangle - \langle \overline{\phi(x,t)},(0,1)\rangle\\
&= 1 - \langle |gradF|^{-2}P(x)\overline{gradF},(0,1)\rangle\\
&= 1 - \left\langle |gradf|^{-2}P(x)\overline{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n},P(x)\right)},(0,1)\right\rangle\\
&= 1 - |gradF|^{-2}|P(x)|^{2}.
\end{aligned}$$

Novamente, como $|gradF| \geqslant \frac{c}{2}|x|^{r-\delta}$, temos que

$$\begin{aligned}
|gradF|^2 \geqslant \frac{c^2|x|^{2(r-\delta)}}{4} &\Rightarrow \frac{1}{|gradF|^2} \leqslant \frac{4}{c^2|x|^{2(r-\delta)}}\\
&\Rightarrow \frac{-1}{|gradF|^2} \geqslant \frac{-4}{c^2|x|^{2(r-\delta)}}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\langle X(x,t),(0,1)\rangle = 1 - |gradF|^{-2}|P(x)|^2 \geqslant 1 - \frac{4}{c^2}\frac{|P(x)|^2}{|x|^{2(r-\delta)}} > 0,$$

para x numa vizinhança de 0.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dt}{ds}\right) = X(x,t).$$

Mostraremos que existe uma, e somente uma, solução passando por qualquer ponto (x,t) para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

A existência de soluções deste sistema se dá pela continuidade do campo vetorial. Necessitaremos mostrar a unicidade. De 2) temos

$$\frac{|X(x,t) - X(0,t)|}{|x|} \leqslant 1,$$

para valores de $|x|$ suficientemente pequeno.

Seja $\varphi(s;x,t)$ a solução do sistema com $\varphi(0;x,t) = (x,t)$. Observe que uma solução que passa por $(0,t)$ é dada por $\varphi = \varphi(s;0,t) = (0, s+t)$. Afirmamos que esta é a única solução passando por $(0,t)$. Suponhamos que $\varphi_1 = \varphi_1(s;0,t)$ seja outra solução passando pela origem. Então

$$\frac{d[\varphi_1(s) - \varphi(s)]}{ds} = X[\varphi_1(s)] - X[\varphi(s)],$$

logo $\varphi_1(s) - \varphi(s) = \int_0^s [X[\varphi_1(r)] - X[\varphi(r)]]dr$.

Escrevemos $\varphi_1(s;0,t) = (x(s), t(s))$. Então

$$\begin{aligned} |x(s)| \leqslant |\varphi_1(s) - \varphi(s)| &\leqslant \int_0^s |X[\varphi_1(r)] - X[0, r+t]|\, dr \\ &= \int_0^s |X[x(r), t(r)] - X[0, t(r)]|\, dr \\ &\leqslant \int_0^s |x(s)| dr, \end{aligned}$$

ou seja, $|x(s)| \leqslant \int_0^s |x(r)| dr$. Pela desigualdade de Gronwall temos $x(s) = 0$. Assim $\varphi_1(s;0,t) = (0, t(s))$.

Como $\frac{d[\varphi_1(s) - \varphi(s)]}{ds} = X(0, t(s)) - X(0, s+t) = 0$, temos $\frac{d(t(s) - (s+t))}{ds} = 0$. Assim $t(s) - (s+t) = \mathit{constante}$. Notemos que $t(s) = t$ para $s = 0$. Segue que $t(s) = s + t$. Portanto, $\varphi_1 = \varphi$.

Agora, se $x \neq 0$, existe uma vizinhança de x tal que $|X(x,t) - X(0,t)| < |x|$. Suponhamos que existe uma outra solução ξ tal que $\xi(0) \neq \varphi(0)$. Então $\xi(s) \neq \varphi(s), \forall s \geqslant 0$.

Defina a função de Liapounov V por $V(x,t;s) = e^{2s}|(x,t) - \varphi(s)|^2$.

Para todo (x,t), $V(x,t;s) \geqslant 0$. Assim $V(x,t;s) = 0 \Leftrightarrow (x,t) = \varphi(s)$. Além disso, seja $\alpha = \xi(s) - \varphi(s)$.

Temos que

$$\frac{dV(\xi(s),s)}{ds} = 2e^{2s}|\alpha|^2 + 2e^{2s}\langle \alpha, \frac{d\alpha}{ds}\rangle \geqslant 2e^{2s}|\alpha|\{|\alpha| - |\frac{d\alpha}{ds}|\}.$$

Mas por suposição, $|\alpha| - |\frac{d\alpha}{ds}| = |\xi(s) - \varphi(s)| - |X(\xi(s)) - X(\varphi(s))| > 0$ sempre que ξ, φ forem ambos definidos e $|\xi - \varphi|$ suficientemente pequeno. Assim, $V(\xi(s), s)$ nunca pode ser zero, provando a unicidade.

Assim só pode haver no máximo uma solução passando por qualquer ponto (x, t), para $0 \leqslant |x| < \epsilon$ e $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Por 4) temos que $\langle X(\varphi(s), (0, 1))\rangle > 0$. Assim obtemos

$$\left\langle \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dt}{ds}\right), (0,1) \right\rangle \Rightarrow \frac{dt}{ds} > 0.$$

Logo a componente t de qualquer solução $\varphi(s; x, 0)$ cresce monotonamente com s para todo x numa vizinhança de 0. Portanto, $\varphi(s; x, 0)$ encontra um hiperplano $t = s$ num único ponto $h(x)$. A função $x \to h(x)$ é um homeomorfismo.

Note que para $\varphi(s) = \varphi(s; x, t)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{dF(\varphi(s))}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right), \left(\frac{dx_1}{ds}, \cdots, \frac{dx_n}{ds}, \frac{dt}{ds}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right), X(\varphi(s)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right), (0,1) - |\mathrm{grad}F|^{-2}P(x)\mathrm{grad}F \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right), (0,1) \right\rangle - \left\langle \mathrm{grad}F, |\mathrm{grad}F|^{-2}P(x)\mathrm{grad}F \right\rangle \\
&= P(x) - P(x)|\mathrm{grad}F|^{-2}\left\langle \mathrm{grad}F, \mathrm{grad}F \right\rangle \\
&= P(x) - P(x)|\mathrm{grad}F|^{-2}|\mathrm{grad}F|^2 = P(x) - P(x) = 0.
\end{aligned}$$

Quando $x = 0$, temos que $\frac{dF(\varphi(s))}{ds} = 0, s \geqslant 0$, pois $F(\varphi(s)) = F(0, s + t) = 0$.

Chegamos à conclusão que $F(\varphi(s)) = \mathrm{constante}$ ao longo de cada solução φ.

Para a solução $\varphi(s) = \varphi(s; x, 0)$ temos $\varphi(0) = (x, 0)$ e $\varphi(s_1) = (h(x), 1)$ para algum $s_1 > 0$. Portanto, obtemos que $f(x) = F(x, 0) = F(\varphi(0)) = F(\varphi(s_1)) = F(h(x), 1) = g(h(x))$.

∎

Lema 2. *Se o* $r-$*jato* $j^r f$ *é* C^0-*suficiente, então* $j^r f$ *é* $\nu-$*suficiente.*

Demonstração: Consideremos o $j^r f$ de uma função analítica f. Se $j^r f$ é C^0-suficiente, então para todo germe g tal que $j^r g = j^r f$, existe um homeomorfismo local h, tal que $f(x) = g(h(x))$. Tomando $h|_{f^{-1}(0)}$ temos que h está bem definida. Com efeito, note que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, pois $f(0) = 0$. Além disso, se $x \in f^{-1}(0)$ então $f(x) = 0$. Assim, $g(h(x)) = f(x) = 0$, ou seja, $h(x) \in g^{-1}(0)$. Portanto, $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$, o que equivale dizer que $j^r f$ é $\nu-$suficiente.

$\blacksquare$

Lema 3. *Seja* $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n, 1)$ *tal que* $\mu(j^r f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(j^r f)} = \infty$*. Então para todo* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $g \in \mathcal{O}_n$ *tal que* $j^r g = j^r f$ *e* $k \leqslant \mu(g) < \infty$*. Em particular existem* $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_n$ *tais que* $j^r g_1 = j^r g_2$ *e* $\mu(g_1) < \mu(g_2) < \infty$

Demonstração: Definimos $\alpha_s := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(j^r f)+\mathfrak{M}^{s+1}}$, onde $J(j^r f) = \left\langle \frac{\partial j^r f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial j^r f}{\partial x_n} \right\rangle$ e $\mathfrak{M}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_n$. Tem-se que $\alpha_s \to \infty$ quando $s \to \infty$.

Com efeito, notemos que $\mathfrak{M} \supsetneq \mathfrak{M}^2 \supsetneq \mathfrak{M}^3 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{M}^s \supsetneq \mathfrak{M}^{s+1} \supsetneq \cdots$. Esta sequência estrita nos apresenta a sequência

$$J(j^r f) + \mathfrak{M} \supset J(j^r f) + \mathfrak{M}^2 \supset J(j^r f) + \mathfrak{M}^3 \supset \cdots \supset J(j^r f) + \mathfrak{M}^s \supset J(j^r f) + \mathfrak{M}^{s+1} \cdots .$$

Mostraremos que as inclusões acima são estritas.

Com efeito, se existisse $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{M}^s + J(j^r f) = \mathfrak{M}^{s+1} + J(j^r f)$, então

$$\mathfrak{M}^s \subset \mathfrak{M}^s + J(j^r f) \subset \mathfrak{M}\mathfrak{M}^s + J(j^r f).$$

Pelo Teorema de Nakayama temos que $\mathfrak{M}^s \subset J(j^r f)$, logo $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(j^r f)} < \infty$, ou seja, $\mu(j^r f) < \infty$, contradizendo a nossa hipótese.

Assim, para todo $s \in \mathbb{N}$ temos que $\mathfrak{M}^s + J(j^r f) \supsetneq \mathfrak{M}^{s+1} + J(j^r f)$. Logo, concluímos que a sequência (α_s) é uma sequência de números naturais monótona crescente, isto é,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_s < \alpha_{s+1} < \cdots .$$

Portanto, $\lim_{s\to\infty} \alpha_s = \infty$.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, existe $\varphi \in \mathfrak{M}^{s_o+2}$, onde $s_o \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha_{s_o} \geqslant k$ e $\mu(j^r f + \varphi) < \infty$. Então para $g = j^r f + \varphi$ temos $J(g) = J(j^r f) + J(\varphi) \subset J(j^r f) + \mathfrak{M}^{s+1}$. Assim

$$k \leqslant \alpha_{s_o} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(j^r f) + \mathfrak{M}^{s_o+1}} \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(g)} < \infty.$$

Em particular, dado $k_1 \in \mathbb{N}$ existe g_1 tal que $j^r g_1 = j^r f$ e $k \leqslant \mu(g_1) < \infty$. tomando $k_2 = \mu(g_1) + 1$ existe g_2 tal que $j^r g_2 = j^r f$ e $k_2 \leqslant \mu(g_2) < \infty$. Logo , existem g_1 e g_2 tais que $j^r g_1 = j^r g_2$ e $\mu(g_1) < \mu(g_2) < \infty$.

■

Lema 4. **[Teorema de Teissier]** *Sejam* $f, g \in \mathcal{O}_n$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $\mu(f) < \infty$, $\mu(g) < \infty$. *Suponhamos que exista um homeomorfismo local* $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *tal que* $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$. *Então* $\mu(f) = \mu(g)$.

Demonstração: [12] Teorema 3.3.

■

Lema 5. *Se* $j^r f$ *é* ν*−suficiente em* $\mathcal{O}_n$*, então para todo* $g \in \mathcal{O}_n$ *tal que* $j^r g = j^r f$*, tem-se* $\mu(g) = \mu(j^r f)$.

Demonstração: Pelos lemas 3 e 4, temos que se $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n, 1)$ é ν−suficiente, então $\mu(j^r f) < \infty$. Com efeito, pelo Lema 3, existiriam g_1 e g_2 tais que $\mu(g_1) < \mu(g_2) < \infty$ e $j^r g_1 = j^r g_2 = j^r f$. Como $j^r f$ é ν−suficiente, $f^{-1}(0)$ é topologicamente equivalente a $g_1^{-1}(0)$, e a $g_2^{-1}(0)$. Consequentemente,$g_1^{-1}(0)$ e $g_2^{-1}(0)$ são topologicamente equivalentes. Pelo Lema 4, teríamos $\mu(g_1) = \mu(g_2)$, o que é uma contradição. Logo, $\mu(j^r f) < \infty$.

Tomemos $g \in \mathcal{O}_n$ com $j^r g = j^r f$. Queremos mostrar que $\mu(g) = \mu(j^r f)$. Como $j^r f$ é ν−suficiente basta mostrarmos que $\mu(g) < \infty$. Suponhamos que $\mu(g) = \infty$ e tomemos $s \geqslant r$. O s−jato $j^s g$ é ν−suficiente em $\mathcal{O}_n$ pois se h é tal que $j^s h = j^s g$, como $s \geqslant r$ temos que $j^r(j^s h) = j^r(j^s g)$, ou seja, $j^r h = j^r g = j^r f$. Como $j^r f$ é ν−suficiente, tem-se que $h^{-1}(0), g^{-1}(0)$ e $f^{-1}(0)$ são topologicamente equivalentes. Logo, $j^s g$ é ν−suficiente.

Portanto $\mu(j^s g) < \infty$ de onde aplicamos novamente o Lema 4, tendo para todo $s \geqslant r, \mu(j^s g)) = \mu(j^r f)$. Isso implica que $\mu(g) < \infty$. Portanto, pelo Lema 4 tem-se que $\mu(g) = \mu(j^r f)$.

■

Observação: Suponhamos que para todo $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $j^r g = j^r f$ tenhamos $\mu(g) = \mu(j^r f)$. Então, como $J^{r+1}_{\mathbb{C}}(n, 1) \subset \mathcal{O}_n$ temos para todo $g \in J^{r+1}_{\mathbb{C}}(n, 1)$ as mesmas propriedades acima.

Consideremos agora a projeção natural $\pi : J^{r+1}_{\mathbb{C}}(n,1) \to J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$, $\pi(j^{r+1}f) = j^r f$. Temos que π é uma transformação linear. Seja $N = \mathrm{dimKer}(\pi)$.

Identificamos o espaço dos polinômios homogêneos de n variáveis complexas de grau $r+1$ com o espaço afim $\mathbb{C}^N$ e para $a = (a_\alpha) \in \mathbb{C}^N$ definimos $H_a(x) = \sum_{|\alpha|=r+1} a_\alpha x^\alpha$ o polinômio correspondente.

Lema 6. *Sejam $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ e B uma bola em $\mathbb{C}^N$. Suponhamos que para um $|x|$ positivo e suficientemente próximo de 0, e para todo $a \in B$, $\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x) \neq 0$. Então, para todo $a \in B$ existe $c_a > 0$ tal que $|\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x)| \geqslant c_a |x|^r$ para $|x|$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Seja $a \in B$ e suponhamos que não aconteça $|\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x)| \geqslant c_a|x|^r$. Desta forma, existe uma sequência $x^{(k)} \to 0, x^{(k)} \neq 0$ tal que $|\mathrm{grad}\,(j^r f + H_a)\,(x^{(k)})| < c_a|x^{(k)}|^r$.

Consideramos (L_k) uma sequência onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $L_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma transformação linear ortogonal tal que $L_k\left(\frac{x^{(k)}}{|x^{(k)}|}\right) = (1, 0, \cdots, 0)$.

Pondo $L_k\left(\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)})\right) = (\theta_{k_1}, \cdots, \theta_{k_n})$, temos, da ortogonalidade de L_k, a desigualdade

$$\begin{aligned} |\theta_{k_i}| &\leqslant |(\theta_{k_1}, \cdots, \theta_{k_n})| \\ &= \left|L_k\left(\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)})\right)\right| \\ &= |\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)})| < c_a|x^{(k)}|^r, i = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Definimos $H_{b_k} := |x^{(k)}|^{-r} G_k \circ L_k$, onde

$$G_k = \frac{\theta_{k_1}}{r+1} x_1^{r+1} + \sum_{i=2}^{n} \theta_{k_i} x_1^r x_i.$$

é polinômio de grau $r+1$.

Assim,

$$\mathrm{grad}G_k = \left(\frac{\partial G_k}{\partial k_1}, \frac{\partial G_k}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial G_k}{\partial x_n}\right) = \left(\theta_{k_1} + r\theta_{k_2} x_1^{r-1} x_2 + \cdots + \theta_{k_n} r x_1^{r-1} x_n, \theta_{k_2} x_1^r, \cdots, r\theta_{k_n} x_1^r\right).$$

Aplicando em $(1, 0, \cdots, 0)$ teremos

$$\mathrm{grad}G_k(1, 0, \cdots, 0) = (\theta_{k1}, \cdots, \theta_{kn}) = L_k\left(\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^k)\right).$$

Observemos ainda que

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}H_{b_k}(x^{(k)}) &= \mathrm{grad}H_{b_k}\left(\frac{x^{(k)}}{|x^k|}|x^{(k)}|\right)\\
&= |x^{(k)}|^r \mathrm{grad}H_{b_k}\left(\frac{x^{(k)}}{|x^k|}\right)\\
&= |x^{(k)}|^r|x^{(k)}|^{-r}\mathrm{grad}(G_k \circ L_k)\left(\frac{x^{(k)}}{|x^k|}\right)\\
&= \mathrm{grad}(G_k \circ L_k)\left(\frac{x^{(k)}}{|x^k|}\right).
\end{aligned}$$

Afirmação: $\mathrm{grad}(G_k \circ L_k) = L_k^T(\mathrm{grad}G_k)(L_k)$.

Com efeito, denotando a matriz da transformação L_k por (a_{ij}), teremos que $\mathrm{grad}(G_k \circ L_k)(x)$, num ponto x é dado por

$$\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial G}{\partial x_l}(L_k(x))a_{l1}, \cdots, \frac{\partial G}{\partial x_l}(L_k(x))a_{ln}\right).$$

Se expressarmos este gradiente em forma de matriz teremos que

$$\mathrm{grad}(G_k \circ L_k) = (a_{ji})(\mathrm{grad}G_k)(L_k(x)) = L_k^T(\mathrm{grad}G_k)(L_k).$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}H_{b_k}(x^{(k)}) &= \mathrm{grad}(G_k \circ L_k)\left(\frac{x^{(k)}}{|x^k|}\right)\\
&= L_k^T(\mathrm{grad}G_k)\left(L_k\left(\frac{x^{(k)}}{|x^{(k)}|}\right)\right)\\
&= L_k^T(\mathrm{grad}G_k(1, 0, \cdots, 0))\\
&= L_k^T(\theta_{k_1}, \cdots, \theta_{k_n})\\
&= L_k^T L_k(\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)}))\\
&= \mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)}).
\end{aligned}$$

Desta forma encontramos uma sequência $(b_k) \in \mathbb{C}^N$ tal que $\mathrm{grad}H_{b_k}(x^{(k)}) = \mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x^{(k)})$ e, de $|\theta_{k_i}| < c_a|x^{(k)}|^r$, temos $b_k \to 0$. Assim, $\mathrm{grad}(j^r f + H_{a-b_k})(x^{(k)}) = 0$, para $a - b_k \in B$ e k suficientemente grande, o que contradiz a nossa hipótese.

Portanto, para todo $a \in B$ existe $c_a > 0$ tal que $|\mathrm{grad}(j^r f + H_a)(x)| \geqslant c_a|x|^r$ para $|x|$ suficientemente pequeno.

■

Lema 7. *Seja* $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$. *Suponhamos que para todo* $a \in \mathbb{C}^N$ *existe* $c_a > 0$ *tal que* $|grad(j^r f + H_a)(x)| \geqslant c_a |x|^r$ *para valores de* $|x|$ *suficientemente pequeno. Então existem* $c, \delta > 0$ *tais que* $|grad j^r f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$, *para* x *numa vizinhança de* 0.

Demonstração: Observamos que na demonstração do Lema 7, a desigualdade pode ser feita para o expoente $r - \delta$, onde $\delta > 0$. Logo, tomando $a = 0 \in \mathbb{C}^N$, existirão $c, \delta > 0$ tais que $|grad j^r f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$, para x numa vizinhança de 0. ■

Lema 8. *Seja* $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$. *Suponhamos que para todo* $g \in J^{r+1}_{\mathbb{C}}(n,1)$ *tal que* $j^r g = j^r f$, *tem-se que* $\mu(g) = \mu(j^r(f))$. *Então existem* $c, \delta > 0$ *tais que* $|grad j^r f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$ *para* x *próximo da origem.*

Demonstração: A hipótese implica que $\mu(j^r f) < \infty$, pois para um $j^r f \in J^r_{\mathbb{C}}(n,1)$ fixado $\mu(j^r f + H_a) < \infty$ para $a \in \mathbb{C}^N$. Tomando $g = j^r f + H_a$ temos que $j^r g = j^r f$, logo $\mu(j^r f) = \mu(g) = \mu(j^r f + H_a) < \infty$.

Pelos lemas 7 e 8 basta mostrar que para todo $a_o \in \mathbb{C}^N$ e toda bola $B(a_o, \gamma)$ de $\mathbb{C}^N$ de centro a_o e de raio suficientemente pequeno γ, existe $\epsilon > 0$ tal que $grad(j^r f + H_a)(x) \neq 0$ para todo $a \in B(a_o, \gamma)$ e todo $x, 0 < |x| < \epsilon$.

Escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $0 \in \mathbb{C}^n$ seja o único ponto crítico de $j^r f + H_{a_o}$ na bola $|x| < \epsilon$. Pelo Teorema da continuidade das raízes de um polinômios podemos tomar $\gamma > 0$ tal que $grad(j^r f + H_a)(x) \neq 0$ para $|x| = \epsilon$ e $a \in B(a_0, \gamma)$.

Por construção, para cada $a \in B(a_o, \gamma)$, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{C}^n : grad(j^r f + H_a)(x) = 0; |x| \leqslant \epsilon\}$$

é finito.

O número de zeros de $grad(j^r f + H_a)$ em $|x| \leqslant \epsilon$ (contando com sua multiplicidade) é igual ao grau da aplicação

$$\varphi_a : S_\epsilon \to S_1, x \mapsto \frac{grad(j^r f + H_a)(x)}{|grad(j^r f + H_a)(x)|},$$

onde $S_\alpha = \{x \in \mathbb{C}^n; |x| = \alpha\}$ **[11]** **[Lema B2, p. 112]**.

Evidentemente todos os φ_a são homotópicos. Basta considerar a homotopia $H : S_\epsilon \times [0,1] \to S_1$, dada por $H(x,t) = \frac{\varphi_a + t(\varphi_b - \varphi_a)}{|\varphi_a + t(\varphi_b - \varphi_a)|}$, e por consequência, a hipótese de que o grau de $\varphi_a = \mu(j^r f + H_a) = constante$ em $\mathbb{C}^N$ implica que para todo $a \in B(a_o, \gamma)$ o jato $j^r f + H_a$, não tem pontos críticos em $0 < |x| \leqslant \epsilon$.

Logo, para todo $a_o \in \mathbb{C}^N$ e toda bola $B(a_o, \gamma)$ de $\mathbb{C}^N$ de centro a_o e de raio suficientemente pequeno γ, existe $\epsilon > 0$ tal que $grad(j^r f + H_a)(x) \neq 0$ para todo $a \in B(a_o, \gamma)$ e todo $x, 0 < |x| < \epsilon$.

Portanto, pelos Lemas 7 e 8 existem $c, \delta > 0$ tais que $|gradj^r f(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$ para x próximo da origem.

■

Teorema 3.1.1: *Seja* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *um germe analítico, então o* r*-jato de* f *é* C^0*-suficiente se, e somente se, existem* $c, \delta > 0$ *tais que*

$$|gradf(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta},$$

para todo x *numa vizinhança aberta de* 0 *em* $\mathbb{C}^n$*.*

Demonstração : Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe analítico. Se o r–jato $j^r f$ é C^0–suficiente então, pelo **Lema 2**, o $j^r f$ é ν–suficiente. Consequentemente, pelo **Lema 6**, para todo $g \in J^{r+1}_{\mathbb{C}}(n, 1)$ tal que $j^r g = j^r f$ tem-se que $\mu(g) = \mu(j^r f)$. Aplicando **Lema 7**, **Lema 8** e **Lema 9** para $g = j^r f + H_a$ onde $a = 0 \in \mathbb{C}^N$, então existem c e δ tais que $|gradf(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$ para todo x numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^n$.

Reciprocamente, o **Lema 1** implica que se f satisfaz a desigualdade $|gradf(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$, então $j^r f$ é C^0–suficiente.

■

Exemplo: Queremos mostrar que o jato analítico $f(x, y) = x^3 + 3xy^{2k}$ é C^0–suficiente.

Precisamos mostrar que existe um inteiro r tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \geqslant c(|x| + |y|)^{r-\delta},$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x - iy^k)(x + iy^k)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 6kxy^{2k-1}$.

Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; \frac{|x|}{|y|} < \rho\}$ para algum $\rho > 0$. Fora do conjunto S não há problema; a desigualdade é satisfeita mesmo para $r = 3$.

Dentro de S consideraremos os subconjuntos

$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x - iy^k| < w|y|^k\}$,

$H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| < w|y|^k\}$

e $H_3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x + iy^k| < w|y|^k\}$,

onde $w > 0$.

Afirmamos que H_1, H_2 e H_3 são dois a dois disjuntos para w suficientemente pequeno. Com efeito, $H_1 \cup H_3 \subset H$, onde $H = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; (1 - w)|y|^k < |x| < (1 + w)|y|^k\}$.

Se $(x, y) \in H_1 \Rightarrow |x - iy^k| < w|y|^k$. Assim

$$\begin{aligned} |y|^k - |x| &= |iy^k| - |x| \\ &\leqslant |iy^k - x| \\ &= |x - iy^k| < w|y|^k. \end{aligned}$$

Logo $(1 - w)|y|^k < |x|$. Assim $(x, y) \in H$.

Se $(x, y) \in H_3 \Rightarrow |x + iy^k| < w|y|^k$. Assim

$$\begin{aligned} w|y|^k > |x + iy^k| &\geqslant |x| - |iy^k| \\ &= |x| - |y|^k. \end{aligned}$$

Logo $|x| < (1 + w)|y|^k$. Assim $(x, y) \in H$.

Além disso, $H_2 \cap H = \emptyset$ para w suficientemente pequeno. Pois se tivéssemos $(x, y) \in H_2 \cap H$ então $(1 - w)|y|^k < |x|$ e $|x| < w|y|^k$, o que é uma contradição para w suficientemente pequeno. Logo $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $H_3 \cap H_2 = \emptyset$.

Agora, observe que se $(x, y) \in H_1 \cap H_3$, então $|iy^k - x| < w|y|^k \leqslant |x|$ e $|iy^k + x| < w|y|^k \leqslant |x|$, onde usamos o fato de que $(x, y) \notin H_2$. Claramente as desigualdades acima nos dá uma contradição, pois teremos $2|x| = |2x| = |x+x| = |x-(-x)| = |x-iy^k+iy^k-(-x)| \leqslant |x - iy^k| + |x + iy^k| < |x| + |x| = 2|x|$. Logo $H_1 \cap H_3 = \emptyset$.

Portanto, qualquer ponto $(x, y) \in S$ está no máximo em um dos subconjuntos H_1, H_2 e H_3. Assim temos que

ou $(x, y) \in H_2$, tendo

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 3|x - iy^k||x + iy^k| \geqslant 3w^2|y|^{2k} \geqslant 3w^2|y|^{3k-1}$,

ou $(x, y) \notin H_2$, implicando que

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 6k|x||y|^{2k-1} \geqslant 6kw|y|^{3k-1} \geqslant 3w^2|y|^{3k-1}$.

Além disso, em S temos $|x| < \rho|y|$.

Portanto

$$c(|x| + |y|)^{r-\delta} \leqslant \epsilon(1 + \rho)^{r-\delta}|y|^{r-\delta} \leqslant 3w^2|y|^{3k-1}$$

se escolhermos $r = 3k$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $0 < \delta < 1$.

Segue que se $(x, y) \in H_2$ então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \geqslant 3w^2|y|^{3k-1} \geqslant c(|x| + |y|)^{r-\delta}$$

, ou se $(x, y) \notin H_2$ então

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \geqslant \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \geqslant 3w^2|y|^{3k-1} \geqslant c(|x| + |y|)^{r-\delta}$$

numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Portanto, vemos que jato analítico $f(x, y) = x^3 + 3xy^{2k}$ é C^0−suficiente.

■

Bibliography

[1] J.Bochnak, W. Kucharz, *Sur les germes d'applications differentiables à singularités isolées*. Trans. Amer. Math. Soc. 252(1979),115-131

[2] C. T. Kuo. *On* C^0-*sufficiency of jets of potential functions*. Topology 8(1969),167-171

[3] S. H. Chang and Y. C. Lu. *On* C^0-*sufficiency of complex jets*. Canad. J.Math. 25 (1973), 874-880

[4] Atyah, M. F. and MacDonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading-Massachussets1969.

[5] Dimca, A. *Topics on Real and Complex Singularities: an introduction.*Wiesbaden - Vieweg, 1987

[6] Gibson, C. G. *Singular Points of Smooth Mappings.*Research Notes in Mathematics,25

[7] Carles, A. B. *A Method to Estimate the Degre of* C^0-*suficiency of Analytic Functions* Experimental Mathematics, vol 11,81-85.2002

[8] Garcia, A. and Lequain, Y. *Elementos de Álgebra* Projeto Euclides, Rio de Janeiro:Impa, 2008.

[9] Tello, J. M. S. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias* (Projeto Euclides), IMPA, 1979.

[10] J. Bochnak and S. Lojasiewicz.*A converse of the Kuiper-Kuo theorem* In Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium, I (1969/70), Lecture Notes in Math. 192,pp. 254?261, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[11] Milnor, J. *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, no. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1968.

[12] D. T. Lê, *Topologie des singularités*, Singularité à Cargèse, Astérisque 7 et 8, Paris, 1973.