



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **Teoria de Homologia e Aplicações**

**Paulo Sérgio Farias Magalhães Júnior**

**Teresina - 2021**

**Paulo Sérgio Farias Magalhães Júnior**

**Dissertação de Mestrado:**

**Teoria de Homologia e Aplicações**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araujo Sousa

**Teresina - 2021**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Teoria de Homologia e Aplicações*

Paulo Sérgio Farias Magalhães Júnior

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 26 de Julho de 2021.

**Banca Examinadora:**

*Paulo Alexandre A. Sousa*  
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Orientador

*Newton L. Santos*  
Prof. Dr. Newton Luis Santos - UFPI

*Antonio Kelson V da Silva*  
Prof. Dr. Antonio Kelson Vieira da Silva - UFPI

*Alexandre César Gurgel Fernandes*  
Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes - UFC



FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN  
Serviço de Processamento Técnico

M189t Magalhães Júnior, Paulo Sérgio Farias.  
Teoria de homologia e aplicações / Paulo Sérgio Farias  
Magalhães Júnior. – 2021.  
97 f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Teresina, 2021.

“Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa. ”

1. Topologia Algébrica. 2. Teoria da Invariância da  
Dimensão. 3. Teoria do Ponto Fixo. I. Sousa, Paulo Alexandre  
Araújo. II. Título.

CDD 514.2

*Dedico este trabalho a minha amada mãe, Maria Aparecida.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me guiar até aqui e por permitir realizar este sonho. Agradeço a minha família, minha mãe Maria Aparecida, meu pai Paulo Sérgio, meus irmãos Pedro Paulo e Priscilla, minhas avós Maria da Conceição e Lina Nascimento, minhas tias Maria das Graças e Maria da Conceição e minha segunda mãe Ana Cleia, por todo o apoio durante todos esses anos tanto na minha formação acadêmica quanto na parte humana e por todos os seus esforços para que eu pudesse ter o privilégio de me concentrar apenas nos meus estudos por tanto tempo.

Agradeço em especial a minha mãe por tudo que ela fez por mim durante esses 22 anos, por todo empenho em minha criação, todo amor e conhecimento, por todos os momentos de carinho e de felicidade, por sempre me ensinar o que é certo e a ser uma pessoa animada, alegre e engraçada. Agradeço também em especial aos meus irmãos que de forma direta ou indiretamente sempre estiveram comigo para conversar, para me dar dicas do que fazer e de como fazer as coisas, sempre com muito humor e palhaçadas.

Agradeço a todos os professores do departamento de matemática da UFPI que me ajudaram durante essa caminhada na graduação e mestrado, aos professores Roger Peres, Halysom Baltazar, Kelton, Liane, Jeferson, Alex Sandro, João Carlos, Cícero Aquino, Wilson e Barnabé por terem ministrado disciplinas para mim durante a graduação e ou o mestrado.

Agradeço aos professores Gleison Nascimento que sempre me motivou e me ajudou no que precisava, sempre muito descontraído, atencioso comigo e que é um exemplo de professor a ser seguido por mim, Ítalo Dowell que me ajuda nos estudos desde o terceiro período, me aguentando e me dando muito apoio juntamente com muito humor, Newton

Luis que sempre estava disponível para uma conversa e sempre me encorajou a seguir em frente e me ajudou com alguns problemas de topologia, Ailton Nascimento, que sempre estava muito animado com os meus projetos e sempre buscava saber como eu estava, Leandro Pessoa que me ajudou a estudar para a seleção do mestrado do seu jeito sempre humorado, às vezes não compreendido, mas que sempre foi muito atencioso e gente boa.

Agradeço em especial ao meu orientador de mestrado Paulo Alexandre, meu segundo pai acadêmico que infelizmente por conta da pandemia não pude desfrutar de está junto dele e aproveitar os momentos que normalmente teríamos, que teve a coragem de me aceitar como orientando e que sempre esteve disponível para me ajudar com o que quer que fosse, que sempre me animava para estudar, aceitou a minha proposta de buscar uma dissertação em topologia e se esforçou muito para que isso fosse possível, um exemplo de professor e de pessoa que admiro muito.

Agradeço em especial também ao meu orientador de graduação Antonio Kelson, meu primeiro pai acadêmico, que me ajudou e me incentivou a estudar desde o começo do curso, literalmente, ele esteve comigo desde o primeiro dia de aula, visto que foi o primeiro professor que tive na graduação, e logo em seguida no segundo período me aceitou como orientando, me ajudando sempre, tanto nos estudos como na vida, me passando ensinamentos que guardarei para sempre e com toda paciência e bom humor foi me moldando para conseguir está onde estou hoje, foi de fato um pai para mim durante a graduação e um pouco mais de longe durante o mestrado devido a pandemia.

Agradeço a minha grande amiga Raquel Lemos, que esteve comigo desde os estudos para entrar no mestrado, passando comigo por todas as dificuldades durante o mestrado e sendo minha fiel companheira em todos os momentos desse curso de mestrado, tanto nos estudos quanto nos problemas do dia a dia, sempre muito engraçada, dedicada, focada, simpática e tranquila, me aguentou por todo esse tempo com muitas risadas, muito obrigado minha amiga, você é uma inspiração para mim.

Agradeço a Caroline Mithieli que sempre esteve comigo me ajudando em todos os momentos felizes e tristes desde 2019 até o início desse ano, sempre esteve presente, mesmo

de longe e sempre me dando carinho, amor, muito incentivo e me ensinando muitas coisas que guardarei comigo até o resto da vida, uma pessoa que é luz e que é inspiração para mim enquanto pessoa. Foi peça fundamental para ser quem sou hoje.

Agradeço a Camila Ciribely que desde 2018 vem me ajudando sempre que estou em momentos difíceis na vida, pode não gostar de matemática e nem está inserida no meu meio matemático mas talvez por isso seja tão importante, foi fundamental para todas as minhas reconstruções desde 2018, sempre comigo, mesmo de longe, e às vezes muito ocupada, mas tentando fazer o possível para não deixar eu desanimar e sempre me mostrando que existem pessoas mais loucas por estudos do que eu, no caso ela mesmo. Sempre me incentivando a estudar e continuar nesse caminho acadêmico.

Agradeço aos meus amigos de estudos Alan e Lucas que são lendas da matemática e estão comigo desde 2019 do verão em análise real, que mesmo de longe estamos sempre discutindo questões, assuntos, trocando conhecimento e tentando fazer essa caminhada de pós-graduação juntos.

Agradeço aos meus amigos de graduação e mestrado, Gabriel, João Victor, Jeferson Victor, Fauster, Suerlan, Carminha, Dalila, Dieme, Francimar, Sillas, por toda ajuda com as disciplinas e com as dificuldades que enfrentamos durante essa caminhada.

Agradeço aos professores Antonio Kelson, Newton Luis e Alexandre César por terem aceitado o convite de participar da minha banca.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.



“Matemáticos são máquinas de transformar café em teoremas.”

Paul Erdős.

# Resumo

Nesta dissertação, estudaremos algumas noções da área de topologia algébrica, com enfoque em homologia simplicial. Apresentaremos alguns resultados de fundamental importância da área de álgebra homológica, calcularemos os grupos de homologia de algumas pseudovarieties e como aplicação da teoria estudada provaremos alguns teoremas clássicos, como por exemplo o teorema de invariância da dimensão dos espaços euclidianos por homeomorfismos e o Teorema dos Pontos Fixos de Lefschetz.

**Palavras-Chave:** Homologia simplicial; Invariância da dimensão; Teorema dos Pontos Fixos de Lefschetz.

# Abstract

In this dissertation, we will study some notions in the area of algebraic topology, focusing on simplicial homology. We will present some results of fundamental importance in the area of Homological algebra, we will calculate the homology groups of some pseudo-manifolds and as applications of the theory studied we will prove some classical theorems, such as the invariance Theorem of the dimension of Euclidean spaces by homeomorphisms and the Lefschetz Fixed Point Theorem.

**Keywords:** Simplicial homology; Dimension invariance; Lefschetz Fixed Point Theorem

# Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Noções de simplexos. . . . .	5
1.2 Noções de grupo de homologia . . . . .	22
<b>2 Cálculo de alguns grupos de homologia</b>	<b>41</b>
<b>3 O grupo de homologia como invariante topológico</b>	<b>50</b>
<b>4 Aplicações da teoria de Homologia</b>	<b>69</b>
Referências Bibliográficas	85

# Lista de Figuras

1.1	Simplexo de dimensão 2 . . . . .	7
1.2	Exemplos de simplexos . . . . .	8
1.3	Simplexos propriamente ligados . . . . .	9
1.4	Simplexos não propriamente ligados . . . . .	9
1.5	Exemplo de complexo . . . . .	10
1.6	Homeomorfismo da esfera com o tetraedro . . . . .	12
1.7	Homeomorfismos dos simplexos com o espaço euclidiano . . . . .	13
1.8	Exemplo de operador bordo em um complexo . . . . .	20
1.9	Toro e Garrafa de Klein . . . . .	32
1.10	Triangulação do Toro . . . . .	33
1.11	Faixa de Möebius . . . . .	34
1.12	Triangulação da Faixa de Möebius . . . . .	34
1.13	Triangulação do Toro com orientação . . . . .	35
1.14	Triangulação da Faixa de Möebius . . . . .	35
1.15	Triangulação da Faixa de Möebius com orientação . . . . .	35
1.16	Outra triangulação da Faixa de Möebius . . . . .	36
1.17	Outra triangulação da Faixa de Möebius com orientação . . . . .	36
1.18	Outra triangulação da Faixa de Möebius com outra orientação . . . . .	36
1.19	Triangulação do plano projetivo . . . . .	37
1.20	Triangulação do plano projetivo com orientação . . . . .	37
1.21	Triangulação do plano projetivo com outra orientação . . . . .	38
2.1	Triangulação da Faixa de Möebius . . . . .	41
2.2	Triangulação da esfera . . . . .	45
2.3	Triangulação do plano projetivo . . . . .	47

---

3.1	Diagrama da sequência de homomorfismos . . . . .	50
3.2	Diagrama com uma sequência longa entre cadeias . . . . .	51
3.3	Mais alguns complexos . . . . .	53
3.4	Subdivisão baricêntrica . . . . .	56
3.5	Homotopia entre funções . . . . .	58
3.6	Exemplo complexo simplicial . . . . .	59
3.7	Homotopia entre uma aplicação $f$ e uma constante . . . . .	60
3.8	Composição de aplicações $Sd$ . . . . .	61
3.9	Ideia da prova da Observação 9 . . . . .	63
3.10	Triangulação da faixa de Möebius menos um disco . . . . .	68
4.1	Diagrama de aplicações algébricamente homotópicas . . . . .	76
4.2	Decomposição de um simplexo cartesiano com um intervalo . . . . .	77
4.3	Diagrama do Lema de Hopf . . . . .	80

# Introdução

A Topologia Algébrica é um ramo bastante interessante da Matemática, que está na intersecção da Álgebra com a Geometria, e possui aplicações em diversas áreas da Matemática, tais como Geometria Diferencial, Teoria dos Nós e também na Matemática Aplicada como, por exemplo, na Computação Gráfica. A Topologia Algébrica tem como objetivo geral determinar a natureza dos espaços topológicos por meio de propriedades que vão desde a invariância até homeomorfismos. Para tanto, a Topologia Algébrica descreve a estrutura de um espaço topológico por associação com um sistema algébrico, normalmente um grupo ou uma sequência de grupos. Desse modo, a Topologia Algébrica consiste em resolver problemas topológicos através de métodos puramente algébricos. Neste contexto, a teoria de homologia apresenta papel bastante importante.

A homologia é um tema importante na Topologia Algébrica, pois fornece um método de associar a cada espaço topológico uma categoria de grupos, chamados de grupo de homologia desse espaço. De modo que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos. Esse trabalho tem por objetivo abordar com detalhamento algumas ferramentas da teoria de homologia e apresentar algumas aplicações desta, proporcionando uma visão ampla da importância dessa teoria.

No capítulo 1, relatamos alguns resultados de fundamental importância da área de álgebra homológica que são essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Destacamos as definições e conceitos básicos sobre simplexes e grupo de homologia. Neste capítulo usamos as referências [2], [4], [3], [7], [8] e [10].

No capítulo 2, apresentamos o cálculo dos grupos de homologia de algumas pseudo-variedades, como por exemplo a Faixa de Möbius e o Plano Projetivo. Neste capítulo

---

usamos a referência [2].

No capítulo 3, apresentamos o conceito de aplicações homotópicas e caracterizamos os grupos de homologia como invariantes topológicos. Neste capítulo usamos as referências [1], [2], [5], [6] e [9].

No capítulo 4, como aplicações da teoria de homologia desenvolvida nos capítulos anteriores, apresentamos o teorema de invariância da dimensão dos espaços euclidianos por homeomorfismos e o Teorema dos Pontos Fixos de Lefschetz. Neste capítulo usamos as referências [2], [4] e [6].



# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos, bem como alguns exemplos clássicos de homologia simplicial que faremos uso no desenvolvimento dos capítulos posteriores. Destacamos as definições e conceitos básicos sobre simplexes e grupo de homologia simplicial. Nesse capítulo usamos as referências [2], [4], [3], [7], [8] e [10].

### 1.1 Noções de simplexes.

**Definição 1:** Um conjunto  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$  é dito **geometricamente independente** se nenhum hiperplano de dimensão  $k - 1$  contém  $A$ .

Um conjunto  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  é geometricamente independente, quando não possui quaisquer 3 pontos colineares, pois se fosse por exemplo  $\{a_0, a_1, a_2\}$  colineares, teríamos  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  coplanares, logo  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$  estariam contidos em um hiperplano de dimensão 3, então indutivamente teríamos que  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  estariam contidos em um hiperplano de dimensão  $k - 1$ , o que seria uma contradição com a definição de conjunto geometricamente independente.

**Definição 2:** Seja  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  um conjunto geometricamente independente em  $\mathbb{R}^n$ .

O **simplexo geométrico k-dimensional** ou **k-simplexo** gerado por  $A$ , denotado por  $\sigma^k$ , é o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  para os quais existem números reais não negativos  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \text{com} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

**Observação 2:** Os números  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  são chamados **coordenadas baricêntricas** e os pontos  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  são chamados os **vértices** de  $\sigma^k$ . Além disso um k-simplexo é o menor convexo que contendo  $A$ .

O **k-simplexo geométrico aberto** gerado por  $A$  é o conjunto de todos os  $x \in \sigma^k$  tais que as coordenadas baricêntricas são positivas.

(i) Um 0-simplexo, é um ponto, pois sendo  $A = \{\mathbf{a}_0\}$ , temos que  $x \in \sigma^0 \Rightarrow x = \lambda_0 \mathbf{a}_0$ , onde  $\lambda_0 = 1 \Rightarrow x = \mathbf{a}_0$ .

(ii) Um 1-simplexo é um segmento de reta, pois sendo  $A = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1\}$ , temos que  $x \in \sigma^1$ , então  $x = \lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1$ , onde  $\lambda_1 + \lambda_0 = 1$ , logo  $x$  pertence ao segmento de reta  $\overline{\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1}$ .

(iii) Um 2-simplexo, é um triângulo. De fato, seja  $A = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  então

$$\sigma^2 = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2, \quad \text{com} \quad \lambda_i \geq 0, \forall i = 0, 1, 2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1\}.$$

Tomando  $x \in \sigma^2$ , existem  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda_i \geq 0$ , para todo  $i = 0, 1, 2$  e ainda  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Logo, se  $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$  e denotando  $t = \mathbf{a}_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) + \mathbf{a}_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$ ,

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \\ &= \lambda_0 \mathbf{a}_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) \left[ \mathbf{a}_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) + \mathbf{a}_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \right] \\ &= \lambda_0 \mathbf{a}_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) t, \end{aligned}$$

como  $\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) = 1$ , temos que  $t \in \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}$ . Visto que  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , temos que  $x \in \overline{\mathbf{a}_0 t}$ , assim,  $x$  pertence ao triângulo  $\Delta (\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)$ .

Agora se  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , então como  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i = 0, 1, 2$  temos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  então  $x = \mathbf{a}_0 \in \Delta (\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)$ . Recíprocamente, se  $y \in \Delta (\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)$ , temos que existem

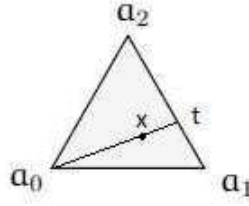


Figura 1.1: Simplexo de dimensão 2

$\mathbf{h} \in \overline{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}$ ,  $\lambda_0, \lambda \in [0, 1]$ , com  $\lambda_0 + \lambda = 1$ , tal que

$$\mathbf{y} = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda\mathbf{h}.$$

Como  $\mathbf{h} \in \overline{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}$ , temos que existem  $\lambda'_1, \lambda'_2 \in [0, 1]$  tal que  $\mathbf{h} = \lambda'_1\mathbf{a}_1 + \lambda'_2\mathbf{a}_2$ , com  $\lambda'_1 + \lambda'_2 = 1$ , logo

$$\mathbf{y} = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda\lambda'_1\mathbf{a}_1 + \lambda\lambda'_2\mathbf{a}_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda\lambda'_1 + \lambda\lambda'_2 &= \lambda_0 + \lambda(\lambda'_1 + \lambda'_2) \\ &= \lambda_0 + \lambda \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto fazendo  $\lambda\lambda'_1 = \lambda_1$  e  $\lambda\lambda'_2 = \lambda_2$ , temos que

$$\mathbf{y} = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2,$$

com  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , logo  $\mathbf{y} \in \sigma^2$ . Portanto  $\sigma^2 = \Delta(\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2)$ .

(iv) Um 3-simplexo é um tetraedro. De fato, dado o seguinte 3-simplexo,

$$\sigma^3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \text{com } \lambda_i \geq 0, \forall i = 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad \sum_{i=0}^3 \lambda_i = 1 \right\}.$$

Daí, se  $\mathbf{x} \in \sigma^3$ , então existem  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda_i \geq 0$ , para todo  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , tal que,

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3.$$

Se  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , então  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , pois  $\lambda_i \geq 0$ , para todo  $i = 1, 2, 3$ . Logo,  $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$  e então  $\mathbf{x}$  pertence ao tetraedro de vértices  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Se  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ , então considerando

$$\mathbf{t} = \mathbf{a}_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \mathbf{a}_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \mathbf{a}_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} x &= \lambda_0 \mathbf{a}_0 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \left( \mathbf{a}_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \mathbf{a}_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \mathbf{a}_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) \right) \\ &= \lambda_0 \mathbf{a}_0 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{t}, \end{aligned}$$

onde  $\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) + \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right)$ , logo  $\mathbf{t} \in \Delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$  que é uma face do tetraedro com vértices em  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Como temos,  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , então  $x \in \overline{\mathbf{a}_0 \mathbf{t}}$ , logo  $x$  pertence ao tetraedro.

Recíprocamente, se  $\mathbf{y}$  pertence ao tetraedro de vértices  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , temos que existem  $\mathbf{g} \in \Delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$ ,  $r, s \in [0, 1]$ , tal que  $r + s = 1$  e

$$\mathbf{y} = s \mathbf{a}_0 + r \mathbf{g}.$$

Como  $\mathbf{g} \in \Delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$ , temos que existem  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3 \in [0, 1]$ , tais que  $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 = 1$  e

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{h}_3 \mathbf{a}_3$$

Logo,  $\mathbf{y} = s \mathbf{a}_0 + r \mathbf{h}_1 \mathbf{a}_1 + r \mathbf{h}_2 \mathbf{a}_2 + r \mathbf{h}_3 \mathbf{a}_3$ , onde  $s, r \mathbf{h}_1, r \mathbf{h}_2, r \mathbf{h}_3 \geq 0$  e

$$\begin{aligned} s + r \mathbf{h}_1 + r \mathbf{h}_2 + r \mathbf{h}_3 &= s + r(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3) \\ &= s + r \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathbf{y} \in \sigma^3$ . Logo,  $\sigma^3$  é o tetraedro com vértices em  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

(v) Além disso, vemos que um 1-simplexo aberto é um segmento de reta sem as suas extremidades. O 2-simplexo aberto é o interior do triângulo, ou seja, o triângulo sem as suas arestas. O 3-simplexo aberto é o interior do tetraedro, ou seja, é o tetraedro sem suas faces.

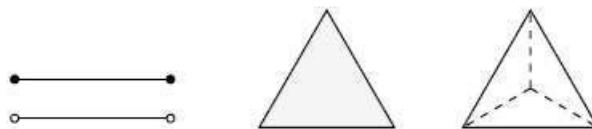


Figura 1.2: Exemplos de simplejos

**Definição 3:** Um simplexo  $\sigma^k$  é uma **face** de um simplexo  $\sigma^n$ ,  $k \leq n$ , se cada vértice de  $\sigma^k$  é também vértice de  $\sigma^n$ . As faces  $\sigma^k$  distintas de  $\sigma^n$  são chamadas de **faces próprias**.

Seja  $\sigma^k$  o simplexo de vértices  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ , escrevemos  $\sigma^k = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k \rangle$ .

**Exemplo 1:** Com a notação acima, temos que as faces do 2-simplexo  $\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle$  são:

$$\langle \mathbf{a}_0 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle$$

**Definição 4:** Dois simplexos  $\sigma^m$  e  $\sigma^n$  são **propriamente ligados** se  $\sigma^m \cap \sigma^n$  é vazia ou se  $\sigma^m \cap \sigma^n$  é uma face de  $\sigma^m$  e de  $\sigma^n$ .

**Exemplo 2:** Veja que as figuras (a) e (b) são exemplos de simplexos propriamente ligados;



Figura 1.3: Simplexos propriamente ligados

Porém, as figuras (c) e (d) são exemplos de simplexos que não são propriamente ligados;

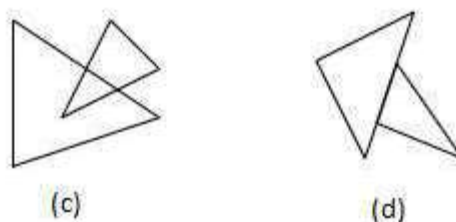


Figura 1.4: Simplexos não propriamente ligados

Agora vamos definir um dos principais objetos da teoria de homologia simplicial, os complexos simpliciais.

**Definição 5:** Um **complexo simplicial** em  $\mathbb{R}^n$  é uma família finita não necessariamente conexa  $K$  de simplexos que são propriamente ligados e cada face de um elemento de  $K$  é também elemento de  $K$ .

A **dimensão** de  $K$  é o maior inteiro positivo  $r$  tal que  $K$  tem um  $r$ -simplexo. A reunião de todos os elementos de  $K$  com a topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ , denotada por  $|K|$ , é chamada de, o **poliedro associado a  $K$** .

Faremos um exemplo bastante ilustrativo para por em prática as definições que vimos, onde dado um complexo iremos tentar identificar os simplexos.

**Exemplo 3:** Seja  $K$  o seguinte complexo simplicial;

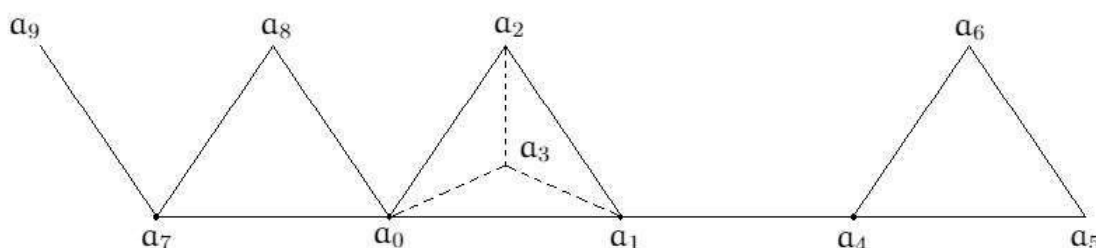


Figura 1.5: Exemplo de complexo

A seguir identificaremos os simplexos e as suas dimensões que formam o complexo  $K$  dado acima:

- Nove 0-simplexos:  
 $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_4 \rangle, \langle a_5 \rangle, \langle a_6 \rangle, \langle a_7 \rangle, \langle a_8 \rangle, \langle a_9 \rangle$ .
- Quatorze 1-simplexos:  
 $\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 a_3 \rangle, \langle a_0 a_7 \rangle, \langle a_0 a_8 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_1 a_4 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle, \langle a_4 a_5 \rangle, \langle a_4 a_6 \rangle,$   
 $\langle a_5 a_6 \rangle, \langle a_7 a_8 \rangle, \langle a_7 a_9 \rangle$ .
- Seis 2-simplexos:  
 $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_2 a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 a_3 \rangle, \langle a_4 a_5 a_6 \rangle, \langle a_0 a_7 a_8 \rangle$ .

- Um 3-simplexo:

$$\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle.$$

**Definição 6:** Seja  $X$  um espaço topológico. Se existir um complexo simplicial  $K$  cujo poliedro associado  $|K|$  é homeomorfo a  $X$ , dizemos que  $X$  é triangulável e  $K$  é uma **triangulação** de  $X$ .

Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma **superfície topológica** se para cada  $p \in S$  existir uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definição 6.1** Uma **triangulação** de uma superfície topológica compacta  $S$  é um complexo simplicial bidimensional  $K$ , tal que o seu poliedro associado  $|K|$  é homeomorfo a  $S$ .

**Exemplo 4:** Seja a esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Daí tome um conjunto  $A = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \subset S$  que é geometricamente independente tal que  $\sigma^3 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle$  é um tetraedro contido na bola fechada  $B[(0, 0, 0), 1]$ , e que o ponto  $(0, 0, 0)$  pertence ao simplexo aberto  $\sigma^3$ , ou seja,  $(0, 0, 0)$  pertence ao  $\sigma^3$  com excessão das faces próprias. Agora considere o seguinte complexo simplicial;

$$K = \{\langle \mathbf{a}_0 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_3 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_3 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle, \\ \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \rangle\}$$

Queremos mostrar que  $|K|$  é homeomorfo a  $S^2$ .

Considere agora a seguinte função;

$$f : |K| \rightarrow S^2, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

onde  $|\cdot|$  é a norma euclidiana, ou seja,  $f$  toma pontos em  $|K|$  e leva eles ao seu múltiplo por escalar positivo que está na esfera unitária. Veja que  $f$  está bem definida pois  $\mathbf{x} \neq 0$ , é contínua, visto que é o quociente de função contínuas e injetora, pois dados dois pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in |K|$  com  $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$  então temos que  $\mathbf{x} = \frac{|\mathbf{x}|\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}$ , logo  $\mathbf{x}$  é múltiplo positivo de  $\mathbf{z}$ , ou seja,  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ .

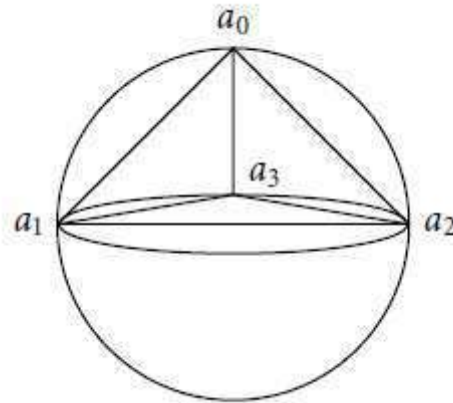


Figura 1.6: Homeomorfismo da esfera com o tetraedro

Agora considere  $y \in \mathbb{S}^2$ , daí tomando a semirreta que passa começa em  $(0, 0, 0)$  e passa por  $y$  temos que essa semirreta intersecta  $|K|$  em um único ponto  $x$ , logo, como  $f$  leva os ponto de  $|K|$  em seus respectivos múltiplos positivos contidos na esfera unitária, temos que  $f(x) = y$ . Portanto  $f$  é uma função contínua e bijetora.

Por fim, dado  $F \subset |K|$  um subconjunto fechado em  $|K|$ , como  $|K|$  é compacto temos que  $F$  é compacto logo pela continuidade de  $f$  temos  $f(F) \subset \mathbb{S}^2$  é um compacto, como  $\mathbb{S}^n$  é Hausdorff, temos que  $f(F)$  é um fechado em  $\mathbb{S}^2$ . Logo  $f$  é uma aplicação fechada, portanto  $f$  é homeomorfismo.

**Definição 7:** O fecho de um  $k$ -simplexo  $\sigma^k$ , denotado por  $\bar{\sigma}^k$ , é o complexo simplicial constituído de  $\sigma^k$  e todas as suas faces.

**Exemplo 5:** Seja  $\sigma^3 = \langle a_0 a_1 a_2 a_3 \rangle$ . Então o fecho de  $\sigma^3$  é dado por;

$$\bar{\sigma}^3 = \{ \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_1 a_3 \rangle, \langle a_0 a_2 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 a_2 a_3 \rangle \}.$$

**Definição 8:** Se  $K$  é um complexo simplicial de dimensão  $n$  e  $r \leq n$ , então o  $r$ -esqueleto de  $K$  é o complexo simplicial  $K^{(r)}$  constituído de todos os simplexes de  $K$  de dimensão menor ou igual que  $r$ .

**Exemplo 6:** Dado o complexo simplicial  $K$  do Exemplo 4, então o 1-esqueleto  $K^1$  de  $K$  é o,



$$K^{(1)} = \{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_2 a_3 \rangle\}.$$

Note que, em uma triangulação, cada aresta é aresta de exatamente dois triângulos. Vejamos se  $K$  é uma triangulação de uma superfície  $S$  e  $\overline{ab}$  é uma aresta de  $|K|$ , tal que  $\overline{ab}$  é aresta de apenas um triângulo, tomemos  $x$  um ponto no interior desta aresta e  $V$  uma vizinhança deste ponto  $x$ , tal que,  $V$  está contido no único triângulo o qual  $\overline{ab}$  é aresta.

Como  $|K|$  é homeomorfo a  $S$ , temos que  $V$  é homeomorfa a um aberto de  $S$ , que por sua vez é homeomorfo a uma bola aberta do  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $V$  é homeomorfa a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$ . Porém, veja que  $\partial V \cap \overline{ab} \subset V$ , então  $V$  não é um aberto do plano que contém o 2-simplexo o qual  $\overline{ab}$  é aresta, logo,  $V$  não pode ser homeomorfo a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$ . O que é uma contradição.

Por outro lado, suponha que  $\overline{ab}$  é aresta de três triângulos,  $T_1, T_2, T_3$  em  $|K|$ . Assim, tomando um ponto  $x$  no interior de  $\overline{ab}$ , temos que para toda vizinhança aberta  $V$  de  $x$ , tem-se que  $V$  contém pontos do interior de cada triângulo  $T_1, T_2, T_3$ . Ou seja, para uma vizinhança suficientemente pequena,  $V \subset T_1 \cap T_2 \cap T_3$  que definem três planos diferentes, logo  $V$  não pode ser homeomorfa a uma bola aberta de  $\mathbb{R}^2$ . Isto é um absurdo. Portanto,  $\overline{ab}$  é aresta de exatamente dois triângulos.

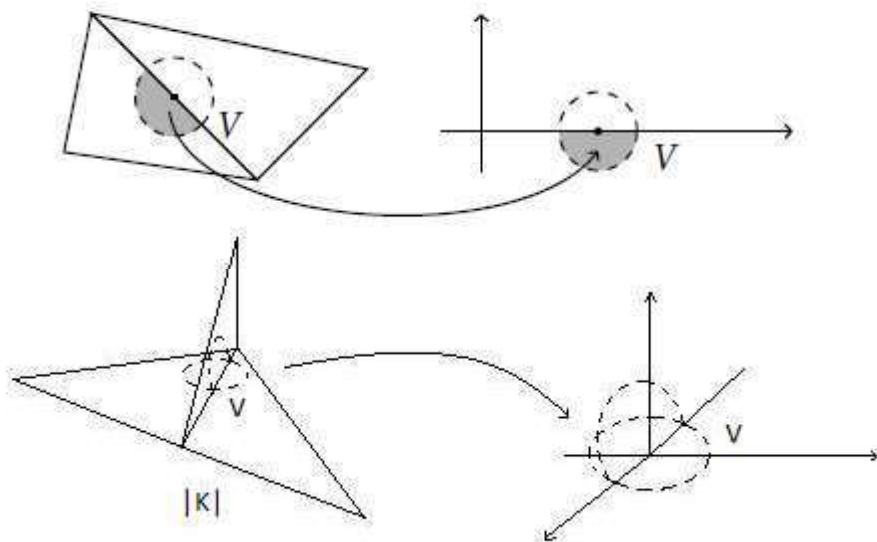


Figura 1.7: Homeomorfismos dos simplexos com o espaço euclidiano

**Definição 9:** Dado um  $p$ -simplexo  $\sigma^p$  de vértices  $a_0, a_1, \dots, a_p$ ,  $p \geq 1$ , podemos

dar-lhe uma **orientação** simplesmente escolhendo uma ordem «"para seus vértices, como por exemplo  $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1 < \dots < \mathbf{a}_p$  significa a ordem que os vértices vão aparecer  $\sigma^p = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_p \rangle$ .

Depois de ordenar os vértices de um  $p$ -simplexo, teremos duas classes de equivalência de permutações da ordem escolhida, elas determinam as duas orientações possíveis

- Classe das permutações pares que é constituído pelos simplexos positivamente ordenados, denotado por  $+\sigma^p$  ou apenas  $\sigma^p$ .
- Classe das permutações ímpares é constituído pelos simplexos negativamente ordenados, denotamos por  $-\sigma^p$ .

Um complexo simplicial  $K$  com vértices  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$  é dito orientável quando damos uma ordem «"para o seus vértices de tal forma que todos os simplexos estão orientados positivamente ou negativamente. Veja que um 0-simplexo  $\sigma^0 = \langle \mathbf{a}_0 \rangle$  é sempre orientado.

**Exemplo 7:** Seja  $\sigma^1 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle$ . Tomando-se a orientação  $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1$ , temos que;

$$+\sigma^1 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle;$$

$$-\sigma^1 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \rangle.$$

**Exemplo 8:** Seja  $\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle$  um 2-simplexo com a orientação  $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2$ . Daí, usando as permutações associadas a  $\sigma^2$  temos as seguintes três permutações pares;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 1)(0 \ 2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(0 \ 2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 1)^2;$$

e as seguintes três permutações são ímpares;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ 1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ 2).$$

Portanto,

$$+\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \rangle = \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle;$$

$$-\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \rangle.$$

**Definição 10:** Seja  $K$  um complexo simplicial com orientação fixada. A cada par  $(\sigma^{p+1}, \sigma^p)$ , de simplexes de  $K$  associamos um número  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ , chamado **número de incidência**, definido por

(i) Se  $\sigma^p$  não é uma face de  $\sigma^{p+1}$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$ ;

(ii) Se  $\sigma^p$  é uma face de  $\sigma^{p+1}$ , consideremos  $+\sigma^p = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \rangle$  e seja  $\mathbf{v}$  o vértice de  $\sigma^{p+1}$  que não está em  $\sigma^p$ .

• Se  $+\sigma^{p+1} = \langle \mathbf{v} \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$ ;

• Se  $+\sigma^{p+1} = -\langle \mathbf{v} \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p \rangle$ , então  $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$ .

**Exemplo 9:** Considere  $\sigma^1 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle$  com orientação  $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1$ . Daí, sendo  $\sigma_1^0 = \langle \mathbf{a}_0 \rangle$  e  $\sigma_2^0 = \langle \mathbf{a}_1 \rangle$ , temos;

•  $[\sigma^1, \sigma_1^0] = -1$ , pois  $+\sigma^1 = +\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle = -\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \rangle$ ;

•  $[\sigma^1, \sigma_2^0] = 1$ , pois  $+\sigma^1 = +\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle$ .

**Exemplo 10:** Considere agora  $\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle$  com a orientação  $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2$ . Assim

$$+\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \rangle$$

$$-\sigma^2 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0 \rangle = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \rangle.$$

Logo, se colocarmos

$$\sigma_1^1 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \quad \sigma_2^1 = \langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \quad \sigma_3^1 = \langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle,$$

temos que,

$$[\sigma^2, \sigma_1^1] = 1, \quad [\sigma^2, \sigma_2^1] = -1, \quad [\sigma^2, \sigma_3^1] = 1.$$

**Teorema 1:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado,  $\sigma^p$  um  $p$ -simplexo orientado fixado de  $L$  e  $\sigma^{p-2}$  uma  $(p-2)$ -face de  $\sigma^p$ . Então,

$$\sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0.$$

**Prova:** Seja  $+\sigma^{p-2} = \langle a_0 a_1 \cdots a_{p-2} \rangle$  o  $(p-2)$ -simplexo orientado positivamente e  $v, u$  os vértices de  $\sigma^p$  que não estão em  $\sigma^{p-2}$ .

Agora suponha que  $+\sigma^p = \langle uva_0 a_1 \cdots a_{p-2} \rangle$ . Daí, temos que os únicos  $(p-1)$ -simplexos de  $K$ , tal que  $[\sigma^p, \sigma^{p-1}] \neq 0$  e  $[\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] \neq 0$ , são os seguintes;

$$\sigma_1^{p-1} = \langle ua_0 \cdots a_{p-2} \rangle, \quad \sigma_2^{p-1} = \langle va_0 \cdots a_{p-2} \rangle,$$

visto que são os únicos que são faces de  $\sigma^p$  e tem  $\sigma^{p-2}$  como face. Vamos analisar os casos determinados pelas orientações;

$$\begin{aligned} +\sigma_{11}^{p-1} = \langle ua_0 \cdots a_{p-2} \rangle \quad \text{ou} \quad +\sigma_{12}^{p-1} = -\langle ua_0 \cdots a_{p-2} \rangle \\ +\sigma_{21}^{p-1} = \langle va_0 \cdots a_{p-2} \rangle \quad \text{ou} \quad +\sigma_{22}^{p-1} = -\langle va_0 \cdots a_{p-2} \rangle \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_{11}^{p-1}] = -1 \quad , \quad [\sigma^p, \sigma_{12}^{p-1}] = 1 \quad , \quad [\sigma^p, \sigma_{21}^{p-1}] = 1 \quad , \quad [\sigma^p, \sigma_{22}^{p-1}] = -1 \\ [\sigma_{11}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1 \quad , \quad [\sigma_{12}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1 \quad , \quad [\sigma_{21}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1 \quad , \quad [\sigma_{22}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} [\sigma^p, \sigma_{11}^{p-1}][\sigma_{11}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1 \quad , \quad [\sigma^p, \sigma_{12}^{p-1}][\sigma_{12}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1 \\ [\sigma^p, \sigma_{21}^{p-1}][\sigma_{21}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1 \quad , \quad [\sigma^p, \sigma_{22}^{p-1}][\sigma_{22}^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] &= \sum_{i,j=1}^2 [\sigma^p, \sigma_{ij}^{p-1}][\sigma_{ij}^{p-1}, \sigma^{p-2}] \\ &= 0, \end{aligned}$$

e assim encerramos a demonstração.

□

Agora iremos definir as cadeias de simplexos que são aplicações importantes para a construção da teoria pois são os elementos que formam o espaço que dará origem ao grupo de homologia.

**Definição 11:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado e  $\{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p}$  a família dos  $p$ -simplexos de  $K$ , onde  $\alpha_p$  denota o número de  $p$ -simplexos. Uma **cadeia  $p$ -dimensional** (ou uma  **$p$ -cadeia**) é uma função

$$c_p : \{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

tal que  $c_p(-\sigma_i^p) = -c_p(+\sigma_i^p)$ .

Uma 0-cadeia é uma função

$$c_0 : \{0 - \text{simplexos}\} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

**Observação 2:** Denotaremos por  $C_p(K)$  o conjunto de todas as  $p$ -cadeias. O conjunto  $C_p(K)$  com a operação de adição de funções é um grupo abeliano, chamado grupo das  $p$ -cadeias.

**Prova:** Em  $C_p(K)$  nós definimos a seguinte operação de soma

$$\oplus : C_p(K) \times C_p(K) \longrightarrow C_p(K)$$

$$(c_p, b_p) \mapsto c_p \oplus b_p,$$

onde  $(c_p \oplus b_p)(\sigma_i^p) = c_p(\sigma_i^p) + b_p(\sigma_i^p)$ , onde  $+$  é a soma usual em  $\mathbb{Z}$ .

(i) Dados  $c_p, b_p, d_p \in C_p(K)$ , temos

$$\begin{aligned} ((c_p \oplus b_p) \oplus d_p)(\sigma_i^p) &= (c_p \oplus b_p)(\sigma_i^p) + d_p(\sigma_i^p) \\ &= (c_p(\sigma_i^p) + b_p(\sigma_i^p)) + d_p(\sigma_i^p). \end{aligned}$$

Usando a associatividade da soma em  $\mathbb{Z}$  temos,

$$\begin{aligned} ((c_p \oplus b_p) \oplus d_p)(\sigma_i^p) &= c_p(\sigma_i^p) + (b_p(\sigma_i^p) + d_p(\sigma_i^p)) \\ &= c_p(\sigma_i^p) + (b_p \oplus d_p)(\sigma_i^p) \\ &= (c_p \oplus (b_p \oplus d_p))(\sigma_i^p). \end{aligned}$$

(ii) Tomando  $e_p : \{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p} \rightarrow \mathbb{Z}$ , tal que  $c_p(\sigma_i^p) = 0$ , para todo  $i = 0, \dots, \alpha_p$ , temos que dado  $c_p \in C_p(K)$  vale

$$\begin{aligned} (e_p \oplus c_p)(\sigma_i^p) &= e_p(\sigma_i^p) + c_p(\sigma_i^p) \\ &= 0 + c_p(\sigma_i^p) \\ &= c_p(\sigma_i^p), \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a propriedade do elemento neutro da adição em  $\mathbb{Z}$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (c_p \oplus e_p)(\sigma_i^p) &= c_p(\sigma_i^p) + e_p(\sigma_i^p) \\ &= c_p(\sigma_i^p) + 0 \\ &= c_p(\sigma_i^p), \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a propriedade do elemento neutro da adição em  $\mathbb{Z}$ .

Portanto,  $(c_p \oplus e_p) = (e_p \oplus c_p) = c_p$ . Logo,  $e_p$  é o elemento neutro de  $C_p(K)$ .

(iii) Seja  $c_p \in C_p(K)$ , tomemos  $b_p \in C_p(K)$  tal que  $b_p(\sigma_i^p) = -c_p(\sigma_i^p)$ . Veja que, dado  $\sigma_i^p \in K$  temos

$$b_p(-\sigma_i^p) = -c_p(-\sigma_i^p) \quad e \quad b_p(+\sigma_i^p) = -c_p(+\sigma_i^p).$$

Logo,

$$\begin{aligned} b_p(-\sigma_i^p) &= -c_p(-\sigma_i^p) \\ &= -(-c_p(+\sigma_i^p)) \\ &= -b_p(+\sigma_i^p), \end{aligned}$$

então  $b_p \in C_p(K)$ . Além disso, dado  $\sigma_i^p \in K$ , temos

$$\begin{aligned} (b_p \oplus c_p)(\sigma_i^p) &= b_p(\sigma_i^p) + c_p(\sigma_i^p) \\ &= (-c_p(\sigma_i^p)) + c_p(\sigma_i^p) \\ &= 0 \\ &= e_p(\sigma_i^p), \end{aligned}$$

assim como

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}_p \oplus \mathbf{b}_p)(\sigma_i^p) &= \mathbf{c}_p(\sigma_i^p) + \mathbf{b}_p(\sigma_i^p) \\ &= \mathbf{c}_p(\sigma_i^p) + (-\mathbf{c}_p(\sigma_i^p)) \\ &= 0 \\ &= \mathbf{e}_p(\sigma_i^p). \end{aligned}$$

Portanto,  $(\mathbf{c}_p \oplus \mathbf{b}_p) = (\mathbf{b}_p \oplus \mathbf{c}_p) = \mathbf{e}_p$ . Assim,  $\mathbf{b}_p$  é o elemento inverso de  $\mathbf{c}_p$ , o qual denota-se por  $-\mathbf{c}_p$ .

(iv) Dados  $\mathbf{c}_p, \mathbf{b}_p \in C_p(K)$  e  $\sigma_i^p \in K$ , temos que

$$(\mathbf{c}_p \oplus \mathbf{b}_p)(\sigma_i^p) = \mathbf{c}_p(\sigma_i^p) + \mathbf{b}_p(\sigma_i^p),$$

e como  $(\mathbb{Z}, +)$  é grupo comutativo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}_p \oplus \mathbf{b}_p)(\sigma_i^p) &= \mathbf{c}_p(\sigma_i^p) + \mathbf{b}_p(\sigma_i^p) \\ &= \mathbf{b}_p(\sigma_i^p) + \mathbf{c}_p(\sigma_i^p) \\ &= (\mathbf{b}_p \oplus \mathbf{c}_p)(\sigma_i^p). \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{c}_p \oplus \mathbf{b}_p = \mathbf{b}_p \oplus \mathbf{c}_p$  para todos  $\mathbf{c}_p, \mathbf{b}_p \in C_p(K)$ . Assim, temos de fato que  $(C_p(K), \oplus)$  é um grupo abeliano.

□

**Definição 12:** Uma  $p$ -cadeia,  $\mathbf{c}_p$ , é **elementar** quando existe um  $p$ -simplexos  $\sigma^p \in K$ , tal que  $\mathbf{c}_p(\tau_p) = 0$  para todo  $p$ -simplexo  $\tau_p \in K$  diferente de  $\sigma_p$ .

Neste caso denotamos  $\mathbf{c}_p$  por  $\mathbf{g}\sigma^p$ , onde  $\mathbf{g} = \mathbf{c}_p(+\sigma^p)$ .

**Observação 3:** Veja que, dado uma  $p$ -cadeia  $\mathbf{d}_p \in C_p(K)$

$$\mathbf{d}_p : \{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

podemos tomar as  $p$ -cadeias elementares

$$\mathbf{c}_{pj} : \{\sigma_i^p\}_{i=0}^{\alpha_p} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

tais que  $\mathbf{c}_{pj}(\sigma_i^p) = 0$ , para todo  $i \neq j$ , e  $\mathbf{c}_{pj}(+\sigma_j^p) = \mathbf{d}_p(\sigma_j^p)$ . Então temos que, para cada  $\sigma_k^p \in K$  vale

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\alpha_p} \mathbf{c}_{pj}(\sigma_k^p) &= \mathbf{c}_{pk}(\sigma_k^p) \\ &= \mathbf{d}_p(\sigma_k^p), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_p &= \sum_{j=0}^{\alpha_p} c_{pj} \\ &= \sum_{j=0}^{\alpha_p} g_j \sigma_j^p, \end{aligned}$$

com  $g_j = c_{pj}(+\sigma_j^p)$  para toda  $p$ -cadeia  $\mathbf{d}_p \in C_p(\mathbb{K})$ .

**Definição 13:** Se  $g\sigma^p$  é uma  $p$ -cadeia elemental com  $p \geq 1$ , o bordo de  $g\sigma^p$ , denotado por  $\partial(g\sigma^p)$ , é definido por:

$$\partial(g\sigma^p) = \sum_{i=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g \sigma_i^{p-1},$$

onde  $g\sigma_i^{p-1} = c_{(p-1)i}$  é a  $(p-1)$ -cadeia elemental com  $g = c_{(p-1)i}(+\sigma_i^{p-1}) = c_p(+\sigma^p)$ .

O **operador bordo**  $\partial : C_p(\mathbb{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathbb{K})$  é definido por

$$\partial \left( \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \right) = \sum_{i=0}^{\alpha_p} \partial(g\sigma_i^p).$$

Por  $C_0(\mathbb{K})$  ser o conjunto das 0-cadeias que é o de dimensão mais baixa, definimos o operador bordo de  $C_0(\mathbb{K})$  como o homomorfismo identicamente nulo.

**Exemplo 11:** Considere o seguinte complexo  $\mathbb{K}$  com orientação  $a < b < c < d$

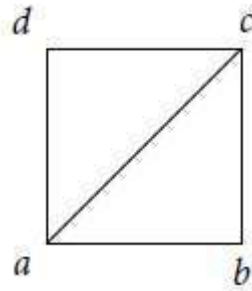


Figura 1.8: Exemplo de operador bordo em um complexo

Tomando uma 2-cadeia genérica temos  $z = g_0 \langle acd \rangle + g_1 \langle abc \rangle$ . Logo,

$$\begin{aligned} \partial(z) &= ([\langle acd \rangle, \langle ac \rangle] g_0 \langle ac \rangle + [\langle acd \rangle, \langle ad \rangle] g_0 \langle ad \rangle + [\langle acd \rangle, \langle cd \rangle] g_0 \langle cd \rangle) \\ &\quad + ([\langle abc \rangle, \langle ab \rangle] g_1 \langle ab \rangle + [\langle abc \rangle, \langle ac \rangle] g_1 \langle ac \rangle + [\langle abc \rangle, \langle bc \rangle] g_1 \langle bc \rangle) \\ &= g_0 \langle ac \rangle - g_0 \langle ad \rangle + g_0 \langle cd \rangle + g_1 \langle ab \rangle - g_1 \langle ac \rangle + g_1 \langle bc \rangle \\ &= (g_0 - g_1) \langle ac \rangle - g_0 \langle ad \rangle + g_0 \langle cd \rangle + g_1 \langle ab \rangle + g_1 \langle bc \rangle \end{aligned}$$



**Teorema 2:** Se  $K$  é um complexo orientado e  $p \geq 2$ , então

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_p(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial} C_{p-2}(K) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é uma sequência semi-exata, isto é,  $\partial^2 = 0$ .

**Prova:** Seja  $c_p \in C_p(K)$  uma  $p$ -cadeia. Daí, temos que

$$c_p = \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p,$$

onde  $g_i \sigma_i^p$  são as  $p$ -cadeias elementares. Então,

$$\begin{aligned} \partial(c_p) &= \partial \left( \sum_{i=0}^{\alpha_p} g_i \sigma_i^p \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \partial(g_i \sigma_i^p) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] g_i \sigma_j^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Aplicando o operador bordo novamente

$$\begin{aligned} \partial^2(c_p) &= \partial(\partial(c_p)) \\ &= \partial \left( \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] g_i \sigma_j^{p-1} \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] \partial(g_i \sigma_j^{p-1}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] \left( \sum_{k=0}^{\alpha_{p-2}} [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] g_i \sigma_k^{p-2} \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} \left( \sum_{k=0}^{\alpha_{p-2}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] g_i \sigma_k^{p-2} \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{k=0}^{\alpha_{p-2}} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] \right) g_i \sigma_k^{p-2} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, temos que

$$\sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] = 0,$$

assim,

$$\begin{aligned} \partial^2(c_p) &= \sum_{i=0}^{\alpha_p} \left( \sum_{k=0}^{\alpha_{p-2}} \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] \right) g_i \sigma_k^{p-2} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

## 1.2 Noções de grupo de homologia

Iniciamos esta seção com algumas definições e observações importantes, usamos com maior ênfase nessa subseção as referências [2] e [6].

**Definição 14:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado e  $p \geq 0$ . Um  **$p$ -ciclo** de  $K$ , é uma  $p$ -cadeia  $z_p$  tal que  $\partial(z_p) = 0$ .

**Definição 15:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado e  $p \geq 0$ . Dizemos que  $b_p$  é um  **$p$ -bordo** se existir uma  $(p+1)$ -cadeia  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$ , tal que  $\partial(c_{p+1}) = b_p$ .

Denotamos por  $Z_p(K)$  o conjunto dos  $p$ -ciclos de  $K$ . Observe que  $Z_p(K)$  é o núcleo do homomorfismo bordo

$$\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K),$$

e  $C_0(K) = Z_0(K)$ , pois  $\partial(C_0(K)) = 0$ . O conjunto dos  $p$ -bordos, denotado por  $B_p(K)$ , é constituído pela imagem de

$$\partial : C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K).$$

Se  $K$  tem dimensão  $n$ , então não há cadeias de dimensão maior que  $n$ , logo  $C_p(K) = 0$ , para todo  $p > n$ , e assim  $B_n(K) = 0$ .

**Observação 4:** Se  $K$  é um complexo orientado de dimensão  $n$ , então  $B_p(K) \subset Z_p(K)$ ,  $0 \leq p \leq n$ .

**Prova:** De fato, se  $p = n$  temos que  $B_n(K) = 0$ , logo  $B_n(K) \subset Z_n(K)$ .

Se  $0 < p \leq n - 1$  e  $b_p \in B_p(K)$ , existe uma  $(p + 1)$ -cadeia  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$ , tal que  $\partial(c_{p+1}) = b_p$ . Daí, segue pelo Teorema 2 que

$$\begin{aligned} \partial(b_p) &= \partial(\partial(c_{p+1})) \\ &= \partial^2(c_{p+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $b_p \in Z_p(K)$  e então  $B_p(K) \subset Z_p(K)$ .

□

**Definição 16:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado e  $p \geq 0$ . Daí, dados  $w_p, z_p \in Z_p(K)$ , dizemos que  $w_p$  e  $z_p$  são ditas  **$p$ -cadeias homólogas** se  $w_p - z_p \in B_p(K)$ .

A seguir iremos mostrar que a relação definida acima é uma relação de equivalência, a qual será muito importante para nossa teoria.

**Observação 5:** A relação da definição 16 é uma relação de equivalência.

**Prova:** (i) Dado  $z_p \in Z_p(K)$  tome um  $c_{p+2} \in C_{p+2}(K)$  qualquer, daí

$$\partial(c_{p+2}) \in C_{p+1}(K) \Rightarrow \partial(\partial(c_{p+2})) = 0 = z_p - z_p.$$

Ou seja,  $z_p - z_p \in B_p(K)$ , logo  $z_p$  é homólogo a  $z_p$ .

(ii) Sejam  $z_p, w_p \in Z_p(K)$ , tais que  $w_p - z_p \in B_p(K)$ . Daí, existe uma  $(p + 1)$ -cadeia  $c_{p+1}$  tal que  $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$ . Sendo assim, podemos escrever

$$c_{p+1} = \sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} g_i \sigma_i^{p+1},$$

onde  $g_i \sigma_i^{p+1}$  é uma  $(p + 1)$ -cadeia elementar. Então tomando as  $(p + 1)$ -cadeias  $(-g_i) \sigma_i^{p+1}$  elementares,

$$-c_{p+1} = \sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} (-g_i) \sigma_i^{p+1},$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
 \partial(-c_{p+1}) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} (-g_i)\sigma_i^{p+1}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} \partial(-g_i)\sigma_i^{p+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_p} [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^p](-g_i)\sigma_j^p\right) \\
 &= -\sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_p} [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^p]g_i\sigma_j^p\right) \\
 &= -\sum_{i=0}^{\alpha_{p+1}} \partial(g_i\sigma_i^{p+1}) \\
 &= -\partial(c_{p+1}) \\
 &= -(w_p - z_p) \\
 &= z_p - w_p,
 \end{aligned}$$

pois  $(-g_i)\sigma_i^{p+1}$  é a inversa aditiva de  $g_i\sigma_i^{p+1}$ , e assim  $z_p - w_p \in B_p(K)$ .

(iii) Sejam  $z_p, w_p, x_p \in Z_p(K)$ , tais que  $z_p$  é homólogo a  $w_p$  e  $w_p$  é homólogo a  $x_p$ , ou seja,  $z_p - w_p \in B_p(K)$  e  $w_p - x_p \in B_p(K)$ . Então existem  $c_{p+1}, d_{p+1} \in C_{p+1}(K)$ , tais que

$$\partial(c_{p+1}) = z_p - w_p \quad \text{e} \quad \partial(d_{p+1}) = w_p - x_p.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
 \partial(c_{p+1} + d_{p+1}) &= \partial(c_{p+1}) + \partial(d_{p+1}) \\
 &= (z_p - w_p) + (w_p - x_p) \\
 &= z_p + (-w_p + w_p) + (-x_p) \\
 &= z_p + e_p - x_p \\
 &= z_p - x_p,
 \end{aligned}$$

logo,  $z_p - x_p \in B_p(K)$  então  $z_p$  é homólogo a  $x_p$ .

□

A classe de equivalência de  $z_p \in Z_p(K)$ , chamada de classe de homologia de  $z_p$ , é o conjunto

$$z_p + B_p(K) = \{w_p \in Z_p(K) \mid w_p - z_p \in B_p(K)\},$$

também denotado por  $[z_p]$ .

Além disso, se considerarmos  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ , temos que  $H_p(K)$  é grupo. De fato, considerando a operação de adição

$$+ : H_p(K) \times H_p(K) \longrightarrow H_p(K)$$

$$([c_p], [d_p]) \mapsto [c_p + d_p].$$

Vejamos primeiro que esta operação está bem definida. Seja  $c_p \sim c'_p$  e  $d_p \sim d'_p$ , daí  $[c_p] + [d_p] = [c_p + d_p]$  e  $[c'_p] + [d'_p] = [c'_p + d'_p]$ . Assim,

$$\begin{aligned} [c_p + d_p] = [c'_p + d'_p] &\Leftrightarrow (c_p + d_p) - (c'_p + d'_p) \in B_p(K) \\ &\Leftrightarrow (c_p - c'_p) + (d_p - d'_p) \in B_p(K), \end{aligned}$$

Mas como  $c_p \sim c'_p$  e  $d_p \sim d'_p$ , existem  $f_{p+1}, g_{p+1} \in C_{p+1}(K)$ , tais que  $\partial(f_{p+1}) = c_p - c'_p$  e

$$\begin{aligned} \partial(g_{p+1}) = d_p - d'_p &\Rightarrow \partial(f_{p+1} + g_{p+1}) = \partial(f_{p+1}) + \partial(g_{p+1}) \\ &= (c_p - c'_p) + (d_p - d'_p). \end{aligned}$$

Ou seja,  $(c_p - c'_p) + (d_p - d'_p) \in B_p(K)$ . Logo,  $[c_p + d_p] = [c'_p + d'_p]$  e a operação  $+$  está bem definida em  $H_p(K)$ . Agora vamos provar que  $H_p(K)$  com a operação definida acima é de fato um grupo. Vejamos, dados  $[d_p], [c_p], [b_p] \in H_p(K)$  temos que

$$\begin{aligned} ([d_p] + [c_p]) + [b_p] &= [d_p + c_p] + [b_p] \\ &= [(d_p + c_p) + b_p] \\ &= [d_p + (c_p + b_p)] \\ &= [d_p] + [c_p + b_p] \\ &= [d_p] + ([c_p] + [b_p]), \end{aligned}$$

isto é possível pois  $Z_p(K)$  é subgrupo. Seja  $e_p \in Z_p(K)$  o elemento neutro, logo

$$\begin{aligned} [c_p] + [e_p] &= [c_p + e_p] \\ &= [c_p] \\ &= [e_p + c_p] \\ &= [e_p] + [c_p]. \end{aligned}$$

Além disso, sendo  $c_p \in Z_p(K)$  temos que  $c_p + (-c_p) = e_p$ . Logo,

$$\begin{aligned} [c_p] + [-c_p] &= [(c_p) + (-c_p)] \\ &= [e_p]. \end{aligned}$$

Por fim, dados  $c_p, d_p \in Z_p(K)$  temos que  $c_p + d_p = d_p + c_p$ , pois  $Z_p(K)$  é subgrupo do grupo abeliano  $C_p(K)$ . Logo,

$$\begin{aligned} [c_p] + [d_p] &= [c_p + d_p] \\ &= [d_p + c_p] \\ &= [d_p] + [c_p]. \end{aligned}$$

Então,  $H_p(K)$  é grupo abeliano.

□

**Definição 17:** Sejam  $K$  um complexo simplicial orientado e  $p \geq 0$ . Definimos o **grupo de homologia  $p$ -dimensional** de  $K$  como o grupo quociente

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

**Observação 6:** Suponhamos que  $K$  tenha  $r$   $p$ -simplexos. Então  $C_p(K)$  é isomorfo a  $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r\text{-cópias}}$ , isto é,  $C_p(K)$  é um grupo abeliano livre com  $r$  geradores.

**Prova:** Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : C_p(K) &\longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r\text{-cópias}} \\ \varphi(c_p) &= (g_0, g_1, \dots, g_{r-1}), \end{aligned}$$

onde  $c_p = \sum_{i=0}^{r-1} g_i \sigma_i^p$ . Daí, dados  $c_p, d_p \in C_p(K)$  escritos como segue

$$c_p = \sum_{i=0}^{r-1} g_i \sigma_i^p \quad \text{e} \quad d_p = \sum_{i=0}^{r-1} f_i \sigma_i^p,$$

temos, para cada  $\sigma_i^p \in K$ , que

$$(c_p + d_p)(\sigma_i^p) = c_p(\sigma_i^p) + d_p(\sigma_i^p).$$

Logo,  $c_p + d_p = \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + f_i) \sigma_i^p$ . Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(c_p + d_p) &= (g_0 + f_0, g_1 + f_1, \dots, g_{r-1} + f_{r-1}) \\ &= (g_0, \dots, g_{r-1}) + (f_0, \dots, f_{r-1}) \\ &= \varphi(c_p) + \varphi(d_p). \end{aligned}$$

Portanto  $\varphi$  é homomorfismo.

Além disso, se  $d_p, c_p \in C_p(K)$  são da forma

$$c_p = \sum_{i=0}^{r-1} g_i \sigma_i^p \quad e \quad d_p = \sum_{i=0}^{r-1} f_i \sigma_i^p,$$

se supormos  $\varphi(c_p) = \varphi(d_p)$  então  $g_i = f_i$ , para todo  $i = 0, \dots, r-1$ . Logo,  $c_p = d_p$ .

Veja ainda que, dado  $(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) \in \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{r\text{-vezes}}$  tomamos as  $p$ -cadeias elementares

$$c_{pi} : \{\sigma_i^p\}_{i=0}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

onde  $c_{pi}(+\sigma_i^p) = x_i$  e  $c_{pi}(\sigma_j^p) = 0$ , para todo  $\sigma_j^p \neq \sigma_i^p$ . Considerando

$$c_p = \sum_{i=0}^{r-1} x_i \sigma_i^p,$$

temos  $\varphi(c_p) = (x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ , logo  $\varphi$  é bijeção e assim um é isomorfismo.

□

Agora iremos mostrar que o conjunto dos  $p$ -ciclos e dos  $p$ -bordos são subgrupos do conjunto de todas as  $p$ -cadeias e assim concluiremos que eles são livres e abelianos.

**Observação 7:**  $Z_p(K)$  e  $B_p(K)$  são subgrupos de  $C_p(K)$ , logo também são livres e abelianos.

De fato, dado  $c_p, b_p \in Z_p(K)$  temos que  $\partial(c_p) = \partial(b_p) = 0$ , donde obtemos

$$\partial(c_p + b_p) = \partial(c_p) + \partial(b_p) = 0.$$

Sendo assim,  $b_p + c_p \in Z_p(K)$ .

Seja  $c_p \in Z_p(K)$  da forma  $c_p = \sum_{i=0}^{r-1} g_i \sigma_i^p$ , então  $-c_p = \sum_{i=0}^{r-1} (-g_i) \sigma_i^p$ . Donde concluímos que  $\partial(-c_p) = -\partial(c_p) = 0$ . Por fim, sendo  $e_p$  a  $p$ -cadeia que é o elemento neutro de  $C_p(K)$ , ou seja,  $e_p \equiv 0$ . Daí,

$$\begin{aligned} \partial(e_p) &= \sum_{i=0}^r \partial(0 \cdot \sigma_i^p) \\ &= \sum_{i=0}^r \left( \sum_{j=0}^{\alpha_{p-1}} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] 0 \cdot \sigma_{jp-1} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $(0 \cdot \sigma_j^{p-1})(\sigma_k^{p-1}) = 0$ , para todo  $j, k = 0, \dots, \alpha_{p-1}$ . Portanto,  $Z_p(K)$  é subgrupo.

Agora se  $c_p, b_p \in B_p(K)$ , existem  $d_p, t_p \in C_{p+1}(K)$  tais que  $\partial(d_p) = c_p$  e  $\partial(t_p) = b_p$ . Logo,

$$\begin{aligned} \partial(d_p + t_p) &= \partial(d_p) + \partial(t_p) \\ &= c_p + b_p. \end{aligned}$$

Ou seja,  $c_p + b_p \in B_p(K)$ . Veja também que, se  $c_p \in B_p(K)$  então existe  $b_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  tal que  $\partial(b_{p+1}) = c_p$ . Logo,  $-b_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  e  $\partial(-b_{p+1}) = -c_{p+1}$ . Por fim, tomando  $e_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  temos que  $\partial(e_{p+1}) = e_p$ . Portanto,  $B_p(K)$  é subgrupo de  $C_p(K)$ .

Assim,  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$  é um grupo abeliano, pois é quociente de grupos abelianos.

**Exemplo 12:** Seja  $K$  o fecho do 2-simplexo  $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ , com orientação induzida por  $a_0 < a_1 < a_2$ .

Veja que os 0-simplexos são  $\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle$ , os 1-simplexos são  $\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle$ , e o único 2-simplexo é o  $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ . Agora vamos calcular os grupos de homologia de  $K$ .

(i) Para dimensão zero, temos que,  $\partial(C_0(K)) \equiv 0$ , logo  $Z_0(K) = C_0(K)$ . Além disso, dado  $c_1 \in C_1(K)$  temos que

$$c_1 = g_0 \langle a_0 a_1 \rangle + g_1 \langle a_0 a_2 \rangle + g_2 \langle a_1 a_2 \rangle,$$



onde  $g_0, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$ . Então

$$\begin{aligned}
 \partial(c_1) &= \partial(g_0\langle a_0 a_1 \rangle) + \partial(g_1\langle a_0 a_2 \rangle) + \partial(g_2\langle a_1 a_2 \rangle) \\
 &= ([\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_0 \rangle]g_0\langle a_0 \rangle + [\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 \rangle]g_0\langle a_1 \rangle + [\langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle]g_0\langle a_2 \rangle) \\
 &\quad + ([\langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_0 \rangle]g_1\langle a_0 \rangle + [\langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle]g_1\langle a_1 \rangle + [\langle a_0 a_2 \rangle, \langle a_2 \rangle]g_1\langle a_2 \rangle) \\
 &\quad + ([\langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 \rangle]g_2\langle a_0 \rangle + [\langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle]g_2\langle a_1 \rangle + [\langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_2 \rangle]g_2\langle a_2 \rangle) \\
 &= (-g_0\langle a_0 \rangle + g_0\langle a_1 \rangle) + (-g_1\langle a_0 \rangle + g_1\langle a_2 \rangle) + (-g_2\langle a_1 \rangle + g_2\langle a_2 \rangle) \\
 &= (-g_0 - g_1)\langle a_0 \rangle + (g_0 - g_2)\langle a_1 \rangle + (g_1 + g_2)\langle a_2 \rangle,
 \end{aligned}$$

é uma 0-cadeia  $b_0 = r_0\langle a_0 \rangle + r_1\langle a_1 \rangle + r_2\langle a_2 \rangle$  com

$$\begin{cases} r_0 = -g_0 - g_1 \\ r_1 = g_0 - g_2 \\ r_2 = g_1 + g_2 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 -r_1 - r_2 &= -g_0 + g_2 - g_1 - g_2 \\
 &= -g_0 - g_1 \\
 &= -r_0.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 b_0 &= (-r_1 - r_2)\langle a_0 \rangle + r_1\langle a_1 \rangle + r_2\langle a_2 \rangle \\
 &= r_1(\langle a_1 \rangle - \langle a_0 \rangle) + r_2(\langle a_2 \rangle - \langle a_0 \rangle)
 \end{aligned}$$

Então  $B_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Veja que, se  $c_0 \in C_0(K) = Z_0(K)$ , temos que

$$c_0 = g_0\langle a_0 \rangle + g_1\langle a_1 \rangle + g_2\langle a_2 \rangle,$$

onde  $g_0, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$C_0(K) = Z_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Agora dado  $c_0 \in Z_0(K)$ , tem-se

$$c_0 = g_0\langle a_0 \rangle + g_1\langle a_1 \rangle + g_2\langle a_2 \rangle,$$

com  $g_0, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$ . Além disso, dado  $d_1 \in C_1(K)$ , temos

$$\partial(d_1) = r_1(\langle a_1 \rangle - \langle a_0 \rangle) + r_2(\langle a_2 \rangle - \langle a_0 \rangle),$$

$r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ . Mas note que,

$$\begin{aligned} \partial(r_1\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle) &= [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \rangle]r_1\langle \mathbf{a}_0 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle]r_1\langle \mathbf{a}_1 \rangle \\ &= -r_1\langle \mathbf{a}_0 \rangle + r_1\langle \mathbf{a}_1 \rangle \\ &= r_1(\langle \mathbf{a}_1 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle), \end{aligned}$$

e que,

$$\begin{aligned} \partial(r_2\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle) &= [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \rangle]r_2\langle \mathbf{a}_0 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle]r_2\langle \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= -r_2\langle \mathbf{a}_0 \rangle + r_2\langle \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= r_2(\langle \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \partial(\mathbf{d}_1) &= r_1(\langle \mathbf{a}_1 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle) + r_2(\langle \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle) \\ &= \partial(r_1\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle + r_2\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle), \end{aligned}$$

ou seja, a classe de equivalência de  $\mathbf{c}_0$  são os elementos da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 - \partial(\mathbf{d}_1) &= \mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_0 \rangle + \mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_1 \rangle + \mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_2 \rangle - r_1(\langle \mathbf{a}_1 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle) - r_2(\langle \mathbf{a}_2 \rangle - \langle \mathbf{a}_0 \rangle) \\ &= (\mathbf{g}_0 + r_1 + r_2)\langle \mathbf{a}_0 \rangle + (\mathbf{g}_1 - r_1)\langle \mathbf{a}_1 \rangle + (\mathbf{g}_2 - r_2)\langle \mathbf{a}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Tomando  $r_1 = \mathbf{g}_1$  e  $r_2 = \mathbf{g}_2$ , temos que

$$\mathbf{c}_0 - \partial(\mathbf{d}_1) = (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2)\langle \mathbf{a}_0 \rangle \Rightarrow \mathbf{c}_0 - (\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2)\langle \mathbf{a}_0 \rangle = \partial(\mathbf{d}_1),$$

Isto é, toda 0-cadeia é homóloga a um múltiplo inteiro de  $\langle \mathbf{a}_0 \rangle$ , logo  $H_0(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z}$ .

(ii) Para dimensão 1, temos que se  $\mathbf{c}_1 \in \mathbf{C}_1(\mathbf{K})$  então

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle + \mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle + \mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle,$$

com  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $\mathbf{C}_1(\mathbf{K}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Daí, para  $\mathbf{c}_1 \in \mathbf{Z}_1(\mathbf{K})$ , vale

$$\begin{aligned} \partial(\mathbf{c}_1) &= \partial(\mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle) + \partial(\mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle) + \partial(\mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle) \\ &= [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \rangle]\mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_0 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle]\mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_1 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle]\mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_2 \rangle \\ &+ [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \rangle]\mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_0 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle]\mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_1 \rangle + [\langle \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle]\mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_2 \rangle \\ &+ [\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_0 \rangle]\mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_0 \rangle + [\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_1 \rangle]\mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_1 \rangle + [\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \rangle, \langle \mathbf{a}_2 \rangle]\mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_2 \rangle \\ &= (-\mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_0 \rangle + \mathbf{g}_0\langle \mathbf{a}_1 \rangle) + (-\mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_0 \rangle + \mathbf{g}_1\langle \mathbf{a}_2 \rangle) + (-\mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_1 \rangle + \mathbf{g}_2\langle \mathbf{a}_2 \rangle) \\ &= (-\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_1)\langle \mathbf{a}_0 \rangle + (\mathbf{g}_0 - \mathbf{g}_2)\langle \mathbf{a}_1 \rangle + (\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_1)\langle \mathbf{a}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Logo  $\partial(c_1) = 0$  se, e somente se,  $g_0 = -g_1$ ,  $g_0 = g_2$  e  $g_2 = -g_1$ . Ou seja,  $g_0 = g_2 = -g_1$ , assim

$$\partial(c_1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = g_0(\langle a_0 a_1 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle).$$

Portanto, os elementos de  $Z_1(K)$  são os múltiplos inteiros de  $\langle a_0 a_1 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle$ , donde conclui-se que,  $Z_1(K) \simeq \mathbb{Z}$ . Veja que, se  $c_2 \in C_2(K)$ , temos que  $c_2 = g_0 \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ . Daí,

$$\begin{aligned} \partial(c_2) &= \partial(g_0 \langle a_0 a_1 a_2 \rangle) \\ &= [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle] g_0 \langle a_0 a_1 \rangle \\ &+ [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle] g_0 \langle a_0 a_2 \rangle \\ &+ [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle] g_0 \langle a_1 a_2 \rangle \\ &= g_0 \langle a_0 a_1 \rangle - g_0 \langle a_0 a_2 \rangle + g_0 \langle a_1 a_2 \rangle \\ &= g_0(\langle a_0 a_1 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle). \end{aligned}$$

Deste modo,  $B_1(K)$  é constituído dos múltiplos inteiros de  $\langle a_0 a_1 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle$ , ou seja,  $B_1(K) \simeq \mathbb{Z}$  e então  $B_1(K) = Z_1(K)$ . Daí, para todo  $c_1 \in C_1(K)$  temos que  $c_1 - 0 = c_1 \in B_1(K)$ , onde  $0 = e_1$ . Logo, todo 1-ciclo é homólogo a 1-cadeia nula, então  $H_1(K) \simeq 0$ .

(iii) Para dimensão 2, se  $c_2 \in C_2(K)$  então  $c_2 = g_0 \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$ , para algum  $g_0 \in \mathbb{Z}$ , logo  $C_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ . Se  $c_2 \in Z_2(K)$ , então

$$\partial(c_2) = 0 \Rightarrow \partial(g_0 \langle a_0 a_1 a_2 \rangle) = 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial(g_0 \langle a_0 a_1 a_2 \rangle) \\ &= [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle] g_0 \langle a_0 a_1 \rangle + [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_0 a_2 \rangle] g_0 \langle a_0 a_2 \rangle \\ &+ [\langle a_0 a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle] g_0 \langle a_1 a_2 \rangle \\ &= g_0 \langle a_0 a_1 \rangle - g_0 \langle a_0 a_2 \rangle + g_0 \langle a_1 a_2 \rangle \\ &= g_0(\langle a_0 a_1 \rangle - \langle a_0 a_2 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle). \end{aligned}$$

Assim,  $g_0 = 0$  e o único 2-ciclo é a 2-cadeia nula,  $Z_2(K) = \{0\}$ , logo,  $Z_2(K) \simeq 0$ . Como  $K$  não possui  $n$ -simplexos, para  $n \geq 3$ , temos  $B_2(K) \simeq 0$ . Por fim, como  $Z_2(K) \simeq 0$  temos  $H_2(K) \simeq 0$ .

□

Veremos a seguir a definição de  $n$ -variedade topológica e alguns exemplos para ilustrar essa definição, mais detalhes e exemplos sobre  $n$ -variedades podem ser vistas em [8].

**Definição 18:** Dizemos que um espaço topológico de Hausdorff é uma  **$n$ -variedade topológica** se, para cada ponto, existe um aberto que o contém e que é homeomorfo a uma bola aberta do  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 13:** Por um **Toro** entendemos o espaço quociente  $T^2 = \frac{I \times I}{\sim}$ , onde  $I = [0, 1]$  e " $\sim$ " é a relação de equivalência definida por  $(0, y) \sim (1, y)$ ,  $(x, 0) \sim (x, 1)$  e  $(x, y) \sim (x, y)$  para  $(x, y) \in \text{Int}(I \times I)$ . O Toro bidimensional  $T^2$  é uma 2-variedade.

**Exemplo 14:** Por uma **garrafa de Klein** entenderemos o espaço quociente  $KB = \frac{I \times I}{\sim}$ , onde  $I = [0, 1]$  e " $\sim$ " é definida por  $(x, 0) \sim (x, 1)$ ,  $(0, y) \sim (1, 1-y)$  e  $(x, y) \sim (x, y)$  para  $(x, y) \in \text{Int}(I \times I)$ . Uma garrafa de Klein  $KB$  é uma 2-variedade.

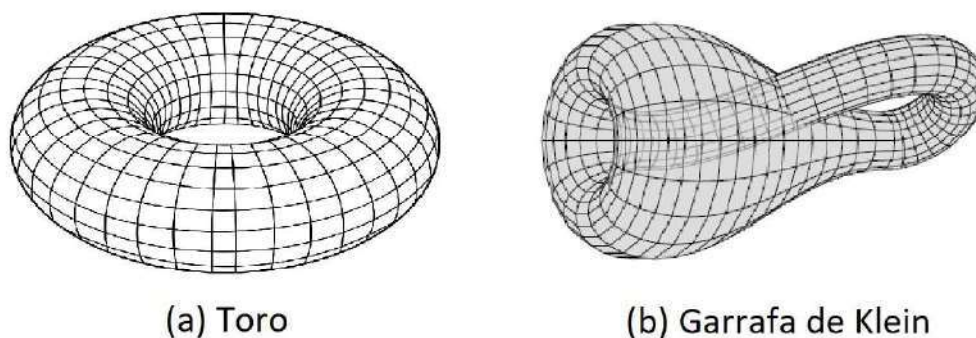


Figura 1.9: Toro e Garrafa de Klein

**Exemplo 15:** Por um plano projetivo entenderemos o espaço quociente  $P^2 = \frac{S^2}{x \sim (-x)}$ , onde  $S^2$  é a esfera unitária contida em  $\mathbb{R}^3$ . Um plano projetivo  $P^2$  é uma 2-variedade.

Um superfície é um 2-variedade compacta e conexa. As superfícies mais conhecidas são a esfera  $S^2$ , o toro  $T^2$ , a garrafa de Klein  $KB$ , o plano projetivo  $P^2$ , além daquelas obtidas destas por somas conexas.

**Definição 19:** Uma **n-pseudovariiedade** é um espaço homeomorfo a um complexo  $K$  com as seguintes propriedades:

- 1 Cada simplexo de  $K$  é uma face de algum  $n$ -simplexo de  $K$ .
- 2 Cada  $(n - 1)$ -simplexo é face de exatamente  $n$ -simplexos de  $K$ .
- 3 Dado um par  $\sigma_1^n$  e  $\sigma_2^n$  de  $n$ -simplexos de  $K$ , existe uma sequência de  $n$ -simplexos começando em  $\sigma_1^n$  e terminando em  $\sigma_2^n$  tal que quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência tem uma  $(n - 1)$  face em comum.

Para  $n = 2$ , a definição 19 é equivalente a uma triangulação de uma superfície.

Vejamos a seguir alguns exemplos de superfícies que voltarão a ser estudadas no capítulo 2. Para mais exemplos indicamos as referências [3] e [8].

**Exemplo 16:** Uma (existem outras) triangulação para o toro está feita abaixo. Esta é uma triangulação composta por 9 vértices.

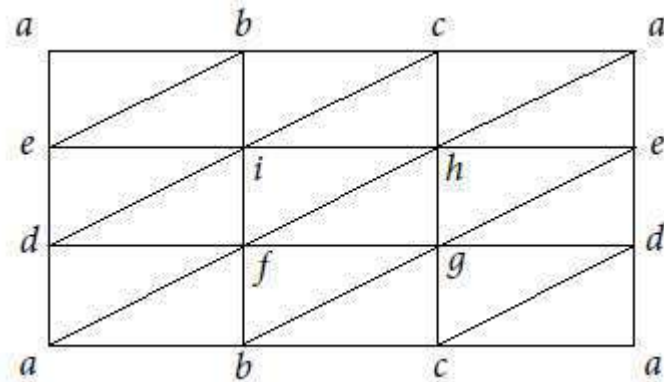


Figura 1.10: Triangulação do Toro

**Exemplo 17:** Por uma faixa de Möbius entenderemos o espaço quociente  $FM = \frac{I \times I}{(0,y) \sim (1,1-y)}$ , onde  $I = [0, 1]$  e cada ponto  $(x, y) \in (0, 1) \times [0, 1]$  é identificado somente com  $(x, y)$ .

A seguinte triangulação para a faixa de Möbius não é uma 2-pseudovariiedade.

Isto ocorre pois existem 1-simplexos que são faces de apenas um único 2-simplexo, a exemplo do  $\langle cd \rangle$  que só é face do  $\langle cdf \rangle$ . Logo a triangulação acima não satisfaz a condição

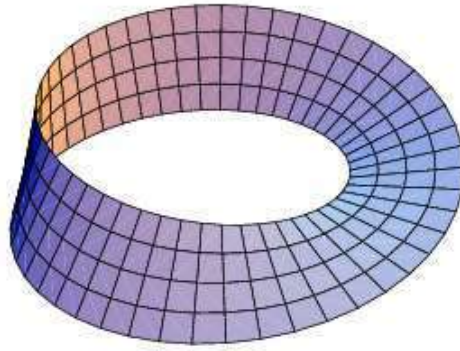


Figura 1.11: Faixa de Möebius

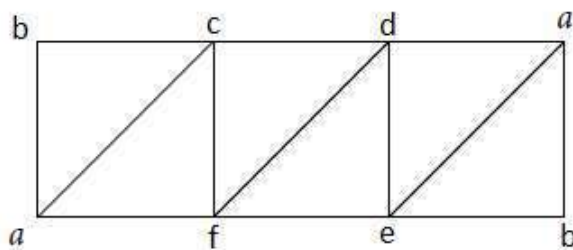


Figura 1.12: Triangulação da Faixa de Möebius

(2) da definição 19, de  $n$ -pseudovarietade.

**Definição 20:** Seja  $K$  uma  $n$ -pseudovarietade. Para cada  $(n-1)$ -simplexo  $\sigma^{n-1} \in K$ , consideremos  $\sigma_1^n$  e  $\sigma_2^n$  os dois  $n$ -simplexos de  $K$  que tem  $\sigma^{n-1}$  como face. Uma **orientação para  $K$**  com a propriedade  $[\sigma_1^n, \sigma^{n-1}] = -[\sigma_2^n, \sigma^{n-1}]$  para cada  $(n-1)$ -simplexo  $\sigma^{n-1}$  de  $K$  é chamada uma orientação coerente de  $K$ . Uma  **$n$ -pseudovarietade é orientável** se a ela pode ser associada uma orientação coerente. Caso contrário, ela é não orientável.

A seguir apresentamos alguns exemplos nos quais estabelecemos se o toro, a faixa de Möebius e o plano projetivo são orientáveis.

**Exemplo 18:** Seja  $\mathbb{T}^2$  o toro e abaixo a sua triangulação com nove vértices com orientação induzida por  $a < b < c < d < e < f < g < h < i$ .

Em todas as 1-face temos coerência na orientação. Como por exemplo, considere a 1-face  $\langle de \rangle$ . Note que  $+\langle dei \rangle$  e  $+\langle edg \rangle$  são as orientações positivas dos 2-simplexos que

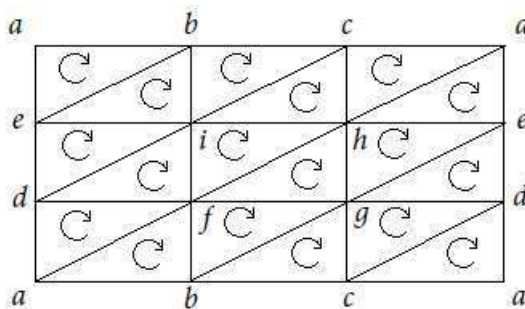


Figura 1.13: Triangulação do Toro com orientação

tem  $\langle de \rangle$  como 1-face. Daí,  $[+\langle dei \rangle, \langle de \rangle] = 1$  e  $[+\langle edg \rangle, \langle de \rangle] = -1$ . Portanto, o toro é orientável.

**Exemplo 19:** Seja a triangulação da faixa de Möebius dada abaixo

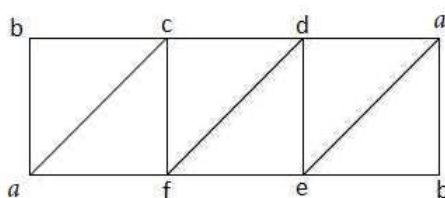


Figura 1.14: Triangulação da Faixa de Möebius

Se tentarmos dar uma orientação coerente então teremos

$$[\langle abc \rangle, \langle ac \rangle] = -[\langle acf \rangle, \langle ac \rangle], \quad [\langle cdf \rangle, \langle fd \rangle] = -[\langle fde \rangle, \langle fd \rangle],$$

$$[\langle aed \rangle, \langle ea \rangle] = -[\langle abe \rangle, \langle ea \rangle].$$

Logo, as orientações dos 2-simplexos tem que ser as seguintes, ou todas opostas,  $+\langle abc \rangle, +\langle acf \rangle, +\langle fcd \rangle, +\langle fde \rangle, +\langle eda \rangle, +\langle eab \rangle$ . Ou seja,

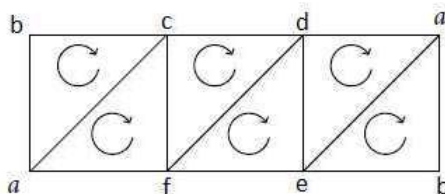


Figura 1.15: Triangulação da Faixa de Möebius com orientação

Porém  $[+\langle abc \rangle, \langle ab \rangle] = 1$  e  $[+\langle eab \rangle, \langle ab \rangle] = 1$ , donde concluímos que esta triangulação não é orientável. Se escolhermos uma outra triangulação

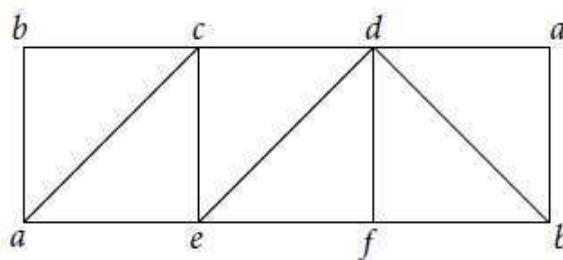


Figura 1.16: Outra triangulação da Faixa de Möebius

temos que ter a orientação

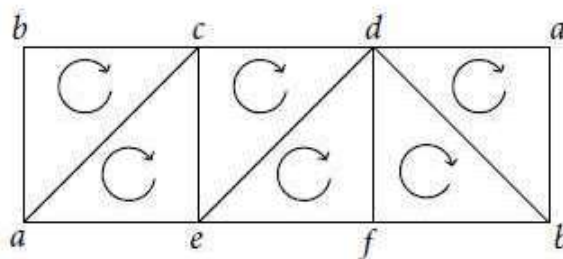


Figura 1.17: Outra triangulação da Faixa de Möebius com orientação

onde  $[+\langle abc \rangle, \langle ab \rangle] = [+\langle abd \rangle, \langle ab \rangle] = 1$ , ou então,

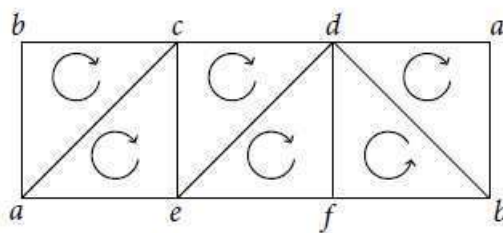


Figura 1.18: Outra triangulação da Faixa de Möebius com outra orientação

onde  $[+\langle edf \rangle, \langle df \rangle] = [+\langle dfb \rangle, \langle df \rangle] = 1$ . Portanto a faixa de Möebius não é orientável, pois não temos uma triangulação na qual possa ser associada uma orientação coerente.

Um fato interessante sobre a faixa de Möebius exemplo que trataremos abaixo é que quando usamos uma operação chamada de soma conexa, temos que a soma conexa de duas



faixas de Möbius nos dá uma garrafa de Klein. Não falaremos disso nessa dissertação, mas isto pode ser conferido na referência [2].

**Exemplo 20:** Consideremos o plano projetivo  $\mathbb{P}^2$  com a seguinte triangulação:

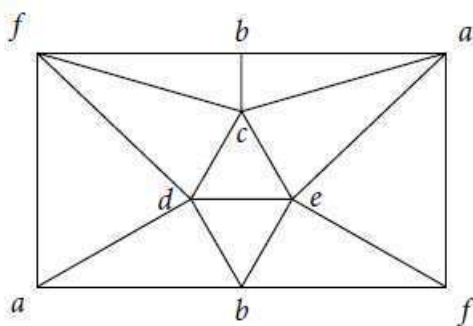


Figura 1.19: Triangulação do plano projetivo

Para conseguirmos uma orientação coerente, devemos ter

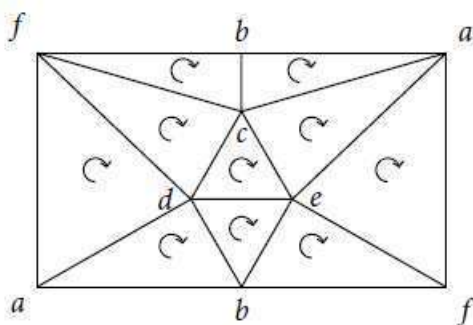


Figura 1.20: Triangulação do plano projetivo com orientação

para que os números de incidência nas arestas internas se anulem. Ou então podemos ter também a seguinte orientação

No caso 1, temos que  $[+\langle \mathbf{afd} \rangle, \langle \mathbf{af} \rangle] = [+\langle \mathbf{eaf} \rangle, \langle \mathbf{af} \rangle] = 1$ . Logo essa orientação não é coerente.

No caso 2, temos  $[+\langle \mathbf{fad} \rangle, \langle \mathbf{af} \rangle] = [+\langle \mathbf{fae} \rangle, \langle \mathbf{af} \rangle] = -1$ , implicando que essa orientação também não é coerente, e assim temos que  $\mathbb{P}^2$  não é orientável.

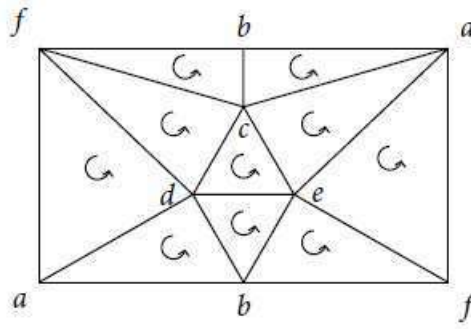


Figura 1.21: Triangulação do plano projetivo com outra orientação

Para encerrar este capítulo iremos provar um resultado que nos dá condições para determinar o grupo de homologia de grau  $n$  de uma  $n$ -pseudovarietade. Tal resultado irá nos poupar do trabalho de fazer os cálculos para o grupo de homologia de grau  $n$  o que algumas vezes pode ser muito trabalhoso.

**Proposição 1:** Se  $K$  é uma  $n$ -pseudovarietade orientável então  $H_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

**Prova:** Se  $K$  é orientável, então associamos a  $K$  uma orientação coerente. Sejam  $\sigma_i^n$ ,  $i = 0, \dots, \alpha_n$ , os  $n$ -simplexos de  $K$  e  $\alpha_{n-1} + 1$  a quantidade de  $(n - 1)$ -simplexos de  $K$ . Daí, para cada  $i = 0, \dots, \alpha_n$  denotamos os  $(n - 1)$ -simplexos da seguinte forma,  $\sigma_{ij}^{n-1}$ , onde  $j = 0, \dots, \alpha_{n-1}$ , tal que se  $\sigma_j^n$  é um  $n$ -simplexo de  $K$  e  $j \neq i$  implica  $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n \neq \emptyset$ , então escolhemos  $\sigma_{ij}^{n-1} = \sigma_i^n \cap \sigma_j^n$ . Para os demais  $(n - 1)$ -simplexos que não são faces de  $\sigma_i^n$ , escolha qualquer outro índice em  $\{0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ . Veja que, se  $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n \neq \emptyset$  então

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n-1} &= \sigma_i^n \cap \sigma_j^n \\ &= \sigma_j^n \cap \sigma_i^n \\ &= \sigma_{ji}^{n-1}. \end{aligned}$$

Além disso,  $[\sigma_i^n, \sigma_{ii}^{n-1}] = 0$  para todo  $i = 0, \dots, \alpha_n$  e como a orientação é coerente temos  $[\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] = -[\sigma_j^n, \sigma_{ji}^{n-1}]$ . Seja agora  $z$  uma  $n$ -cadeia, logo existem  $g_i$ ,  $i = 0, \dots, \alpha_n$ , inteiros tais que

$$z = \sum_{i=0}^{\alpha_n} g_i \sigma_i^n \Rightarrow \partial(z) = \sum_{i=0}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \partial(z) &= \sum_{i=0}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_n} \sum_{j=i+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_n} [\sigma_i^n, \sigma_{ii}^{n-1}] g_i \sigma_{ii}^{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, trocando  $i$  por  $j$  no segundo somatório duplo e como  $[\sigma_i^n, \sigma_{ii}^{n-1}] = 0$  temos

$$\begin{aligned} \partial(z) &= \sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} + \sum_{j=0}^{\alpha_n} \sum_{i=j+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_j^n, \sigma_{ji}^{n-1}] g_j \sigma_{ji}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} - \sum_{j=0}^{\alpha_n} \sum_{i=j+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_j \sigma_{ij}^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

A igualdade ocorre pois para os  $(n-1)$ -simplexos  $\sigma_{ik}^{n-1}$  que não são faces de  $\sigma_i^n$ , temos que  $\sigma_{ki}^{n-1}$  não é face de  $\sigma_k^n$ , logo

$$[\sigma_i^n, \sigma_{ik}^{n-1}] = [\sigma_k^n, \sigma_{ki}^{n-1}] = 0 \Rightarrow [\sigma_i^n, \sigma_{ik}^{n-1}] g_i \sigma_{ik}^{n-1} = -[\sigma_k^n, \sigma_{ki}^{n-1}] g_k \sigma_{ki}^{n-1}.$$

Agora, se escrevermos  $a_{ij} = [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}]$ , temos a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0\alpha_n} & \cdots & a_{0\alpha_{n-1}} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\alpha_n} & \cdots & a_{1\alpha_{n-1}} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\alpha_n} & \cdots & a_{2\alpha_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\alpha_n 0} & a_{\alpha_n 1} & a_{\alpha_n 2} & \cdots & a_{\alpha_n \alpha_n} & \cdots & a_{\alpha_n \alpha_{n-1}} \end{bmatrix}$$

onde os termos

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] \quad e \quad \sum_{j=0}^{\alpha_n} \sum_{i=j+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}]$$

representam a soma dos elementos abaixo da diagonal formada pelos termos  $a_{ii}$  pois  $[\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] = 0$  para  $i > \alpha_n$  visto que os índices dos  $n$ -simplexos variam de 0 á  $\alpha_n$ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] = \sum_{j=0}^{\alpha_n} \sum_{i=j+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}],$$

então pela igualdade (1.1) e o argumento acima

$$\begin{aligned} \partial(z) &= \sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j=0}^{i-1} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_i \sigma_{ij}^{n-1} - \sum_{j=0}^{\alpha_n} \sum_{i=j+1}^{\alpha_{n-1}} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] g_j \sigma_{ij}^{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha_n} \sum_{j < i} [\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}] (g_i - g_j) \sigma_{ij}^{n-1}. \end{aligned}$$

Além disso, note que na soma anterior para cada  $(n - 1)$ -simplexo,  $\sigma_{ij}^{n-1}$ ,  $j < i$ , ele só aparece em uma única parcela na qual o número de incidência  $[\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}]$  é não nulo, pois ele só é face de dois  $n$ -simplexos e os  $[\sigma_j^n, \sigma_{ji}^{n-1}]$ ,  $[\sigma_i^n, \sigma_{ij}^{n-1}]$  não estão no somatório. Assim,  $z$  é um  $n$ -ciclo se, e somente se,  $\partial(z) = 0$  se, e somente se,  $g_i - g_j = 0$ , para todo  $i, j = 0, \dots, \alpha_n$ . Logo,  $g_i = g_j = g$ , se, e somente se,  $z = g \sum_{i=0}^{\alpha_n} \sigma_i^n$ .

Portanto,  $Z_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ . Como a dimensão  $n$  é a dimensão de  $K$ , tem-se  $B_n(K) \simeq 0$ , pois não existem  $(n + 1)$ -simplexos em  $K$ . Daí, como  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ , tem-se que  $H_n(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

□

# Capítulo 2

## Cálculo de alguns grupos de homologia

Neste capítulo, apresentamos o cálculo dos grupos de homologia de alguns exemplos como a Faixa de Möbius e o Plano Projetivo. Nesse capítulo usamos principalmente a referência [2].

**Exemplo 21:** Seja a faixa de Möbius  $FM$ ,

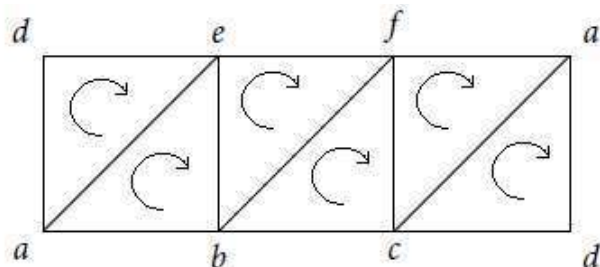


Figura 2.1: Triangulação da Faixa de Möbius

com orientação induzida por  $a < b < c < d < e < f$ . Como  $(FM)$  não é orientável, não podemos usar a proposição 1 para determinar  $H_2(FM)$ , então vamos calcular  $H_2(FM)$  diretamente. Como não há 3-simplexos em  $FM$ , temos que  $B_2(FM) = 0$ . Agora vamos calcular  $Z_2(FM)$ . Se  $z \in C_2(FM)$ , existem  $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \in \mathbb{Z}$ , tais que

$$z = g_0\langle ade \rangle + g_1\langle abe \rangle + g_2\langle bef \rangle + g_3\langle bcf \rangle + g_4\langle acf \rangle + g_5\langle acd \rangle.$$

Então  $z$  é 2-ciclo se, e somente se,  $\partial(z) = 0$ , onde

$$\begin{aligned}
 \partial(z) &= g_0(\langle ad \rangle + \langle de \rangle - \langle ae \rangle) + g_1(\langle ab \rangle + \langle be \rangle - \langle ae \rangle) + g_2(\langle be \rangle + \langle ef \rangle - \langle bf \rangle) \\
 &+ g_3(\langle bc \rangle + \langle cf \rangle - \langle bf \rangle) + g_4(\langle ac \rangle + \langle cf \rangle - \langle af \rangle) + g_5(\langle ac \rangle + \langle cd \rangle - \langle ad \rangle) \\
 &= (g_0 - g_5)\langle ad \rangle + g_0\langle de \rangle + (-g_0 - g_1)\langle ae \rangle + g_1\langle ab \rangle + (g_1 + g_2)\langle be \rangle + g_2\langle ef \rangle \\
 &+ (-g_2 - g_3)\langle bf \rangle + g_3\langle bc \rangle + (g_3 + g_4)\langle cf \rangle + (g_4 + g_5)\langle ac \rangle - g_4\langle af \rangle + g_5\langle cd \rangle.
 \end{aligned}$$

Deste modo  $\partial(z) = 0$  se, e somente se,  $g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 0$ . Portanto  $\partial(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ . Logo  $Z_2(\text{FM}) = 0$ , como  $H_2(\text{FM}) = Z_2(\text{FM})/B_2(\text{FM})$  tem-se  $H_2(\text{FM}) = 0$ . Agora considere uma 1-cadeia,

$$\begin{aligned}
 z &= g_0\langle ad \rangle + g_1\langle ab \rangle + g_2\langle ae \rangle + g_3\langle de \rangle + g_4\langle be \rangle + g_5\langle bc \rangle + g_6\langle bf \rangle + g_7\langle ef \rangle + g_8\langle cf \rangle \\
 &+ g_9\langle cd \rangle + g_{10}\langle ac \rangle + g_{11}\langle af \rangle.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \partial(z) &= g_0(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + g_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + g_2(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + g_3(\langle e \rangle - \langle d \rangle) \\
 &+ g_4(\langle e \rangle - \langle b \rangle) + g_5(\langle c \rangle - \langle b \rangle) + g_6(\langle f \rangle - \langle b \rangle) + g_8(\langle f \rangle - \langle c \rangle) \\
 &+ g_9(\langle d \rangle - \langle c \rangle) + g_{10}(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + g_{11}(\langle f \rangle - \langle a \rangle). \\
 &= \langle a \rangle(-g_0 - g_1 - g_2 - g_{10} - g_{11}) + \langle b \rangle(g_1 - g_4 - g_5 - g_6) \\
 &+ \langle c \rangle(g_5 - g_8 - g_9 + g_{10}) + \langle d \rangle(g_0 - g_3 + g_9) + \langle e \rangle(g_2 + g_3 + g_4 - g_7) \\
 &+ \langle f \rangle(g_6 + g_7 + g_8 + g_{11}).
 \end{aligned}$$

Para  $z \in C_1(\text{FM})$  ser 1-ciclo temos que ter  $\partial(z) = 0$ . Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -g_0 - g_1 - g_2 - g_{10} - g_{11} = 0 \\
 g_1 - g_4 - g_5 - g_6 = 0 \\
 g_5 - g_8 - g_9 + g_{10} = 0 \\
 g_0 - g_3 + g_9 = 0 \\
 g_2 + g_3 + g_4 - g_7 = 0 \\
 g_6 + g_7 + g_8 + g_{11} = 0.
 \end{array} \right.$$

Assim,

$$\begin{cases} g_0 = g_3 - g_9 \\ g_1 = g_4 - g_7 + g_9 - g_{10} - g_{11} \\ g_2 = -g_3 - g_4 + g_7 \\ g_5 = g_8 + g_9 - g_{10} \\ g_6 = -g_7 - g_8 - g_{11}. \end{cases}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} z &= (g_3 - g_4)\langle \mathbf{ad} \rangle + (g_4 - g_7 + g_9 - g_{10} - g_{11})\langle \mathbf{ab} \rangle + (-g_3 - g_4 + g_7)\langle \mathbf{ae} \rangle + g_3\langle \mathbf{de} \rangle \\ &+ g_4\langle \mathbf{be} \rangle + (g_8 + g_9 - g_{10})\langle \mathbf{bc} \rangle + (-g_7 - g_8 - g_{11})\langle \mathbf{bf} \rangle + g_7\langle \mathbf{ef} \rangle + g_8\langle \mathbf{cf} \rangle + g_9\langle \mathbf{cd} \rangle \\ &+ g_{10}\langle \mathbf{ac} \rangle + g_{11}\langle \mathbf{af} \rangle \\ &= g_3(\langle \mathbf{ad} \rangle - \langle \mathbf{ae} \rangle + \langle \mathbf{de} \rangle) + g_4(\langle \mathbf{ab} \rangle - \langle \mathbf{ae} \rangle + \langle \mathbf{be} \rangle) \\ &+ g_7(-\langle \mathbf{ab} \rangle - \langle \mathbf{bf} \rangle + \langle \mathbf{ef} \rangle + \langle \mathbf{ae} \rangle) + g_8(\langle \mathbf{bc} \rangle - \langle \mathbf{bf} \rangle + \langle \mathbf{cf} \rangle) \\ &+ g_9(\langle \mathbf{bc} \rangle - \langle \mathbf{ad} \rangle + \langle \mathbf{cd} \rangle + \langle \mathbf{ab} \rangle) + g_{10}(-\langle \mathbf{ab} \rangle - \langle \mathbf{bc} \rangle + \langle \mathbf{ac} \rangle) \\ &+ g_{11}(-\langle \mathbf{ab} \rangle - \langle \mathbf{bf} \rangle + \langle \mathbf{af} \rangle) \\ &= \partial(g_3\langle \mathbf{ade} \rangle) + \partial(g_4\langle \mathbf{abe} \rangle) + \partial(g_8\langle \mathbf{bcf} \rangle) - g_7(-\langle \mathbf{ab} \rangle - \langle \mathbf{bf} \rangle + \langle \mathbf{ef} \rangle + \langle \mathbf{ae} \rangle + \langle \mathbf{af} \rangle \\ &- \langle \mathbf{af} \rangle) + g_9(\langle \mathbf{ab} \rangle + \langle \mathbf{bc} \rangle + \langle \mathbf{cd} \rangle - \langle \mathbf{ad} \rangle) \\ &= \partial(g_3\langle \mathbf{ade} \rangle + g_4\langle \mathbf{abe} \rangle + g_8\langle \mathbf{bcf} \rangle - g_{10}\langle \mathbf{abc} \rangle - g_{11}\langle \mathbf{abf} \rangle - g_7\langle \mathbf{abf} \rangle + g_7\langle \mathbf{aef} \rangle) \\ &+ g_9(\langle \mathbf{ab} \rangle + \langle \mathbf{bc} \rangle + \langle \mathbf{cd} \rangle - \langle \mathbf{ad} \rangle). \end{aligned}$$

Considerando a 1-cadeia  $k = \langle \mathbf{ab} \rangle + \langle \mathbf{bc} \rangle + \langle \mathbf{cd} \rangle - \langle \mathbf{ad} \rangle$ , temos que

$$\begin{aligned} \partial(k) &= \langle \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{c} \rangle - \langle \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{a} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

sendo assim  $k \in Z_1(\text{FM})$ . Além disso, dado  $z \in Z_1(\text{FM})$  vale

$$z - g_9k = \partial(g_3\langle \mathbf{ade} \rangle + g_4\langle \mathbf{abe} \rangle + g_7\langle \mathbf{aef} \rangle - g_7\langle \mathbf{abf} \rangle + g_8\langle \mathbf{bcf} \rangle - g_{10}\langle \mathbf{abc} \rangle - g_{11}\langle \mathbf{abf} \rangle).$$

Ou seja, todo 1-ciclo em  $Z_1(\text{FM})$  é homólogo a um múltiplo de  $k$ . Assim,  $H_1(\text{FM}) = \{[gk] \mid g \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ .

Agora vamos tratar do  $H_0(\text{FM})$ . Seja  $z \in C_0(\text{FM})$ , então existem  $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in \mathbb{Z}$  tais que

$$z = r_0\langle \mathbf{a} \rangle + r_1\langle \mathbf{b} \rangle + r_2\langle \mathbf{c} \rangle + r_3\langle \mathbf{d} \rangle + r_4\langle \mathbf{e} \rangle + r_5\langle \mathbf{f} \rangle.$$

Como para todo  $z \in C_0(\text{FM})$  tem-se  $\partial(z) = 0$ , então  $Z_0(\text{FM}) = C_0(\text{FM})$ . Agora seja  $w \in C_1(\text{FM})$ , segue que

$$w = g_0\langle ad \rangle + g_1\langle ab \rangle + g_2\langle ae \rangle + g_3\langle de \rangle + g_4\langle be \rangle + g_5\langle bc \rangle + g_6\langle bf \rangle + g_7\langle ef \rangle + g_8\langle cf \rangle \\ + g_9\langle cd \rangle + g_{10}\langle ac \rangle + g_{11}\langle af \rangle.$$

Onde,

$$\begin{aligned} \partial(w) &= g_0(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + g_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + g_2(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + g_3(\langle e \rangle - \langle d \rangle) + g_4(\langle e \rangle - \langle b \rangle) \\ &+ g_5(\langle c \rangle - \langle b \rangle) + g_6(\langle f \rangle - \langle b \rangle) + g_7(\langle f \rangle - \langle e \rangle) + g_8(\langle f \rangle - \langle c \rangle) + g_9(\langle d \rangle - \langle c \rangle) \\ &+ g_{10}(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + g_{11}(\langle f \rangle - \langle a \rangle) \\ &= \langle a \rangle(-g_0 - g_1 - g_2 - g_{10} - g_{11}) + \langle b \rangle(g_1 - g_4 - g_5 - g_6) + \langle c \rangle(g_5 - g_8 - g_9 \\ &+ g_{10}) + \langle d \rangle(g_0 - g_3 + g_9) + \langle e \rangle(g_2 + g_3 + g_4 - g_7) + \langle f \rangle(g_6 + g_7 + g_8 + g_{11}) \\ &= r_0\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle + r_4\langle e \rangle + r_5\langle f \rangle, \end{aligned}$$

e isto implica em

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = -g_0 - g_1 - g_2 - g_{10} - g_{11} \\ r_1 = g_1 - g_4 - g_5 - g_6 \\ r_2 = g_5 - g_8 - g_9 + g_{10} \\ r_3 = g_0 - g_3 + g_9 \\ r_4 = g_2 + g_3 + g_4 - g_7 \\ r_5 = g_6 + g_7 + g_8 + g_{11} \end{array} \right. .$$

Assim  $r_0 = -r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5$ , e então

$$\partial(w) = r_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + r_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + r_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + r_4(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + r_5(\langle f \rangle - \langle a \rangle).$$

Dado  $z \in Z_0(\text{FM})$  temos que  $z = \gamma_0\langle a \rangle + \gamma_1\langle b \rangle + \gamma_2\langle c \rangle + \gamma_3\langle d \rangle + \gamma_4\langle e \rangle + \gamma_5\langle f \rangle$ . Logo,

$$\begin{aligned} z - \partial(w) &= r_0\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle + r_4\langle e \rangle + r_5\langle f \rangle - r_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) \\ &- r_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) - r_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) - r_4(\langle e \rangle - \langle a \rangle) - r_5(\langle f \rangle - \langle a \rangle) \\ &= (r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\langle a \rangle. \end{aligned}$$

Com isto concluímos que  $z - (r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\langle a \rangle = \partial(w)$ , ou seja, todo  $z \in Z_0(\text{FM})$  é homólogo a um múltiplo inteiro de  $\langle a \rangle$ . Então  $H_0(\text{FM}) = \{[g\langle a \rangle] | g \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ .



**Exemplo 22:** Considere a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  com a triangulação  $K$  da figura abaixo e com a orientação induzida por  $\mathbf{a} < \mathbf{b} < \mathbf{c} < \mathbf{d}$ ,

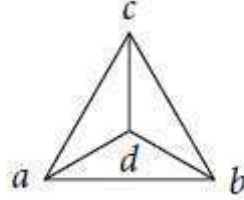


Figura 2.2: Triangulação da esfera

Calculemos  $H_2(K)$ . Veja que  $B_2(K) = 0$ , pois não há 3-simplexos em  $K$ . Agora seja  $z \in C_2(K)$ , então existem  $g_0, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Z}$ , tais que

$$z = g_0\langle abc \rangle + g_1\langle abd \rangle + g_2\langle acd \rangle + g_3\langle bcd \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \partial(z) &= g_0(\langle ab \rangle + \langle bc \rangle - \langle ac \rangle) + g_1(\langle ab \rangle + \langle bd \rangle - \langle ad \rangle) + g_2(\langle ac \rangle + \langle cd \rangle - \langle ad \rangle) \\ &\quad + g_3(\langle bc \rangle + \langle cd \rangle - \langle bd \rangle) \\ &= \langle ab \rangle(g_0 + g_1) + \langle bc \rangle(g_0 + g_3) + \langle ac \rangle(g_2 - g_0) + \langle bd \rangle(g_1 - g_3) \\ &\quad + \langle ad \rangle(-g_1 - g_2) + \langle ad \rangle(g_2 + g_3). \end{aligned}$$

Então para  $z \in Z_2(K)$ , temos que ter  $\partial(z) = 0$ . Logo

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0 + g_1 = 0 \\ g_0 + g_3 = 0 \\ g_2 - g_0 = 0 \\ g_1 - g_3 = 0 \\ -g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_3 = 0 \end{array} \right.$$

isso implica que  $g_0 = -g_1 = -g_3 = g_2$ . Assim,  $z = g_0(\langle abc \rangle - \langle abd \rangle + \langle acd \rangle - \langle bcd \rangle)$  e então  $Z_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ . Como  $B_2(K) = 0$ , temos que  $H_2(K) \simeq \mathbb{Z}$ .

Agora calculemos  $H_1(K)$ . Seja  $z \in C_1(K)$ , então existem  $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \in \mathbb{Z}$  tais que  $z = g_0\langle ab \rangle + g_1\langle ac \rangle + g_2\langle ad \rangle + g_3\langle bc \rangle + g_4\langle bd \rangle + g_5\langle cd \rangle$ . Donde,

$$\begin{aligned} \partial(z) &= g_0(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + g_1(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + g_2(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + g_3(\langle c \rangle - \langle b \rangle) + g_4(\langle d \rangle - \langle b \rangle) \\ &\quad + g_5(\langle d \rangle - \langle c \rangle) \\ &= \langle a \rangle(-g_0 - g_1 - g_2) + \langle b \rangle(g_0 - g_3 - g_4) + \langle c \rangle(g_1 + g_3 - g_5) + \langle d \rangle(g_2 + g_4 + g_5). \end{aligned}$$

Para que  $z \in Z_1(K)$ , temos que ter  $\partial(z) = 0$ . Logo,

$$\begin{cases} -g_0 - g_1 - g_2 = 0 \\ g_0 - g_3 - g_4 = 0 \\ g_1 + g_3 - g_5 = 0 \\ g_1 + g_3 - g_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_3 + g_4 = g_0 \\ g_5 - g_3 = g_1 \\ -g_5 - g_4 = g_2. \end{cases}$$

Com isto concluímos que

$$\begin{aligned} z &= (g_3 + g_4)\langle ab \rangle + (-g_3 + g_5)\langle ac \rangle + (-g_4 - g_5)\langle ad \rangle + g_3\langle bc \rangle + g_4\langle bd \rangle + g_5\langle cd \rangle \\ &= g_3(\langle ab \rangle - \langle ac \rangle + \langle bc \rangle) + g_4(\langle ab \rangle - \langle ad \rangle + \langle bd \rangle) + g_5(\langle ac \rangle - \langle ad \rangle + \langle cd \rangle) \\ &= \partial(g_3\langle abc \rangle + g_4\langle abd \rangle + g_5\langle acd \rangle) \end{aligned}$$

Assim, todo 1-ciclo é 1-bordo implicando que  $Z_1(K) \subset B_1(K) \Rightarrow Z_1(K) = B_1(K)$ .

Por fim, calculemos  $H_0(K)$ . Para todo  $z \in C_0(K)$ , temos  $\partial(z) = 0$  e então  $C_0(K) = Z_0(K)$ . Se  $z \in Z_0(K)$ , temos  $z = r_0\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle$ ,  $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$ . Seja agora  $w \in C_1(K)$ , então  $w = g_0\langle ab \rangle + g_1\langle ac \rangle + g_2\langle ad \rangle + g_3\langle bc \rangle + g_4\langle bd \rangle + g_5\langle cd \rangle$ . Daí

$$\begin{aligned} \partial(w) &= \langle a \rangle(-g_0 - g_1 - g_2) + \langle b \rangle(g_0 - g_3 - g_4) + \langle c \rangle(g_1 + g_3 - g_5) + \langle d \rangle(g_2 + g_4 + g_5) \\ &= r_0\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle, \end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{cases} -g_0 - g_1 - g_2 = r_0 \\ g_0 - g_3 - g_4 = r_1 \\ g_1 + g_3 - g_5 = r_2 \\ g_2 + g_4 + g_5 = r_3 \end{cases}$$

que implica que  $r_0 = -r_1 - r_2 - r_3$ . Então,

$$\begin{aligned} \partial(w) &= (-r_1 - r_2 - r_3)\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle \\ &= r_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + r_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + r_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z - \partial(w) &= r_0\langle a \rangle + r_1\langle b \rangle + r_2\langle c \rangle + r_3\langle d \rangle - r_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) - r_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) - r_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) \\ &= (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\langle a \rangle. \end{aligned}$$

A ultima igualdade implica que  $z - (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)\langle a \rangle = \partial(w)$ , então  $z \in Z_0(K)$  é homólogo a um múltiplo inteiro de  $\langle a \rangle$ . Portanto,  $H_0(K) = \{[g\langle a \rangle] | g \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ .

Para finalizar este capítulo iremos fazer o cálculo dos grupos de homologia do ultimo exemplo, o Plano Projetivo

**Exemplo 23:** Seja  $P^2$  o plano projetivo, representado pelo diagrama abaixo

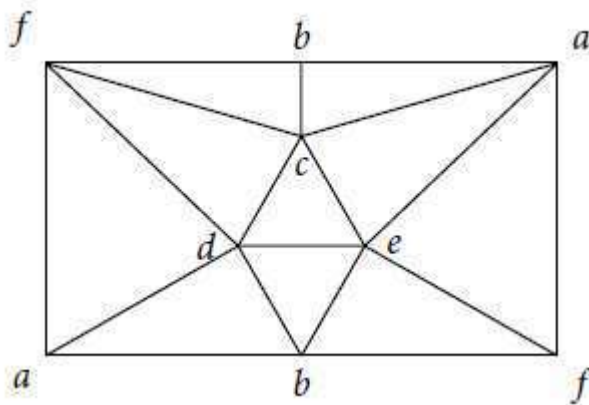


Figura 2.3: Triangulação do plano projetivo

com orientação induzida por  $a < b < c < d < e < f$ . Calculemos o  $H_2(P^2)$ . Como  $P^2$  não tem 3-simplexos, temos que  $B_2(P^2) \simeq 0$ . Seja  $z \in C_2(P^2)$ , logo

$$\begin{aligned} z &= g_0\langle abc \rangle + g_1\langle abd \rangle + g_2\langle ace \rangle + g_3\langle adf \rangle + g_4\langle aef \rangle + g_5\langle bef \rangle + g_6\langle bde \rangle + g_7\langle bcf \rangle \\ &+ g_8\langle cde \rangle + g_9\langle cdf \rangle. \end{aligned}$$

Para que  $z \in Z_2(\mathbb{P}^2)$ , devemos ter  $\partial(z) = 0$ . Agora observe que

$$\begin{aligned}
 \partial(z) &= g_0(\langle ab \rangle + \langle bc \rangle - \langle ac \rangle) + g_1(\langle ab \rangle + \langle bd \rangle - \langle ad \rangle) + g_2(\langle ac \rangle + \langle ce \rangle - \langle ae \rangle) \\
 &+ g_3(\langle ad \rangle + \langle df \rangle - \langle af \rangle) + g_4(\langle ae \rangle + \langle ef \rangle - \langle af \rangle) + g_5(\langle be \rangle + \langle ef \rangle - \langle bf \rangle) \\
 &+ g_6(\langle bd \rangle + \langle de \rangle - \langle be \rangle) + g_7(\langle bc \rangle + \langle cf \rangle - \langle bf \rangle) + g_8(\langle cd \rangle + \langle dc \rangle - \langle ce \rangle) \\
 &+ g_9(\langle cd \rangle + \langle df \rangle - \langle cf \rangle) \\
 &= \langle ab \rangle(g_0 + g_1) + \langle bc \rangle(g_0 + g_7) + \langle ac \rangle(-g_0 + g_2) + \langle bd \rangle(g_1 + g_6) \\
 &+ \langle ad \rangle(-g_1 + g_3) + \langle ce \rangle(g_2 - g_8) + \langle ae \rangle(-g_2 + g_4) + \langle df \rangle(g_3 + g_9) \\
 &+ \langle af \rangle(-g_3 - g_4) + \langle ef \rangle(g_4 + g_5) + \langle be \rangle(g_5 - g_6) + \langle bf \rangle(-g_5 - g_7) \\
 &+ \langle de \rangle(g_6 + g_8) + \langle cf \rangle(g_7 - g_9) + \langle cd \rangle(g_8 + g_9).
 \end{aligned}$$

Como,  $\partial(z) = 0$  se, e somente se,

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0 + g_1 = 0 \quad (\text{I}) \\ g_0 + g_7 = 0 \quad (\text{II}) \\ -g_0 + g_2 = 0 \quad (\text{III}) \\ g_1 + g_6 = 0 \quad (\text{IV}) \\ -g_1 + g_3 = 0 \quad (\text{V}) \\ g_2 - g_8 = 0 \quad (\text{VI}) \\ -g_2 + g_4 = 0 \quad (\text{VII}) \\ g_3 + g_9 = 0 \quad (\text{VIII}) \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} -g_3 - g_4 = 0 \quad (\text{IX}) \\ g_4 + g_5 = 0 \quad (\text{X}) \\ g_5 - g_6 = 0 \quad (\text{XI}) \\ -g_5 - g_7 = 0 \quad (\text{XII}) \\ g_6 + g_8 = 0 \quad (\text{XIII}) \\ g_7 - g_9 = 0 \quad (\text{XIV}) \\ g_8 + g_9 = 0 \quad (\text{XV}) \end{array} \right.$$

De (III), (VII), (X) e (XII) temos  $g_0 = g_2 = g_4 = -g_5 = g_7$ . Mas por (II)  $g_0 = -g_7$  então  $g_7 = 0$  e  $g_0 = g_2 = g_4 = g_5 = g_7 = 0$ . Daí de (I), (IV), (V), (VI) e (VIII)  $g_1 = 0$ ,  $g_3 = 0$ ,  $g_6 = 0$ ,  $g_8 = 0$  e  $g_9 = 0$ . Daí concluímos que  $0 = g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = g_7 = g_8 = g_9$ . Assim,  $z \in Z_2(\mathbb{P}^2)$  e então  $z = 0$ . Portanto  $H_2(\mathbb{P}^2) = \frac{Z_2(\mathbb{P}^2)}{B_2(\mathbb{P}^2)} = 0$ .

Calculemos o  $H_0(\mathbb{P}^2)$ . Sabemos que  $C_0(\mathbb{P}^2) = Z_0(\mathbb{P}^2)$ . Além disso, dado  $w \in C_1(\mathbb{P}^2)$  temos que

$$\begin{aligned}
 w &= g_0\langle ab \rangle + g_1\langle ac \rangle + g_2\langle ad \rangle + g_3\langle ae \rangle + g_4\langle af \rangle + g_5\langle bc \rangle + g_6\langle bd \rangle + g_7\langle be \rangle + g_8\langle bf \rangle \\
 &+ g_9\langle cd \rangle + g_{10}\langle ce \rangle + g_{11}\langle cf \rangle + g_{12}\langle de \rangle + g_{13}\langle df \rangle + g_{14}\langle ef \rangle.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \partial(w) &= g_0(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + g_1(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + g_2(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + g_3(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + g_4(\langle f \rangle - \langle a \rangle) \\
 &+ g_5(\langle c \rangle - \langle b \rangle) + g_6(\langle d \rangle - \langle b \rangle) + g_7(\langle e \rangle - \langle b \rangle) + g_8(\langle f \rangle - \langle b \rangle) + g_9(\langle d \rangle - \langle c \rangle) \\
 &+ g_{10}(\langle e \rangle - \langle c \rangle) + g_{11}(\langle f \rangle - \langle c \rangle) + g_{12}(\langle e \rangle - \langle d \rangle) + g_{13}(\langle f \rangle - \langle d \rangle) + g_{14}(\langle f \rangle - \langle e \rangle) \\
 &= \langle a \rangle(-g_0 - g_1 - g_2 - g_3 - g_4) + \langle b \rangle(g_0 - g_5 - g_6 - g_7 - g_8) \\
 &+ \langle c \rangle(g_1 + g_5 - g_9 - g_{10} - g_{11}) + \langle d \rangle(g_2 + g_6 + g_9 - g_{12} - g_{13}) \\
 &+ \langle e \rangle(g_3 + g_7 + g_{10} + g_{12} - g_{14}) + \langle f \rangle(g_4 + g_8 + g_{11} + g_{13} + g_{14}) \\
 &= r_0 \langle a \rangle + r_1 \langle b \rangle + r_2 \langle c \rangle + r_3 \langle d \rangle + r_4 \langle e \rangle + r_5 \langle f \rangle.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -g_0 - g_1 - g_2 - g_3 - g_4 = r_0 \\
 g_0 - g_5 - g_6 - g_7 - g_8 = r_1 \\
 g_1 + g_5 - g_9 - g_{10} - g_{11} = r_2 \\
 g_2 + g_6 + g_9 - g_{12} - g_{13} = r_3 \\
 g_3 + g_7 + g_{10} + g_{12} - g_{14} = r_4 \\
 g_4 + g_8 + g_{11} + g_{13} + g_{14} = r_5
 \end{array} \right.$$

Assim  $r_0 = -r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5$ , o que implica

$$\begin{aligned}
 \partial(w) &= (-r_1 - r_2 - r_3 - r_4 - r_5) \langle a \rangle + r_1 \langle b \rangle + r_2 \langle c \rangle + r_3 \langle d \rangle + r_4 \langle e \rangle + r_5 \langle f \rangle \\
 &= r_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + r_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + r_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + r_4(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + r_5(\langle f \rangle - \langle a \rangle).
 \end{aligned}$$

Daí, dado  $z = \alpha_0 \langle a \rangle + \alpha_1 \langle b \rangle + \alpha_2 \langle c \rangle + \alpha_3 \langle d \rangle + \alpha_4 \langle e \rangle + \alpha_5 \langle f \rangle$  tome  $w \in C_1(\mathbb{P}^2)$  tal que

$$\partial(w) = \alpha_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) + \alpha_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) + \alpha_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) + \alpha_4(\langle e \rangle - \langle a \rangle) + \alpha_5(\langle f \rangle - \langle a \rangle).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 z - \partial(w) &= \alpha_0 \langle a \rangle + \alpha_1 \langle b \rangle + \alpha_2 \langle c \rangle + \alpha_3 \langle d \rangle + \alpha_4 \langle e \rangle + \alpha_5 \langle f \rangle - \alpha_1(\langle b \rangle - \langle a \rangle) \\
 &- \alpha_2(\langle c \rangle - \langle a \rangle) - \alpha_3(\langle d \rangle - \langle a \rangle) - \alpha_4(\langle e \rangle - \langle a \rangle) - \alpha_5(\langle f \rangle - \langle a \rangle) \\
 &= (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \langle a \rangle,
 \end{aligned}$$

e isso implica que  $z - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \langle a \rangle = \partial(w)$ . Assim, todo  $z \in Z_0(\mathbb{P}^2)$  é homólogo a um múltiplo inteiro de  $\langle a \rangle$ . Portanto,  $H_0(\mathbb{P}^2) = \{[g \langle a \rangle] | g \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ .

## Capítulo 3

# O grupo de homologia como invariante topológico

Neste capítulo, apresentamos o conceito de aplicações homotópicas e caracterizamos os grupos de homologia como invariantes topológicos. A teoria de homotopia não será trabalhada nessa dissertação. Para mais elementos sobre a teoria de homotopia consultar a referência [5]. Nesse capítulo usamos as referências [1], [2], [5], [6] e [9].

**Definição 21:** Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $\{\phi_p\}_{p=0}^{\infty}$  uma **sequência de homomorfismos**

$$\phi_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L), \quad p \geq 1,$$

tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_p(K) & \xrightarrow{\phi_p} & C_p(L) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_{p-1}(K) & \xrightarrow{\phi_{p-1}} & C_{p-1}(L) \end{array}$$

Figura 3.1: Diagrama da sequência de homomorfismos

comuta, isto é,  $\partial \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial$ . A sequência  $\{\phi_p\}_{p=0}^{\infty}$  é chamada uma aplicação de cadeias

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_p(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(K) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-2}(K) & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \downarrow \Phi_p & & \downarrow \Phi_{p-1} & & \downarrow \Phi_{p-2} & & \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_p(L) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1}(L) & \xrightarrow{\partial} & C_{p-2}(L) & \xrightarrow{\partial} & \cdots
 \end{array}$$

Figura 3.2: Diagrama com uma sequência longa entre cadeias

Se  $p$  é maior que as dimensões de  $K$  e  $L$ , então  $\Phi_p$  é o homomorfismo nulo. Se denotarmos  $C(K) = (C_p(K), \partial)$  e  $C(L) = (C_p(L), \partial)$  como os conjuntos dos grupos de  $p$ -cadeias de  $K$  e  $L$  respectivamente, podemos olhar uma aplicação de cadeias como uma aplicação e temos assim a definição de morfismo como sendo uma aplicação entre esses grupos, que denotaremos por  $\Phi : C(K) \rightarrow C(L)$ .

**Teorema 3:** Uma aplicação de cadeias  $\{\Phi_p\}_{p=0}^\infty$  de um complexo  $K$  em um complexo  $L$  induz homomorfismos  $(\Phi_p)_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ , para cada  $p \geq 0$ .

**Prova:** Vamos primeiro provar que  $\Phi(B_p(K)) \subset B_p(L)$ , para todo  $p \geq 0$ . Para isto, considere  $b_p \in B_p(K)$ , então existe  $c_{p+1} \in C_{p+1}(K)$  tal que  $b_p = \partial(c_{p+1})$ . Logo

$$\begin{aligned}
 \Phi_p(b_p) &= \Phi(\partial(c_{p+1})) \\
 &= \partial\Phi_{p+1}(c_{p+1}),
 \end{aligned}$$

onde  $\Phi_{p+1}(c_{p+1}) \in C_{p+1}(L)$ . Donde obtemos que  $\Phi_p(b_p)$  é um elemento de  $B_p(L)$ , ou seja,  $\Phi(B_p(K)) \subset B_p(L)$ . Veja também que, se  $p = 0$  e  $z_0 \in C_0(K)$  temos que  $\partial(z_0) = 0$ , ou seja,  $z_0 \in Z_0(K)$  e então  $C_0(K) = Z_0(K)$ . Da mesma forma  $C_0(L) = Z_0(L)$ , logo temos  $\Phi(Z_0(K)) \subset Z_0(L)$ .

Se  $p \geq 1$  e  $z_p \in Z_p(K)$ , temos que  $\partial(z_p) = 0$  e então

$$\begin{aligned}
 \partial\Phi_p(z_p) &= \Phi_{p-1}(\partial z_p) \\
 &= \Phi_{p-1}(0) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

pois  $\Phi_{p-1}$  é homomorfismo. Logo  $\Phi_p(z_p) \in Z_p(L)$  e  $\Phi_p(Z_p(K)) \subset Z_p(L)$ , para todo  $p \geq 0$ . Assim, definimos

$$\begin{aligned}
 (\Phi_p)_* : H_p(K) &\rightarrow H_p(L) \\
 (\Phi_p)_*(z_p + B_p(K)) &= \Phi_p(z_p) + B_p(L).
 \end{aligned}$$

Veja que, dados  $[z_p], [w_p] \in H_p(K)$  vale

$$\begin{aligned} (\phi_p)_*(z_p + B_p(K)) + (\phi_p)_*(w_p + B_p(K)) &= (\phi_p(z_p) + B_p(L)) + (\phi_p(w_p) + B_p(L)) \\ &= (\phi_p(z_p) + \phi_p(w_p)) + (B_p(L) + B_p(L)) \\ &= \phi_p(z_p + w_p) + B_p(L) \\ &= (\phi_p)_*((z_p + w_p) + B_p(L)). \end{aligned}$$

Além disso, se  $[z_p] = [w_p] \in H_p(K)$  temos que

$$(\phi_p)_*(z_p + B_p(K)) = \phi_p(z_p) + B_p(L) \quad e$$

$$(\phi_p)_*(w_p + B_p(K)) = \phi_p(w_p) + B_p(L)$$

Então,  $(\phi_p)_*([z_p]) - (\phi_p)_*([w_p]) = \phi_p(z_p - w_p) \in B_p(L)$ , pois  $z_p - w_p \in B_p(K)$  e  $\phi_p(B_p(K)) \subset B_p(L)$ . Portanto,  $(\phi_p)_*([z_p]) = (\phi_p)_*([w_p])$ . Assim, concluímos que  $(\phi_p)_*$  está bem definido e é um homomorfismo.

□

**Definição 22:** Uma **aplicação simplicial** de um complexo  $K$  em um complexo  $L$  é uma função  $\phi$ , do conjunto dos vértices de  $K$  para o conjunto dos vértices de  $L$ , satisfazendo a seguinte condição: se  $\sigma^p \langle v_0 v_1 \cdots v_p \rangle$  é um simplexo de  $K$ , então os vértices  $\phi(v_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ , são vértices de um simplexo  $L$  (observe que os vértices  $\phi(v_i)$  não precisam ser distintos). Se os vértices  $\phi(v_i)$ ,  $0 \leq i \leq p$ , forem todos distintos, então o  $p$ -simplexo  $\langle \phi(v_0) \phi(v_1) \cdots \phi(v_p) \rangle = \phi(\sigma^p)$  é chamado a imagem de  $\sigma^p$ . Se  $\phi(v_i) = \phi(v_j)$ , para algum  $i \neq j$ , dizemos que  $\phi$  colapsa  $\sigma^p$ .

**Definição 23:** Sejam  $\phi$  uma aplicação simplicial de  $K$  em  $L$  e  $p \geq 0$ . Se  $g\sigma^p$  é uma  $p$ -cadeia elementar, definimos

$$\phi_p(g\sigma^p) = \begin{cases} 0, & \text{se } \phi \text{ colapsa } \sigma^p \\ g\phi(\sigma^p), & \text{se } \phi \text{ não colapsa } \sigma^p \end{cases}$$

A função  $\phi_p$  estende-se por linearidade a um homomorfismo,

$$\phi_p : C_p(K) \longrightarrow C_p(L)$$

$$\phi_p \left( \sum g_i \sigma_i^p \right) = \sum \phi_p(g_i \sigma_i^p).$$



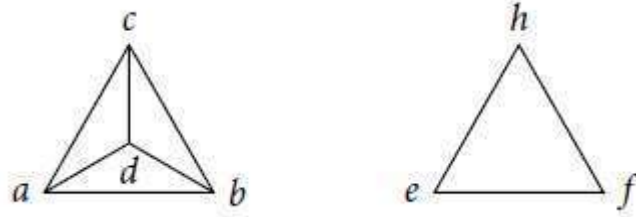


Figura 3.3: Mais alguns complexos

**Exemplo 24:** Sejam  $K$  e o 2-esqueleto de um 3-simplexo  $\langle abcd \rangle$  e  $L$  o fecho de um 2-simplexo  $\langle efh \rangle$  com orientações  $a < b < c < d$  e  $e < f < h$ , respectivamente.

Seja  $\phi : K \rightarrow L$  definida por:

$$\begin{cases} \phi(a) = \phi(d) = e \\ \phi(b) = f \\ \phi(c) = h \end{cases}$$

As aplicações de cadeias  $\phi_p$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \phi_0(g_0\langle a \rangle + g_1\langle b \rangle + g_2\langle c \rangle + g_3\langle d \rangle) &= g_0\langle \phi_0(a) \rangle + g_1\langle \phi_0(b) \rangle + g_2\langle \phi_0(c) \rangle \\ &\quad + g_3\langle \phi_0(d) \rangle \\ &= g_0\langle e \rangle + g_1\langle f \rangle + g_2\langle h \rangle + g_3\langle e \rangle \\ &= (g_0 + g_3)\langle e \rangle + g_1\langle f \rangle + g_2\langle h \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \phi_1(g_0\langle ab \rangle + g_1\langle ac \rangle + g_2\langle ad \rangle + g_3\langle bc \rangle + g_4\langle bd \rangle + g_5\langle cd \rangle) &= \\ &= g_0\langle \phi_1(a)\phi_1(b) \rangle + g_1\langle \phi_1(a)\phi_1(c) \rangle \\ &\quad + g_2\langle \phi_1(a)\phi_1(d) \rangle + g_3\langle \phi_1(b)\phi_1(c) \rangle \\ &\quad + g_4\langle \phi_1(b)\phi_1(d) \rangle + g_5\langle \phi_1(c)\phi_1(d) \rangle \\ &= g_0\langle ef \rangle + g_1\langle eh \rangle + g_2\langle ee \rangle + g_3\langle fh \rangle + g_4\langle fe \rangle \\ &\quad + g_5\langle he \rangle \\ &= (g_0 - g_4)\langle ef \rangle + (g_1 - g_5)\langle eh \rangle + g_3\langle fh \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \phi_2(g_0\langle abc \rangle + g_1\langle acd \rangle + g_2\langle abd \rangle + g_3\langle bcd \rangle) &= \\ &= g_0\langle \phi_2(a)\phi_2(b)\phi_2(c) \rangle + g_1\langle \phi_2(a)\phi_2(c)\phi_2(d) \rangle \\ &\quad + g_2\langle \phi_2(a)\phi_2(b)\phi_2(d) \rangle + g_3\langle \phi_2(b)\phi_2(c)\phi_2(d) \rangle \\ &= g_0\langle efh \rangle + g_1\langle ehe \rangle + g_2\langle efe \rangle + g_3\langle fhe \rangle \\ &= (g_0 + g_3)\langle efh \rangle. \end{aligned}$$

Agora iremos provar um resultado que diz como obter uma aplicação de cadeias a partir de uma aplicação simplicial dada.

**Teorema 4:** Se  $\phi : K \longrightarrow L$  é uma aplicação simplicial, então a sequência  $\{\phi_p\}_{p=0}^{\infty}$  é uma aplicação de cadeias.

**Prova:** Sejam  $g\sigma^p$  uma  $p$ -cadeia elementar qualquer com  $p \geq 1$  e  $\sigma^p = +\langle v_0 v_1 \cdots v_p \rangle$ . Se  $\phi$  não colapsa  $\sigma^p$ , então se considerarmos  $\widehat{\sigma}_i^p$  o  $(p-1)$ -simplexo obtido pela eliminação do vértice  $v_i$  temos  $\widehat{\sigma}_i^p = \langle v_0 \cdots v_{i-1} \widehat{v}_i v_{i+1} \cdots v_p \rangle$ . Considere também  $\phi(\sigma^p) = \langle \phi(v_0) \cdots \phi(v_p) \rangle$  a imagem de  $\sigma^p$ , denotado por  $\phi(\sigma)^p$ . Note que,

$$\phi(\widehat{\sigma}_i^p) = \phi(\widehat{\sigma})_i^p = \langle \phi(v_0) \cdots \phi(v_{i-1}) \widehat{\phi(v_i)} \phi(v_{i+1}) \cdots \phi(v_p) \rangle$$

é a  $(p-1)$ -face de  $\phi(\sigma)^p$ , no qual se eliminou o  $i$ -ésimo vértice. Daí,

$$\begin{aligned} \partial\phi_p(g\sigma^p) &= \partial(g\phi(\sigma^p)) \\ &= \partial(g\phi(\sigma)^p) \\ &= \sum_{i=0}^p [\phi(\sigma)^p, \phi(\widehat{\sigma})_i^p] g\phi(\widehat{\sigma})_i^p \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i g\phi(\widehat{\sigma}_i^p) \\ &= \phi_p \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i g\widehat{\sigma}_i^p \right) \\ &= \phi_p \left( \sum_{i=0}^p [\sigma^p, \widehat{\sigma}_i^p] g\widehat{\sigma}_i^p \right) \\ &= \phi_p(\partial g\sigma^p). \end{aligned}$$

Se  $\phi$  colapsa  $\sigma^p$ , então existem  $v_k$  e  $v_j$ ,  $k \neq j$ , tais que  $\phi(v_k) = \phi(v_j)$ . Consideremos os  $p-1$ -simplexos

$$\widehat{\sigma}_k^p = \langle v_0 v_1 \cdots \widehat{v}_k \cdots v_j \cdots v_p \rangle \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma}_j^p = \langle v_0 v_1 \cdots v_k \cdots \widehat{v}_j \cdots v_p \rangle,$$

com  $k < j$ , então

$$\begin{aligned} \phi(\widehat{\sigma}_k^p) &= \langle \phi(v_0) \phi(v_1) \cdots \widehat{\phi(v_k)} \cdots \phi(v_j) \cdots \phi(v_p) \rangle \\ &= (-1) \langle \phi(v_0) \phi(v_1) \cdots \widehat{\phi(v_k)} \cdots \phi(v_j) \phi(v_{j-1}) \cdots \phi(v_p) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^2 \langle \phi(v_0)\phi(v_1) \cdots \widehat{\phi(v_k)} \cdots \phi(v_j)\phi(v_{j-2})\phi(v_{j-1}) \cdots \phi(v_p) \rangle \\
 &\vdots \\
 &= (-1)^{j-k-1} \langle \phi(v_0)\phi(v_1) \cdots \phi(v_j)\phi(v_{k+1}) \cdots \phi(v_{j-2})\phi(v_{j-1})\phi(v_{j+1}) \cdots \phi(v_p) \rangle \\
 &= (-1)^{j-k-1} \phi(\widehat{\sigma}_j^p)
 \end{aligned}$$

Veja também que, para  $i \neq k$  e  $i \neq j$  temos  $\phi(\widehat{\sigma}_i^p) = 0$ , pois  $\phi(v_j), \phi(v_k) \in \widehat{\sigma}_i^p$ . Logo

$$\sum_{i=0, i \neq j, i \neq k}^p (-1)^i g\phi(\widehat{\sigma}_i^p) = 0,$$

então

$$\begin{aligned}
 \phi_{p-1}(\partial(g\sigma^p)) &= \phi_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p [\sigma^p, \widehat{\sigma}_i^p] g\widehat{\sigma}_i^p \right) \\
 &= \phi_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i g\widehat{\sigma}_i^p \right) \\
 &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi_{p-1}(g\widehat{\sigma}_i^p) \\
 &= \sum_{i=0, i \neq j, i \neq k}^p (-1)^i \phi_{p-1}(g\widehat{\sigma}_i^p) + (-1)^j \phi(\widehat{\sigma}_j^p) + (-1)^k g\phi(\widehat{\sigma}_k^p) \\
 &= 0 + g((-1)^j \phi(\widehat{\sigma}_j^p)) + (-1)^k (-1)^{j-k-1} \phi(\widehat{\sigma}_j^p) \\
 &= g((-1)^j \phi(\widehat{\sigma}_j^p) + (-1)^{j-1} \phi(\widehat{\sigma}_j^p)) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\phi$  colapsa  $\sigma^p$ , temos que  $\partial\phi_p(g\sigma^p) = \partial(0) = 0$ . Assim,  $\phi_{p-1}(\partial(g\sigma^p)) = \partial\phi_p(g\sigma^p)$ . Portanto  $\{\phi_p\}_{p=0}^\infty$  é uma aplicação de cadeias.

□

Agora vamos introduzir um novo conceito que nos permitirá construir a partir de um complexo simplicial dado vários outros complexos simpliciais. Seja  $\sigma^n = \langle v_0 \cdots v_n \rangle$  um  $n$ -simplexo simplicial. O baricentro de  $\sigma^n$  é o ponto

$$\widehat{\sigma}^n = \frac{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}{n+1}.$$

O baricentro de um 0-simplexo  $\langle v \rangle$  é o próprio  $v$ , o do 1-simplexo  $\langle v_0 v_1 \rangle$  é  $\frac{v_0 + v_1}{2}$  que é seu ponto médio e o de um 2-simplexo é o seu centro de massa.

**Definição 24:** A primeira subdivisão baricêntrica  $K'$  de um complexo simplicial  $K$  é o complexo simplicial formado pelos vértices  $\{\widehat{\sigma} \mid \sigma \in K\}$  e pelos simplexos  $\widehat{\sigma}^q = \langle \widehat{\sigma}_0 \widehat{\sigma}_1 \cdots \widehat{\sigma}_q \rangle$ , onde  $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \cdots \subset \sigma_q$ . Ou seja, cada  $\sigma_i$  é uma face de  $\sigma_{i+1}$  onde  $\sigma_i$  é simplexo de  $K$  com  $i \in \{0, \dots, q\}$ . Sucessivamente, podemos definir a  $r$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$  denotada por  $K^{(r)}$ , para  $r \geq 1$ .

Para ilustrar a definição de subdivisão baricêntrica acima vamos ver um exemplo para nos dar a ideia intuitiva do que acontece quando obtemos uma subdivisão baricêntrica.

**Exemplo 25:**

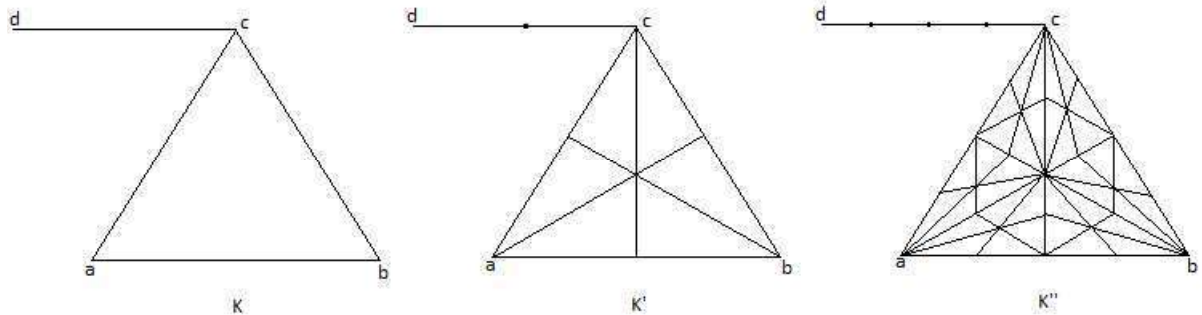


Figura 3.4: Subdivisão baricêntrica

**Observação 8:** Veja que, se  $K'$  é uma subdivisão baricêntrica de  $K$  então  $|K| \subset |K'|$ .

**Prova:** De fato, se  $x \in |K|$  então  $x \in \sigma$ , para algum simplexo  $\sigma \in K$ . Daí, tomando  $\sigma = \langle v_0 \cdots v_p \rangle$  de menor dimensão tal que  $x \in \sigma$ , temos  $x = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_p v_p$  onde  $\lambda_i > 0$ , para todo  $i = 0, \dots, p$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$ . Daí, tomando  $\sigma_i = \langle v_0 v_1 \cdots v_i \rangle$ ,  $i = 0, \dots, p$ , temos que

$$\begin{aligned}
 (\lambda_0 - \lambda_1)\widehat{\sigma}_0 &+ 2(\lambda_1 - \lambda_2)\widehat{\sigma}_1 + 3(\lambda_2 - \lambda_3)\widehat{\sigma}_2 + \cdots + p(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\widehat{\sigma}_{p-1} + (p+1)\lambda_p\widehat{\sigma}_p = \\
 &= (\lambda_0 - \lambda_1)v_0 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{(v_0 + v_1)}{2} + 3(\lambda_2 - \lambda_3)\frac{(v_0 + v_1 + v_2)}{3} + \cdots + \\
 &+ p(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\frac{(v_0 + \cdots + v_{p-1})}{p} + (p+1)\lambda_p\frac{(v_0 + \cdots + v_p)}{p+1} \\
 &= (\lambda_0 - \lambda_1)v_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)(v_0 + v_1) + (\lambda_2 - \lambda_3)(v_0 + v_1 + v_2) + \cdots + \\
 &+ (\lambda_{p-1} - \lambda_p)(v_0 + \cdots + v_{p-1}) + \lambda_p(v_0 + \cdots + v_p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= v_0(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p) \\
 &+ v_1(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p) \\
 &+ v_2(\lambda_2 - \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p) + \cdots + v_{p-1}(\lambda_{p-1} + \lambda_p - \lambda_p) + v_p \lambda_p \\
 &= v_0 \lambda_0 + v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2 + \cdots + v_{p-1} \lambda_{p-1} + v_p \lambda_p \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 - \lambda_1 + 2(\lambda_1 - \lambda_2) + 3(\lambda_2 - \lambda_3) + \cdots + p(\lambda_{p-1} - \lambda_p) + (p+1)\lambda_p &= \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_p \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Portanto,  $x \in \langle \widehat{\sigma}_0 \widehat{\sigma}_1 \cdots \widehat{\sigma}_p \rangle \Rightarrow x \in |K'|$ .

□

A seguir iremos dar a definição de aplicações homotópicas, não desenvolvemos a teoria de homotopia nessa dissertação mas para mais detalhes dessa belíssima teoria olhe a referência [5]

**Definição 25:** Sejam  $X, Y$  dois espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  dizem-se **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$ , tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . A aplicação  $H$  chama-se homotopia entre  $f$  e  $g$ . Escreve-se  $H : f \simeq g$  ou apenas  $f \simeq g$ .

**Exemplo 26:** Seja  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um espaço vetorial normado. Daí, dadas quaisquer aplicações contínuas  $g, f : X \rightarrow Y$ , temos que  $g$  e  $f$  são homotópicas, pois como  $Y$  é convexo então dado quaisquer dois pontos  $a, b \in Y$ , temos que o segmento de reta  $\overline{ab} \subset Y$ . Daí, defina a seguinte função

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Veja que  $H$  é contínua, pois  $f$  e  $g$  são contínuas. Além disso,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ , implicando que  $H$  é homotopia entre  $f$  e  $g$ .

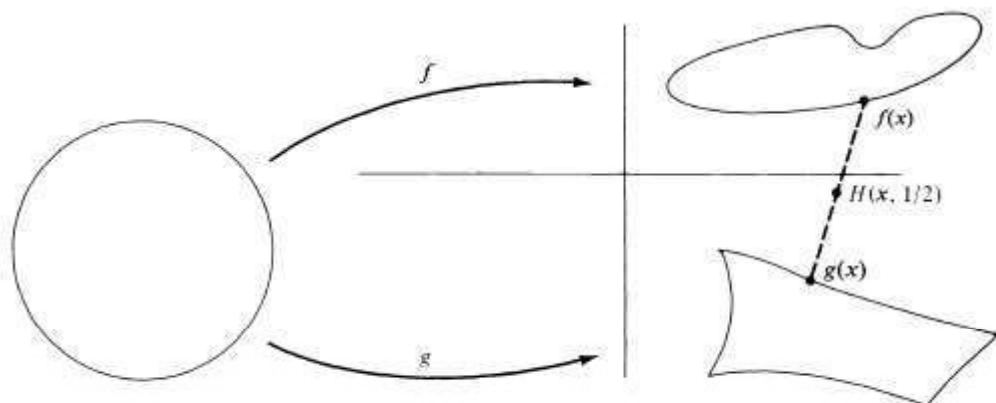


Figura 3.5: Homotopia entre funções

**Definição 26:** Seja  $\sigma^n$  um  $n$ -simplexo simplicial, o **simplexo aberto**  $O(\sigma^n)$  associado ao  $\sigma^n$  consiste de todos os pontos do simplexo  $\sigma^n$ , no qual possuem coordenadas baricêntricas não nulas, ou seja, sendo  $\sigma^n = \langle a_0 a_1 \cdots a_n \rangle$  temos

$$\sigma^n = \{x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \in \sigma^n \mid \lambda_i > 0, \quad \forall i = 0, \dots, n\}.$$

**Definição 27:** Se  $v$  é um vértice de um complexo simplicial  $K$ , então a **estrela de  $v$** , é a família de todos os simplexos de  $K$  no qual  $v$  é um vértice. Então  $st(v)$  é um subconjunto de  $K$ , sendo  $st(v)$  a notação para a estrela de  $v$ .

**Definição 28:** Dado  $v$  um vértice de um complexo simplicial  $K$ . A **estrela aberta de  $v$** ,  $ost(v)$ , é a união de todos os simplexos abertos  $O(\sigma)$  de  $K$  para o qual  $v$  é um vértice de  $\sigma$ . Note que,  $ost(v)$  é um subconjunto aberto do poliedro  $|K|$ .

Observe que o simplexo aberto de um 0-simplexo,  $\sigma^0 = \langle a \rangle$  é o próprio vértice. O simplexo aberto de um 1-simplexo  $\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$  é o segmento de reta aberto, sem os vértices. O simplexo aberto de um 2-simplexo  $\sigma^2 = \langle a_0 a_1 a_2 \rangle$  é o triângulo "aberto", ou interior do triângulo de vértices  $a_0, a_1, a_2$ .

**Exemplo 27:** Dado o seguinte complexo simplicial  $K$  abaixo, vamos determinar  $st(a_1)$  e  $ost(a_1)$ .

Veja que  $st(a_1) = \{\langle a_1 \rangle, \langle a_0 a_1 \rangle, \langle a_1 a_2 \rangle, \langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_1 a_4 \rangle, \langle a_0 a_1 a_3 \rangle, \langle a_1 a_2 a_3 \rangle\}$ . A estrela aberta de  $a_1$ ,  $ost(a_1)$ , é o conjunto formado pela união de  $\{a_1\}$ , os segmentos abertos

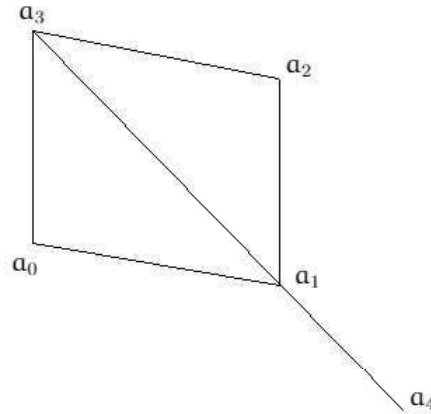


Figura 3.6: Exemplo complexo simplicial

$\overline{a_0a_1}$ ,  $\overline{a_1a_2}$ ,  $\overline{a_1a_3}$ ,  $\overline{a_1a_4}$  e os interiores dos triângulos  $\Delta a_0a_1a_3$ ,  $\Delta a_1a_2a_3$ .

Note que  $ost(a_1)$  não é interior de  $st(a_1)$ , visto que  $\{a_1\} \in ost(a_1)$ . Além disso, a estrela de um vértice é um conjunto de simplexos de  $K$  e a estrela aberta de um vértice é a união de certos conjuntos de pontos no poliedro  $|K|$ .

**Definição 29:** Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliedros com triângulações  $K$  e  $L$  respectivamente e  $f : |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua. Então  $K$  é **estrela relacionada a  $L$  relativa a  $f$**  quando para cada vértice  $p \in K$  existir um vértice  $q$  de  $L$  tal que

$$f(ost(p)) \subset ost(q).$$

**Definição 30:** Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $f : |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua. Uma aplicação simplicial  $g : |K| \rightarrow |L|$  chama-se uma **aproximação simplicial** de  $f$  quando é homotópica a  $f$  e para todo vértice  $a \in K$ , tem-se  $f(ost(a)) \subset ost(\varphi(a))$ .

**Exemplo 28:** Seja  $L$  o fecho do  $p$ -simplexo  $\sigma^p = \langle a_0 \cdots a_p \rangle$  e seja  $K$  um complexo simplicial qualquer. Então qualquer aplicação contínua  $f : |K| \rightarrow |L|$  tem como uma aproximação simplicial a aplicação constante,  $g : |K| \rightarrow |L|$ , no qual colapsa todo o  $|K|$  no vértice  $a_0$ . Isto é,  $g(x) = a_0$ , para todo  $x \in |K|$ . Para verificar isto, basta tomar a seguinte função

$$H : |K| \times I \rightarrow |L|$$

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + ta_0.$$

Como  $f$  é contínua,  $H$  é contínua e além disso,  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = a_0$ . Logo  $H$  é homotopia entre  $f$  e  $g$ .

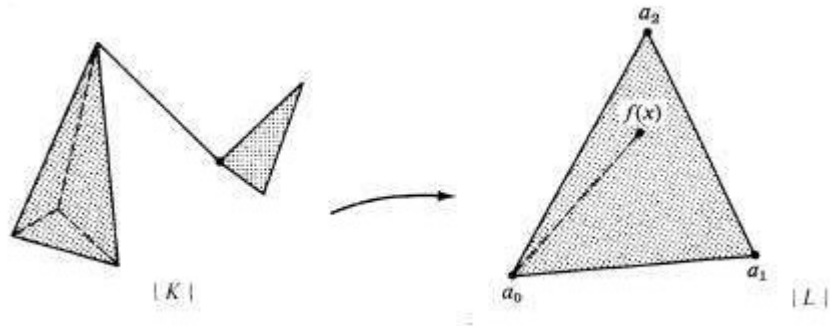


Figura 3.7: Homotopia entre uma aplicação  $f$  e uma constante

Provaremos uma série de resultados com objetivo de obter as ferramentas necessárias na demonstração do Teorema da aproximação simplicial.

**Lema 1:** Seja  $K$  um complexo simplicial e  $v_0, v_1, \dots, v_m$  vértices de  $K$ , então  $v_0, v_1, \dots, v_m$  são vértices de um mesmo simplexo  $\sigma$  de  $K$  se, e somente se,

$$\bigcap_{i=0}^m \text{ost}(v_i) \neq \emptyset.$$

**Prova:** Se  $v_0, v_1, \dots, v_m$  são vértices de um mesmo simplexo  $\sigma$  de  $K$ , então  $O(\sigma) \subset \text{ost}(v_i)$ , para todo  $i = 0, \dots, m$ . Logo,  $\bigcap_{i=0}^m \text{ost}(v_i) \neq \emptyset$ .

Recíprocamente, suponha que  $\bigcap_{i=0}^m \text{ost}(v_i) \neq \emptyset$ . Como  $\text{ost}(v_i)$  é a união de todos os simplexos abertos no qual  $v_i$  é vértice, e além disso, a intersecção de simplexos é ainda um simplexo, temos que existe  $\sigma$  de  $K$  tal que  $O(\sigma) \subset \bigcap_{i=0}^m \text{ost}(v_i)$ . Mas se isto ocorre, então cada  $v_i$  é vértice de  $\sigma$ .

□

**Definição 31:** Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliedros com triangulações  $K$  e  $L$  respectivamente e seja  $\varphi$  uma aplicação simplicial que leva os vértices de  $K$  nos vértices de  $L$ . Então nós podemos estender a aplicação  $\varphi$  a uma aplicação  $\Phi : |K| \rightarrow |L|$  da seguinte forma: dado  $x \in |K|$  existe um simplexo  $\sigma^r = \langle a_0 \cdots a_r \rangle$  em  $K$ , tal que  $x \in \sigma^r$  e  $x = \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i$ , onde



$\lambda_i$  são as coordenadas baricêntricas de  $x$ . Daí definimos a extensão como

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i \varphi(a_i).$$

**Definição 32:** Seja  $K$  um complexo simplicial e  $\sigma = \langle a_0 a_1 \cdots a_r \rangle$  um simplexo de  $K$ . Se  $\tau = \langle a_0 \cdots a_r \rangle$  é a face de  $\sigma$  oposta ao vértice  $a$ , então escrevemos  $\sigma = a * \tau$ . Dizemos que  $K$  é um cone de vértice  $a$  quando, para todo simplexo  $\tau \in K$ , que não tem  $a$  como vértice,  $\sigma = a * \tau$  é um simplexo de  $K$ . A reunião  $L$  dos simplexos de  $K$  dos quais  $a$  não é vértice é um subpoliedro e tem-se  $K = \cup_{\tau \in L} a * \tau$ . Logo podemos denotar  $K = a * L$  e dizer que  $L$  é a base do cone  $K$  com vértice  $a$ .

**Definição 33:** Dado um cone  $K$  de vértice  $a$ . Definimos para cada  $p \geq 1$  a aplicação  $a* : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(K)$  pondo-se para cada simplexo orientado  $\sigma = \langle a_0 \cdots a_p \rangle \in C_p K$ ,  $a * \sigma = \langle a a_0 \cdots a_p \rangle$ . Assim dado uma  $p$ -cadeia  $c_p = \sum g_i \sigma_i$  onde  $g_i \sigma_i$  são as  $p$ -cadeias elementares de  $K$ , temos  $a * c_p = \sum g_i a * \sigma_i$ .

Dado um cone  $K$  de vértice  $a$ . Se  $\sigma \in C_p(K)$  então  $a * \sigma = 0$  quando  $a$  é um vértice de  $\sigma$ .

**Definição 34:** Seja um complexo simplicial  $K$ , definiremos a aplicação  $Sd : C(K) \rightarrow C(K')$ , por indução. Se  $a \in |K|$  é um vértice, pomos  $Sd(a) = a$ . Supondo definido  $Sd : C_{p-1}(K) \rightarrow C_{p-1}(K')$ , pomos a imagem de cada  $p$ -simplexo em  $K$  como  $Sd(\sigma) = b_\sigma * Sd(\partial\sigma)$ , onde  $b_\sigma$  é o baricentro de  $\sigma$  e  $b*$  é a aplicação da Definição 33. Se  $c_p = \sum g_i \sigma_i$  é uma  $p$ -cadeia em  $C_p(K)$  pomos  $Sd(c_p) = \sum g_i Sd(\sigma_i)$ .

Dado o morfismo  $Sd : C(K) \rightarrow C(K')$  então definimos  $Sd^m : C(K) \rightarrow C(K^{(m)})$  como sendo o morfismo  $Sd$  iterado  $m$  vezes.

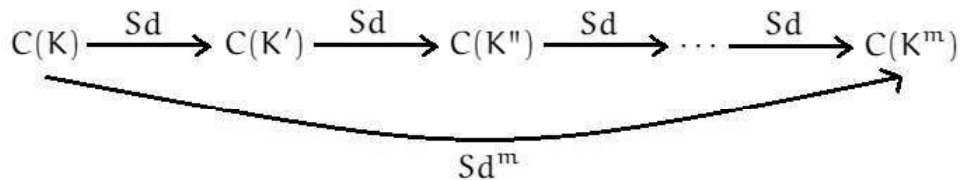


Figura 3.8: Composição de aplicações  $Sd$

**Teorema 5:** Dados  $|K|$  e  $|L|$  poliedros com triangulações  $K$  e  $L$  respectivamente e  $f : |K| \rightarrow |L|$  uma função contínua tal que  $K$  é estrela relacionada a  $L$  relativa a  $f$ . Então

existe uma aproximação simplicial  $g : |K| \rightarrow |L|$ .

**Prova:** Visto que  $K$  é estrela relacionada a  $L$  relativa a  $f$ , temos que para cada vértice  $p$  de  $K$  existe um vértice  $q$  de  $L$ , tal que  $f(\text{ost}(p)) \subset \text{ost}(q)$ . Defina  $g : K \rightarrow L$  como  $q = g(p)$ .

Agora vamos provar que  $g$  é uma aplicação simplicial. De fato, dados  $a_0, \dots, a_n$  vértices de um simplexo  $\sigma$  em  $K$ . De acordo com o Lema 1, temos que  $\bigcap_{i=0}^n \text{ost}(a_i) \neq \emptyset$ . Daí

$$\emptyset \neq f(\bigcap_{i=0}^n \text{ost}(a_i)) = \bigcap_{i=0}^n f(\text{ost}(a_i)) \subset \bigcap_{i=0}^n \text{ost}(g(a_i)),$$

implicando que  $\bigcap_{i=0}^n \text{ost}(g(a_i)) \neq \emptyset$  e novamente pelo Lema 1 temos que  $g(a_0), \dots, g(a_n)$  são vértices de um mesmo simplexo em  $L$ . Então  $g$  é uma aplicação simplicial, então tomemos a extensão  $g : |K| \rightarrow |L|$  dada por

$$g(x) = g\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i g(a_i),$$

onde  $x \in \langle a_0 \cdots a_n \rangle$ , e  $\lambda_i, i = 0, \dots, n$  são as coordenadas baricêntricas de  $x$ . Seja  $x \in |K|$  e  $\sigma$  o simplexo em  $K$  que tem a menor dimensão e que contém  $x$ . Seja  $a$  um vértice de  $\sigma$ . Observe que, se  $x$  não é vértice de  $\sigma$  então  $x \in \text{ost}(a) \Rightarrow f(x) \in f(\text{ost}(a))$  que por sua vez  $f(\text{ost}(a)) \subset \text{ost}(g(a))$ . Logo,  $f(x) \in \text{ost}(g(a))$ . Além disso, se  $x$  não for vértice de  $\sigma$ , sendo  $g$  uma aplicação simplicial temos que algum outro vértice de  $\sigma$  pode ter como imagem o  $g(a)$  e assim a coordenada baricêntrica de  $g(a)$  seria maior que a de  $a$ . Ou então, se apenas  $a$  tem como imagem  $g(a)$  dentre os vértices de  $\sigma$ , temos que a coordenada baricêntrica de  $g(a)$  é igual a de  $a$ , logo a coordenada baricêntrica de  $g(a)$  é maior ou igual a de  $a$ , e então tem-se que  $g(x) \in \text{ost}(g(a))$ .

Sejam  $a_0, \dots, a_n$  vértices de  $\sigma$ , então pelo parágrafo anterior,  $g(x), f(x) \in \text{ost}(g(a_i))$ , para cada  $i = 0, \dots, n$ . Logo,  $g(x), f(x) \in \bigcap_{i=0}^n \text{ost}(g(a_i))$  e então  $\bigcap_{i=0}^n \text{ost}(g(a_i)) \neq \emptyset$ . Daí  $g(a_0), \dots, g(a_n)$  são vértices de um mesmo simplexo  $\tau$  de  $L$  que contém  $f(x)$  e  $g(x)$ . Visto que cada simplexo é um conjunto convexo, então o segmento de reta que liga  $f(x)$  ao  $g(x)$  está totalmente contido em  $\tau$ , logo está totalmente contido em  $|L|$ . Portanto podemos definir a seguinte aplicação

$$H : |K| \times I \rightarrow |L|$$

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

que é uma função contínua, pois  $f$  e  $g$  são contínuas e  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$ . Então  $H$  é homotopia entre  $f$  e  $g$ . Portanto  $g$  é uma aproximação simplicial de  $f$ .

□

**Definição 35:** Se  $K$  é um complexo simplicial, a **malha** de  $K$  é o máximo dos diâmetros dos simplexos de  $K$ . Denotaremos a malha de  $K$  por  $\text{malha}(K)$ .

**Observação 9:** Veja que a malha da primeira subdivisão baricêntrica  $K'$  de um complexo  $K$ , é menor que a malha de  $K$ . Isto ocorre, pois o simplexos de  $K'$  tem fecho contido no fecho de algum simplexo de  $K$ . Além disso, considerando a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ . Então podemos observar os seguintes fatos:

(a) Se  $x$  e  $y$  são pontos de um simplexo  $\sigma$ , então existe um vértice  $v$  de  $\sigma$  tal que  $\|x - y\| \leq \|x - v\|$ .

**Ideia:** Dados  $x, y \in \sigma$ , existe um vértice  $v$  de  $\sigma$  no qual  $\|y - v\| < \|x - v\|$ , então vamos ter que este  $v$  é o vértice procurado.

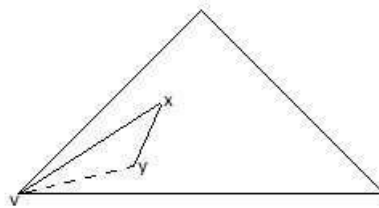


Figura 3.9: Ideia da prova da Observação 9

(b) O diâmetro de um simplexo de dimensão positiva é o comprimento da maior 1-face de  $\sigma$ . Daí, a malha de um complexo  $K$  de dimensão positiva é o comprimento do maior 1-simplexo de  $K$ .

**Teorema 6:** Para qualquer complexo simplicial  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\text{malha}K^s) = 0$ .

**Prova:** Considere a primeira subdivisão baricêntrica  $K'$  de  $K$  e seja  $\langle \dot{\sigma}\dot{\tau} \rangle$  um 1-simplexo de  $K'$ , onde  $\dot{\sigma}$  e  $\dot{\tau}$  são os baricentros de  $\sigma$  e  $\tau$ , respectivamente, logo  $\sigma$  é face de  $\tau$ . Pela definição de baricentro temos  $\dot{\tau} = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p v_i$ , onde  $v_0, v_1, \dots, v_p$  são os vértices de  $\tau$ . Pela observação anterior, temos que existe vértice  $v$  de  $\tau$ , tal que  $\|\dot{\sigma} - \dot{\tau}\| \leq \|\dot{\tau} - v\|$ . Então,

$$\begin{aligned} \|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| &\leq \|\dot{\tau} - v\| \\ &= \left\| \frac{1}{p+1} \left( \sum_{i=0}^p v_i \right) - v \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{p+1} \left( \sum_{i=0}^p v_i - v \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^p \|v_i - v\| \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0, v_i \neq v}^p \|v_i - v\| \\ &\leq \frac{p}{p+1} \text{malha}(K) \end{aligned}$$

Seja  $n$  a dimensão de  $K$ , então  $p \leq n$  e

$$\|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| \leq \frac{n}{n+1} \text{malha}(K).$$

Como a  $\text{malha}(K')$  é o máximo dos valores  $\|\dot{\sigma} - \dot{\tau}\|$  onde  $\langle \dot{\sigma}\dot{\tau} \rangle$  é um 1-simplexo de  $K'$ , temos que

$$\text{malha}(K') \leq \frac{n}{n+1} \text{malha}(K).$$

Repetindo o processo obtemos a desigualdade abaixo para  $K^{(s)}$

$$\begin{aligned} \text{malha}(K^{(s)}) &\leq \frac{n}{n+1} \text{malha}(K^{(s-1)}) \\ &\vdots \\ &\leq \left( \frac{n}{n+1} \right)^s \text{malha}(K). \end{aligned}$$

Fazendo  $s \rightarrow \infty$  temos que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{malha}(K^{(s)}) = 0$ .

□

A seguir faremos a demonstração do Teorema da aproximação simplicial que é um dos principais desse capítulo, tal resultado diz que dado uma aplicação contínua entre dois

poliedros quaisquer podemos obter uma aplicação simplicial homotópica á aplicação dada inicialmente.

**Teorema 7: (O teorema da aproximação simplicial)** Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliedros com  $K$  e  $L$  triangulações respectivas e  $f : |K| \rightarrow |L|$  uma função contínua. Então, existe uma subdivisão baricêntrica  $K^{(r)}$  de  $K$  e uma função contínua  $g : |K| \rightarrow |L|$  tal que

(a)  $g$  é uma aplicação simplicial de  $K^{(r)}$  para  $L$  ;

(b)  $g$  é homotópica a  $f$ .

**Prova:** Seja  $A = \{\text{ost}(v) \mid v \text{ é vértice de } |L|\}$  uma cobertura aberta de  $|L|$ . Como  $|L|$  é compacto em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $|L|$  admite uma subcobertura finita de  $A$  com número de Lebesgue  $\lambda > 0$ . Como  $|K| \subset \mathbb{R}^n$  é compacto temos que  $f : |K| \rightarrow |L|$  é uma função uniformemente contínua, logo para este  $\lambda > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para  $x, y \in |K|$  e

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \lambda.$$

Pelo Teorema 6 temos que  $\text{malha}(K^{(s)}) \rightarrow 0$ , quando  $s \rightarrow 0$ , então existe  $r \in \mathbb{N}$ , tal que  $\text{malha}(K^{(r)}) < \frac{\delta}{2}$ . Daí, dado  $v$  um vértice de  $K$  e  $x, y \in \text{ost}(v)$ , temos que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - v\| + \|v - y\| \\ &< \text{malha}(K^{(r)}) + \text{malha}(K^{(r)}) \\ &= 2\text{malha}(K^{(r)}) \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Assim,  $\|f(x) - f(y)\| < \lambda$ . Portanto, o diâmetro de  $f(\text{ost}(v))$ , para todo vértice  $v$  de  $K$  é menor que  $\lambda > 0$ . Então existe algum elemento da cobertura  $A$  que contém  $f(\text{ost}(v))$ , ou seja, existe algum vértice  $p$  de  $L$ , tal que  $f(\text{ost}(v)) \subset \text{ost}(p)$ . Portanto  $K^{(r)}$  é estrela relacionada a  $L$  relativa a  $f$ . Pelo Teorema 5, temos que  $f$  tem uma aproximação simplicial  $g : |K| \rightarrow |L|$ . Logo  $g$  é aplicação simplicial e é homotópica a  $f$ .

□

Pelo Teorema 7, temos que dada uma aplicação contínua entre poliedros  $f : |K| \longrightarrow |L|$ , é possível encontrar uma  $r$ -divisão baricêntrica de  $K$  e uma aplicação simplicial,  $g : K^{(r)} \longrightarrow L$ , tal que  $h = g \circ Sd^r : |K| \longrightarrow |L|$  é homotópica a  $f$ . Daí, pelo Teorema 4, temos que  $\{h_p\}_{p=0}^\infty$  é uma aplicação de cadeias e pelo Teorema 3, cada  $h_p$  induz um homomorfismo  $(h_p)_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(L)$ .

A sequência  $\{(h_p)_*\}_{p=0}^\infty$  é chamada sequência de homomorfismos induzidos por  $f$  e será denotada por  $\{(f_p)_*\}$ .

**Lema 2:** Sejam  $f : |K| \longrightarrow |L|$  e  $h : |L| \longrightarrow |M|$  contínuas. Então  $[(h \circ f)_p]_* = (h_p)_* \circ (f_p)_*$ .

**Prova:** Dado  $w_p + B_p(K)$  um elemento de  $H_p(K)$ , então pelo Teorema da aproximação simplicial temos que existem aproximações simpliciais  $f' : K^{(t)} \longrightarrow L$  e  $h' : L^{(s)} \longrightarrow M$  para  $f$  e  $h$ . Se tomarmos  $r = \max\{t, s\}$  temos pela demonstração do Teorema da aproximação simplicial que obtemos aproximações simpliciais  $f'' : K^{(r)} \longrightarrow L$  e  $h'' : L^{(r)} \longrightarrow M$ . Logo pela observação feita anteriormente temos que  $f'' = f' \circ Sd^r$  e  $h'' = h' \circ Sd^r$  são aplicações homotópicas a  $f$  e  $h$  respectivamente que por sua vez geram as aplicações de cadeias  $f''_p$  e  $h''_p$  para todo  $p \geq 0$  e induzem os homomorfismos  $(f''_p)_*$  e  $(h''_p)_*$ . Então

$$\begin{aligned} [(h \circ f)_p]_*(w_p + B_p(K)) &= [(h'' \circ f'')_p]_*(w_p + B_p(K)) \\ &= (h'' \circ f'')_p(w_p) + B_p(M) \\ &= h''_p(f''_p(w_p)) + B_p(M) \\ &= (h''_p)_*(f''_p(w_p) + B_p(L)) \\ &= (h_p)_*((f''_p)_*(w_p + B_p(K))) \\ &= (h_p)_* \circ (f_p)_*(w_p + B_p(K)). \end{aligned}$$

Donde concluímos que  $[(h \circ f)_p]_* = (h_p)_* \circ (f_p)_*$ .

□

**Lema 3:** Seja  $id : |K| \longrightarrow |K|$  a função identidade. Então  $[(id_{|K|})_p]_* = id_{H_p(K)}$ .

**Prova:** Dado  $w_p + B_p(K)$  um elemento qualquer de  $H_p(K)$ . Então,

$$\begin{aligned} [(\text{id}_{|K|})_p]_*(w_p + B_p(K)) &= (\text{id}_{|K|})_p(w_p) + B_p(K) \\ &= w_p + B_p(K) \\ &= \text{id}_{H_p(K)}(w_p + B_p(K)). \end{aligned}$$

□

**Teorema 8:** Se  $|K|$  e  $|L|$  são homeomorfos, então  $H_p(K)$  e  $H_p(L)$  são isomorfos para cada  $p$ .

**Prova:** Sejam  $f : |K| \rightarrow |L|$  um homeomorfismo e  $f^{-1} : |L| \rightarrow |K|$  o seu inverso. Assim  $f$  e  $f^{-1}$  são contínuas e

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_{H_p(K)} \quad \text{e} \quad ((\text{id}_{|L|})_p)_* = \text{id}_{H_p(L)}.$$

Portanto, pelo Lema 2, temos que

$$\begin{aligned} (f_p)_* \circ (f_p^{-1})_* &= ((f \circ f^{-1})_p)_* \\ &= ((\text{id}_{|L|})_p)_* \\ &= \text{id}_{H_p(L)}, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} (f_p^{-1})_* \circ (f_p)_* &= ((f^{-1} \circ f)_p)_* \\ &= ((\text{id}_{|K|})_p)_* \\ &= \text{id}_{H_p(K)}. \end{aligned}$$

Com isto obtemos que  $(f_p)_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$  é isomorfismo, com inverso  $((f_p^{-1})_*) : H_p(L) \rightarrow H_p(K)$ .

□

O teorema acima é um importante resultado da teoria de homologia simplicial pois ele diz que o grupo de homologia é um invariante topológico. Em particular, usamos a contrapositiva do teorema 8 para mostrar que dois espaços não são homeomorfos, a exemplo da aplicação que faremos no próximo capítulo.

Uma pergunta natural a se fazer é se vale a recíproca do teorema acima. A resposta é negativa e será mostrada com um contraexemplo. De fato, considere a faixa de Möebius  $FM$  menos um disco aberto  $D$ , que denotaremos por  $A = FM \setminus D$ . Sabemos que  $H_0(FM) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $H_1(FM) \simeq \mathbb{Z}$  e  $H_2(FM) \simeq 0$ . Dada uma triangulação para a  $FM$  podemos obter uma triangulação para  $A$  retirando um 2-simplexo aberto da triangulação da faixa de Möebius. Na triangulação abaixo a região cinza representa a face que foi retirada.

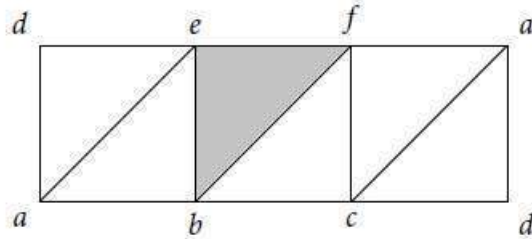


Figura 3.10: Triangulação da faixa de Möebius menos um disco

Temos que a quantidade de vértices e arestas da triangulação para  $A$  é a mesma para  $FM$ , logo

$$H_0(A) \simeq H_0(FM) \quad e \quad H_1(A) \simeq H_1(FM)$$

Considere agora a orientação  $a < b < c < d < e < f$  e dado  $z \in C_2(A)$  temos

$$z = g_1 \langle ade \rangle + g_2 \langle abe \rangle + g_3 \langle bcf \rangle + g_4 \langle acf \rangle + g_5 \langle acd \rangle$$

com  $g_i \in \mathbb{Z}$  e aplicando o operador bordo obtemos

$$\begin{aligned} \partial(z) &= g_1(\langle de \rangle - \langle ae \rangle + \langle ad \rangle) + g_2(\langle be \rangle - \langle ae \rangle + \langle ab \rangle) + g_3(\langle cf \rangle - \langle bf \rangle + \langle bc \rangle) \\ &+ g_4(\langle cf \rangle - \langle af \rangle + \langle ac \rangle) + g_5(\langle cd \rangle - \langle ad \rangle + \langle ac \rangle) \\ &= \langle de \rangle(g_1) + \langle ae \rangle(-g_1 - g_2) + \langle ad \rangle(g_1 - g_5) + \langle be \rangle(g_2) + \langle ab \rangle(g_2) \\ &+ \langle cf \rangle(g_3 + g_4) + \langle bf \rangle(-g_3) + \langle bc \rangle(g_3) + \langle af \rangle(-g_4) + \langle ac \rangle(g_4 + g_5) + \langle cd \rangle(g_5) \end{aligned}$$

Para que  $\partial(z) = 0$  temos que ter  $g_i = 0$ , para todo  $1 \leq i \leq 5$ . Assim  $Z_2(A) \simeq 0$  que implica em  $H_2(A) \simeq 0$ , visto que  $B_2(A) \simeq 0$ . Portanto  $H_2(A) \simeq H_2(FM)$  e daí temos que os grupos de homologia de  $A$  e  $FM$  são isomorfos, mas  $A$  não é homeomorfo a  $FM$ .



# Capítulo 4

## Aplicações da teoria de Homologia

No capítulo 4, como aplicações da teoria de homologia desenvolvida nos capítulos anteriores, apresentamos o teorema de invariância da dimensão dos espaços euclidianos por homeomorfismos e o Teorema dos Pontos Fixos de Lefschetz. Nesse capítulo usamos as referências [2], [4] e [6].

**Definição 36:** Uma **compactificação de Alexandrov de um espaço topológico**  $X$  é uma aplicação  $\varphi : X \longrightarrow X^*$ , tal que

(1)  $X^*$  é um espaço compacto de Hausdorff ;

(2)  $\varphi$  é um homeomorfismo de  $X$  sobre  $\varphi(X)$  ;

(3)  $X^* = \varphi(X) \cup \{w\}$ , onde  $w \notin \varphi(X)$ ,

o ponto  $w$  tal que  $X^* \setminus \varphi(X) = \{w\}$  chama-se o ponto no infinito da compactificação  $\varphi : X \longrightarrow X^*$ .

Nem todo espaço topológico admite uma compactificação de Alexandrov, para isso acontecer o espaço  $X$  tem que ser Hausdorff e localmente compacto. A prova dessa observação pode ser encontrada em [4].

**Proposição 2:** Sejam  $\varphi : X \longrightarrow X^*$  e  $\psi : Y \longrightarrow Y^*$  compactificações de Alexandrov.

Todo homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  estende-se a um homeomorfismo  $h^* : X^* \rightarrow Y^*$ , que transforma o ponto no infinito de  $X^*$  no ponto no infinito de  $Y^*$ . Ou seja  $h^* : X^* \rightarrow Y^*$  tal que  $h^* \circ \varphi = \psi \circ h$  e  $h^*(w^*) = z^*$ , onde  $w^*$  e  $z^*$  são os pontos no infinito de  $X^*$  e  $Y^*$  respectivamente.

**Prova:** Temos que  $h^*(w^*) = z^*$  e  $h^*$  restrito a  $\varphi(X)$  reduz-se ao homeomorfismo  $h^* = \psi \circ h \circ \varphi^{-1} : \varphi(X) \rightarrow \psi(Y)$ . Mostremos que  $(h^*)^{-1}$  é contínua em  $z^*$ . Para isto, seja  $B$  uma vizinhança aberta de  $z^*$  em  $Y^*$ . Então  $Y^* \setminus B$  é fechado em  $Y^*$  e como  $Y^*$  é compacto  $Y^* \setminus B$  é compacto em  $Y^*$ , no qual  $Y^* \setminus B \subset \psi(Y)$ . Daí, temos que  $Y^* \setminus B = h^*(K)$ , onde  $K \subset \varphi(X)$  é um compacto, visto que  $h^*|_{\varphi(X)}$  é homeomorfismo.

Como  $X^*$  é Hausdorff, segue que  $K$  é fechado em  $X^*$ . Logo  $A = X^* \setminus K$  é um aberto em  $X^*$ , com  $w^* \in A$ , então  $A$  é uma vizinhança aberta de  $w^*$ . Donde,

$$\begin{aligned} Y^* \setminus B &= h^*(K) \\ &= h^*(X^* \setminus A) \\ &= h^*(X^*) \setminus h^*(A) \\ &= Y^* \setminus h^*(A), \end{aligned}$$

pois  $h^*$  é uma bijeção. Portanto  $h^*(A) = B$ , ou seja,  $(h^*)^{-1}(B) = A$ . Como  $A$  é aberto de  $X^*$ , temos que  $(h^*)^{-1}$  é contínua em  $z^*$ . Portanto,  $(h^*)^{-1} : Y^* \rightarrow X^*$  é contínua. Seja  $B \subset Y^*$  fechado, como  $Y^*$  é compacto, temos que  $B$  é compacto, logo  $(h^*)^{-1}(B)$  é compacto. Agora, usando que  $X^*$  é Hausdorff concluímos que  $(h^*)^{-1}(B)$  é fechado. Assim,  $(h^*)^{-1}$  é uma aplicação fechada e isso implica que  $h^*$  é contínua, logo  $h^*$  é homeomorfismo.

□

Para mais detalhes sobre compactificações e resultados de topologia geral como este acima recomendamos as referências [4] e [9].

**Lema 4:** Dada  $K$  uma  $n$ -pseudovarietade. Se  $H_n(K)$  não é o grupo trivial então  $K$  é orientável.

**Prova:** Como  $H_n(K) \neq 0$  considere o  $n$ -ciclo não nulo  $z = \sum g_i \sigma_i^n$ . Sendo  $K$  uma  $n$ -pseudovarietade temos que cada par de  $n$ -simplexos pode ser ligado por uma sequência

de  $n$ -simplexos e cada  $(n-1)$ -simplexo é uma face de exatamente dois  $n$ -simplexos. Segue que qualquer dois coeficientes de  $z$  podem distinguir apenas no sinal, ou seja,  $g_i = \pm g_0$ , se  $\partial(z) = 0$ .

Fazendo uma reordenação dos vértices caso necessário, podemos obter  $g_i = g_0$  e assim temos o  $n$ -ciclo

$$\sum g_0 \sigma_i^n = g_0 \left( \sum 1 \cdot \sigma_i^n \right).$$

Segue disto que  $\sum 1 \cdot \sigma_i^n$  é um  $n$ -ciclo. Mas isso significa que cada  $(n-1)$ -simplexo deve ter um número de incidência positivo com um  $n$ -simplexo o qual ele é face e um número de incidência negativo com o outro  $n$ -simplexo. Portanto  $K$  é orientável.

□

Em particular temos que  $S^n$  é orientável. De fato como um  $(n+1)$ -simplexo  $\sigma^{n+1}$  é homeomorfo a bola de dimensão  $n+1$  temos que o complexo  $K$  formado pelo fecho de  $\sigma^{n+1}$  menos a face  $\sigma^{n+1}$  é uma  $n$ -pseudovarietade para  $S^n$ . Considere uma  $n$ -cadeia  $z = \sum_{i=0}^{n+1} g_i \sigma_i^n$  de  $K$  onde  $\sigma_i^n = \langle a_0 a_1 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{n+1} \rangle$  com  $\hat{a}_i$  sendo o vértice retirado.

Como  $K$  é  $n$ -pseudovarietade temos que cada  $(n-1)$ -simplexo é face de exatamente dois  $n$ -simplexos e então  $g_0 = \pm g_i$  para todo  $0 \leq i \leq n+1$ , pois  $\partial(z) = 0$ . Logo podemos escrever  $g_0 = g_i$ , a menos de uma reordenação dos vértices. Daí

$$\begin{aligned} z &= \sum g \sigma_i^n \\ &= g \sum 1 \cdot \sigma_i^n, \end{aligned}$$

e assim  $Z_n(K) \neq 0$ , pois basta tomar  $g \neq 0$ . Visto que  $B_n(K) \simeq 0$  temos que  $H_n(K) \neq 0$ . Portanto pelo Lema anterior  $S^n$  é orientável, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Faremos a seguir nossa primeira aplicação da teoria de homologia, o Teorema da invariância da dimensão por homeomorfismos, tal teorema nos diz que dado duas esferas abertas em espaços euclidianos de dimensões diferentes teremos que elas não poderão ser homeomorfas e o mesmo ocorrerá para os próprios espaços euclidianos de dimensões diferentes. Podemos ainda concluir desse resultado que duas variedades topológicas de dimensões diferentes não podem ser homeomorfas pois elas são localmente homeomorfas

a um espaço euclidiano.

**Teorema: (Teorema da invariância da dimensão)** Sejam  $m, n$  inteiros positivos. Se  $m \neq n$  então

- (a)  $\mathbb{S}^m$  e  $\mathbb{S}^n$  não são homeomorfas.
- (b)  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  não são homeomorfos

**Prova:** (a) Suponha que  $\mathbb{S}^m$  e  $\mathbb{S}^n$  sejam homeomorfas, então considerando uma  $m$ -pseudovariabilidade  $K$  relacionada a  $\mathbb{S}^m$  e uma  $n$ -pseudovariabilidade  $L$  relacionada a  $\mathbb{S}^n$ , temos que os poliedros  $|K|$  e  $|L|$  são homeomorfos a  $\mathbb{S}^m$  e a  $\mathbb{S}^n$  respectivamente. Logo, temos que  $|K|$  e  $|L|$  são homeomorfos, pois  $\mathbb{S}^m$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .

Considere  $f : |K| \rightarrow |L|$  um homeomorfismo, então pelo Teorema 8, temos que os grupos de homologia  $H_p(K)$  e  $H_p(L)$  são isomorfos para cada  $p$ . Como  $m \neq n$ , temos que ou  $m < n$  ou  $m > n$ . Suponha  $m < n$ . Daí, visto que  $\mathbb{S}^n$  é orientável temos pela Proposição 1 que  $H_n(L) \simeq \mathbb{Z}$ . Por outro lado, como  $m < n$ , temos que  $K$  não possui  $n$ -simplexos, logo não possui  $n$ -cadeias e assim  $Z_n(K) \simeq 0$ , ou seja,  $H_n(K) \simeq 0$ . Mas,  $H_n(K)$  é isomorfo a  $H_n(L)$ , assim  $\mathbb{Z}$  é isomorfo a  $0$ . Mas isto é um absurdo.

Agora suponha  $m > n$ . Como  $\mathbb{S}^m$  é orientável, temos pela Proposição 1, que  $H_m(K) \simeq \mathbb{Z}$ . Por outro lado, como  $m > n$ , temos que  $L$  não possui  $m$ -simplexos, logo não possui  $m$ -cadeias e assim  $Z_m(L) \simeq 0$ , ou seja,  $H_m(L) \simeq 0$ . Mas  $H_m(L)$  é isomorfo a  $H_m(K)$ , sendo assim teremos novamente  $\mathbb{Z}$  isomorfo a  $0$ . Que gera uma contradição.

Portanto não se pode ter  $\mathbb{S}^m$  homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ , com  $m \neq n$ .

(b) Suponhamos por absurdo que  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  sejam homeomorfos. Sabemos que  $\mathbb{R}^m$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$  e que  $\mathbb{R}^n$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ . Como  $\mathbb{S}^m$  e  $\mathbb{S}^n$  são espaços compactos e Hausdorff, podemos obter

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^m, \quad f(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_m}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right)$$

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad g(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right)$$

compactificações de Alexandrov, com

$$f(\mathbb{R}^m) \cup \{(0, \dots, 0, 1)\} = \mathbb{S}^m \quad e \quad g(\mathbb{R}^n) \cup \{(0, \dots, 0, 1)\} = \mathbb{S}^n.$$

Como estamos supondo  $\mathbb{R}^m$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , temos pela Proposição 2 que  $\mathbb{S}^m$  é homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ , com  $m \neq n$ . Absurdo, pois o item (a) acima diz que isso não é possível.

Assim, temos que  $\mathbb{R}^m$  não pode ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , com  $m \neq n$ . Portanto, concluímos a demonstração deste teorema.

□

A seguir apresentaremos alguns elementos necessários para o entendimento e demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz. Aqui apresentaremos apenas as definições e resultados extremamente necessários para o nosso objetivo, porém para ter mais detalhes da construção dessa parte da teoria de homologia simplicial indicamos olhar a referência [6] onde é falado de muito mais definições interessantes e resultados que aqui não couberam. Na proposição abaixo apresentamos uma importante propriedade satisfeita pela aplicação  $Sd$ .

**Proposição 3:** Dado um complexo simplicial  $K$  temos que a aplicação  $Sd : C(K) \longrightarrow C(K')$  é um morfismo.

**Prova:** Primeiro note que para todo  $i \geq 1$  temos  $\partial(a * c_i) = c_i - a * \partial c_i$  onde  $c_i$  uma  $i$ -cadeia. De fato,

$$\begin{aligned} \partial(a * c_i) &= \partial \left( a * \sum_j g_j \sigma_i^j \right) \\ &= \partial \left( a * \sum_j g_j \langle a_0^j \cdots a_i^j \rangle \right) \\ &= \partial \left( \sum_j g_j \langle a a_0^j \cdots a_i^j \rangle \right) \\ &= \sum_j g_j \left( \sum_k (-1)^{k+1} \langle a a_0^j \cdots \widehat{a_k^j} \cdots a_i^j \rangle + \sigma_j^i \right), \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
 c_i - \alpha * \partial c_i &= c_i - \alpha * \partial \left( \sum_j g_j \sigma_j^i \right) \\
 &= \sum_j g_j \sigma_j^i - \alpha * \sum_j g_j \sum_k (-1)^k \langle a_0^j \cdots \widehat{a_k^j} \cdots a_i^j \rangle \\
 &= \sum_j g_j \sigma_j^i + \sum_j \sum_k (-1)^{k+1} g_j \langle \alpha a_0^j \cdots \widehat{a_k^j} \cdots a_i^j \rangle \\
 &= \sum_j g_j \left( \sum_k (-1)^{k+1} \langle \alpha a_0^j \cdots \widehat{a_k^j} \cdots a_i^j \rangle + \sigma_j^i \right).
 \end{aligned}$$

Agora vamos provar por indução a afirmação da proposição. Admitindo indutivamente que  $\partial \text{Sd}(c_i) = \text{Sd}(\partial c_i)$  para  $i \leq p-1$  e como  $\partial(\alpha * c_i) = c_i - \alpha * \partial c_i$  temos

$$\begin{aligned}
 \partial(\text{Sd}(c_p)) &= \partial \left( \sum_i g_i \text{Sd}(\sigma_i^p) \right) \\
 &= \partial \left( \sum_i g_i \cdot b_{\sigma_i^p} * \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) \right) \\
 &= \sum_i g_i \cdot \partial(b_{\sigma_i^p} * \text{Sd}(\partial \sigma_i^p)) \\
 &= \sum_i g_i \left( \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) - b_{\sigma_i^p} * \partial \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) \right) \\
 &= \sum_i g_i \left( \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) - b_{\sigma_i^p} * \text{Sd}(\partial(\partial \sigma_i^p)) \right) \\
 &= \sum_i g_i \left( \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) - b_{\sigma_i^p} * \text{Sd}(\partial^2 \sigma_i^p) \right) \\
 &= \sum_i g_i \text{Sd}(\partial \sigma_i^p) \\
 &= \text{Sd} \left( \sum_i g_i \partial \sigma_i^p \right) \\
 &= \text{Sd} \left( \partial \left( \sum_i g_i \sigma_i^p \right) \right) \\
 &= \text{Sd}(\partial c_p).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\partial \text{Sd}(c_i) = \text{Sd}(\partial c_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , logo  $\text{Sd} : C(\mathbb{K}) \rightarrow C(\mathbb{K}')$  é de fato um morfismo.

□

A partir de agora até o final da prova do teorema do ponto fixo de Lefschetz iremos considerar nossos complexos com coeficientes num corpo qualquer. Assim  $H_p(\mathbb{K})$  é um

espaço vetorial, cuja dimensão  $\beta_p = \beta_p(K)$  é chamada o número de Betti de dimensão  $p$  de  $K$ .

Dado um espaço vetorial  $E$  de dimensão finita, e um subespaço  $F$  invariante por uma aplicação  $f : E \rightarrow E$ , podemos induzir uma aplicação linear  $\bar{f} : E/F \rightarrow E/F$ , definida por  $\bar{f}(x + F) = f(x) + F$ ,  $x \in E$ . Diz-se que  $\bar{f}$  é obtida de  $f$  por passagem ao quociente.

**Proposição 4:** Seja  $E, F, f$  e  $\bar{f}$  como acima. Se  $F \subset E$  é um subespaço invariante por  $f$ , consideramos a restrição  $f|_F : F \rightarrow F$  e temos

$$\text{tr.}(f) = \text{tr.}(f|_F) + \text{tr.}(\bar{f}).$$

Onde  $\text{tr.}$  denota o traço da matriz da aplicação em questão.

**Prova:** Considere que  $\dim(E) = n$  e uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$ , onde os  $m$  primeiros vetores formam uma base para  $F$ . Daí, note que  $\{v_{m+1} + F, \dots, v_n + F\}$  forma uma base para  $E/F$ . De fato, se  $(w + F) \in E/F$  com  $w = \sum_i \lambda_i v_i$  temos que

$$w - \sum_{i=m+1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in F$$

assim  $\{v_{m+1} + F, \dots, v_n + F\}$  gera  $E/F$  e como  $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$  é L.I., temos que  $\{v_{m+1} + F, \dots, v_n + F\}$  é L.I.. Portanto é base. Agora note que as matrizes de  $f, f|_F$  e  $\bar{f}$  nas bases escolhidas de  $E, F$  e  $E/F$  respectivamente são

$$f = [f_i(v_j)]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad f|_F = [f_i(v_j)]_{1 \leq i, j \leq m} \quad e$$

$$\bar{f} = [\bar{f}_i(v_j + F)]_{m+1 \leq i, j \leq n} = [f_i(v_j) + F]_{m+1 \leq i, j \leq n}.$$

Logo,

$$\text{tr.}(f) = \sum_{i=1}^n f_i(v_i), \quad \text{tr.}(f|_F) = \sum_{i=1}^m f_i(v_i), \quad \text{tr.}(\bar{f}) = \sum_{i=m+1}^n f_i(v_i).$$

Portanto,  $\text{tr.}(f) = \text{tr.}(f|_F) + \text{tr.}(\bar{f})$ .

□

**Definição 37:** Sejam  $C(K)$  e  $C(L)$  complexos de cadeias dos complexos  $K$  e  $L$ , e  $f, g : C(K) \rightarrow C(L)$  morfismos entre elas. Uma **homotopia algébrica** entre  $f$  e  $g$  é

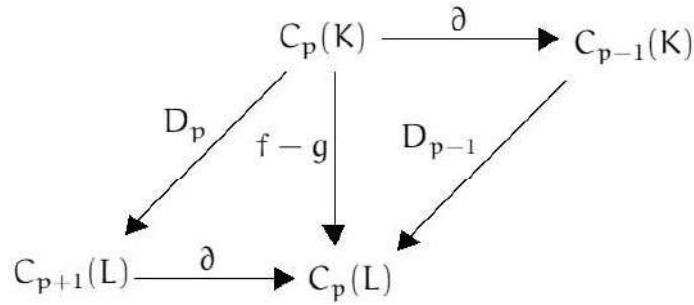


Figura 4.1: Diagrama de aplicações algébricamente homotópicas

uma sequência de homomorfismos  $D = D_p : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(L)$ , tal que  $\partial D_p + D_{p-1} \partial = f_p - g_p$ , ou simplesmente  $\partial D + D \partial = f - g : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ ,  $p > 0$ .

Se  $f, g : C(K) \rightarrow C(L)$  são morfismos algébricamente homotópicos, isto é, se existe uma homotopia algébrica entre  $f$  e  $g$ , então os homomorfismos induzidos por  $f$  e  $g$  nos grupos de homologia coincidem, ou seja, tem-se  $f_* = g_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ ,  $p \geq 0$ . Isto é justamente o que diz a próxima proposição.

**Proposição 5:** Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos simpliciais. Se os morfismos  $f, g : C(K) \rightarrow C(L)$  são algébricamente homotópicos então  $f_* = g_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$  para todo  $p \geq 0$ .

**Prova:** Dado  $z \in Z_p(K)$ , temos que  $\partial(z) = 0$ . Logo para  $p \geq 0$  temos

$$\begin{aligned} f_p(z) - g_p(z) &= \partial(D_p(z)) - D_{p-1} \partial(z) \\ &= \partial(D_p(z)) \in B_p(L). \end{aligned}$$

Segue que  $f_p(z)$  e  $g_p(z)$  são  $p$ -ciclos homólogos, ou seja,

$$f_{p*}[z] = [f_p(z)] = [g_p(z)] = g_{p*}[z].$$

Assim,  $f_* = g_*$ .

□

Dado um complexo simplicial  $K$ , temos que o complexo  $K \times [0, 1]$  pode ser escrito como

$$K \times [0, 1] = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \times [0, 1],$$



de modo que para decompor  $K \times [0, 1]$  em simplexos, basta descrever para cada simplexo  $\sigma = \langle a_0 a_1 \cdots a_n \rangle$  em  $K$ , quais os simplexos que decompõem o prisma  $\sigma \times [0, 1]$  como poliedro.

Para cada vértice  $a_i$  do simplexo  $\sigma$ , ponhamos  $\overline{a}_i = (a_i, 0)$  e  $\overline{\overline{a}}_i = (a_i, 1)$ . Então

$$\sigma \times [0, 1] = \cup_{i=0}^n \langle \overline{a}_0 \cdots \overline{a}_i \overline{\overline{a}}_i \cdots \overline{\overline{a}}_n \rangle$$

e esta vai ser a decomposição de  $\sigma \times [0, 1]$  como reunião dos simplexos  $(n+1)$ -dimensionais  $\langle \overline{a}_0 \cdots \overline{a}_i \overline{\overline{a}}_i \cdots \overline{\overline{a}}_n \rangle$ .

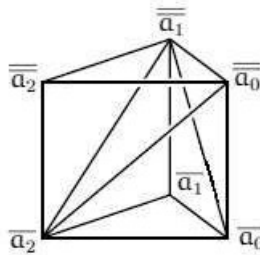


Figura 4.2: Decomposição de um simplexo cartesiano com um intervalo

Defina as aplicações simpliciais  $\alpha, \beta : K \rightarrow K \times [0, 1]$  pondo para cada simplexo  $\sigma = \langle a_0 \cdots a_n \rangle$  em  $K$ ,  $\alpha(\sigma) = \langle \overline{a}_0 \cdots \overline{a}_n \rangle$  e  $\beta(\sigma) = \langle \overline{\overline{a}}_0 \cdots \overline{\overline{a}}_n \rangle$ . Pelo Teorema 4  $\alpha$  e  $\beta$  induzem morfismos  $\alpha, \beta : C(K) \rightarrow C(K \times [0, 1])$ .

O resultado abaixo será de fundamental importância para demonstrar o resultado que diz que dadas duas aplicações homotópicas definidas entre dois poliedros quaisquer teremos que elas induzem o mesmo homomorfismo nos grupos de homologia dos poliedros. Para mais detalhes dessas definições e resultados recomendamos ao leitor a referência [6].

**Lema 5:** Os morfismos  $\alpha, \beta : C(K) \rightarrow C(K \times [0, 1])$  são algébricamente homotópicos.

**Prova:** Para cada  $p \geq 0$ , definamos o homomorfismo

$$D = D_p : C_p(K) \rightarrow C_{p+1}(K \times [0, 1])$$

$$D_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle \overline{a}_0 \cdots \overline{a}_i \overline{\overline{a}}_i \cdots \overline{\overline{a}}_p \rangle,$$

onde  $\sigma = \langle a_0 \cdots a_p \rangle$  é um  $p$ -simplexo orientado de  $K$ . Daí, note que para  $\sigma = \langle a_0 \cdots a_p \rangle$  temos que

$$\begin{aligned}
 \partial D_p(\sigma) + D_{p-1}\partial(\sigma) &= \partial \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ D_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle a_0 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_p \rangle \right) \\
 &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(\langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle) \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^i D_{p-1}(\langle a_0 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_p \rangle) \\
 &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_j} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j=i}^p (-1)^{j+1} \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \widehat{a_j} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_j} \overline{a_j} \cdots \widehat{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^i \left( \sum_{j=i+1}^p (-1)^{j-1} \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_i} \cdots \overline{a_j} \overline{a_j} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &= \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_j} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j+1} \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \overline{a_i} \cdots \widehat{a_j} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_j} \overline{a_j} \cdots \widehat{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j-1} \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_i} \cdots \overline{a_j} \overline{a_j} \cdots \overline{a_p} \rangle \right) \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^{i+i} \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \\
 &+ \sum_{i=0}^p (-1)^{i+i+1} \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \widehat{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \\
 &= \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_p} \rangle + \sum_{i=1}^p \langle \overline{a_0} \cdots \widehat{a_i} \overline{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle \\
 &- \sum_{i=0}^{p-1} \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_i} \widehat{a_i} \cdots \overline{a_p} \rangle - \langle \overline{a_0} \cdots \overline{a_p} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle - \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle \\
 &+ \sum_{i=1}^p \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \widehat{\overline{\mathbf{a}_i}} \overline{\mathbf{a}_i} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle - \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \overline{\mathbf{a}_{i-1}} \widehat{\overline{\mathbf{a}_{i-1}}} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle \\
 &= \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle - \langle \overline{\mathbf{a}_0} \cdots \overline{\mathbf{a}_p} \rangle \\
 &= \beta(\sigma) - \alpha(\sigma).
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 9:** Sejam  $|K|$  e  $|L|$  poliedros. Aplicações contínuas homotópicas  $g, f : |K| \longrightarrow |L|$  induzem homomorfismos iguais  $f_* = g_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(L)$  nos grupos de homologia.

**Prova:** Seja  $H : |K| \times [0, 1] \longrightarrow |L|$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , considerando as aplicações simpliciais  $\alpha, \beta : |K| \longrightarrow |K| \times [0, 1]$ , dadas por  $\alpha(\mathbf{a}_i) = (\mathbf{a}_i, 0)$  e  $\beta(\mathbf{a}_i) = (\mathbf{a}_i, 1)$ , para todo  $\mathbf{a}_i \in |K|$ , temos que  $(H \circ \alpha)(\mathbf{a}_i) = H(\mathbf{a}_i, 0) = f(\mathbf{a}_i)$  e  $(H \circ \beta)(\mathbf{a}_i) = H(\mathbf{a}_i, 1) = g(\mathbf{a}_i)$ . Pelo Lema 5, temos que os morfismos  $\alpha, \beta : C(K) \longrightarrow C(K \times [0, 1])$  são algébricamente homotópicos, logo pela Proposição 5 temos que eles induzem os mesmos homomorfismos

$$\alpha_* = \beta_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(K \times [0, 1]),$$

nos grupos de homologia, para todo  $p \geq 0$ . Assim, pelo Lema 2, temos

$$f_* = (H \circ \alpha)_* = H_* \circ \alpha_* = H_* \circ \beta_* = (H \circ \beta)_* = g_*.$$

Portanto,  $f_* = g_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(L)$ , para todo  $p \geq 0$ .

□

**Definição 38:** Se  $\dim(K) = n$ , o número de Lefschetz de  $f$  é, por definição

$$L(f) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr.}(f_{p*}).$$

Pelo Teorema 9, temos que o número de Lefschetz independe do homomorfismo induzido nos grupos de homologia, ou seja, está bem definido. A seguir provaremos o Lema de Hopf o qual nos dá uma igualdade entre o número de Lefschetz e um somatório que depende apenas da aplicação  $f$  dada, tal igualdade é de suma importância para a demonstração do Teorema do ponto fixo de Lefschetz.

**Lema de Hopf:**  $\sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr.}(f_{p*}) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr.}(f_p)$ .

**Prova:** Como  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ , temos que o homomorfismo  $f_{p*}$  é obtido de  $f_p|_{Z_p} : Z_p \rightarrow Z_p$  por passagem ao quociente, logo temos,

$$\text{tr.}(f_p|_{Z_p}) = \text{tr.}(f_{p*}) + \text{tr.}(f_p|_{B_p}),$$

visto que dado  $w \in B_p$ , existe  $\sigma \in C_{p+1}$  tal que  $\partial(\sigma) = w$ . Logo

$$f_p(w) = f_p(\partial\sigma) = \partial f_{p+1}(\sigma),$$

onde  $f_{p+1}(\sigma) \in C_{p+1}$  e então  $f_p(w) \in B_p$ . Assim  $B_p$  é invariante por  $f_p$ . Da mesma forma para  $w \in Z_p$  vale  $\partial(w) = 0$ . Com isto obtemos que

$$\partial(f_p(w)) = f_{p-1}\partial(w) = f_{p-1}(0) = 0,$$

daí  $f_p(w) \in Z_p$ ,  $Z_p$  é invariante por  $f_p$  e assim  $f_p : C_p \rightarrow C_p$  induz uma aplicação  $\bar{f}_p : C_p/Z_p \rightarrow C_p/Z_p$  por passagem ao quociente. Então

$$\text{tr.}(f_p) = \text{tr.}(f_p|_{Z_p}) + \text{tr.}(\bar{f}_p). \tag{4.1}$$

Veja que, dada a aplicação bordo  $\partial : C_p \rightarrow C_{p-1}$  temos que  $Z_p$  é o seu núcleo e  $\partial(C_p) = B_{p-1}$ . Pelo teorema dos isomorfismos, temos que  $\bar{\partial} : C_p/Z_p \rightarrow B_{p-1}$  é um isomorfismo onde  $\bar{\partial}(w + Z_p) = \partial(w)$ . Além disso, como  $f_{p-1} \circ \partial = \partial \circ f_p$  temos que o diagrama abaixo é comutativo:

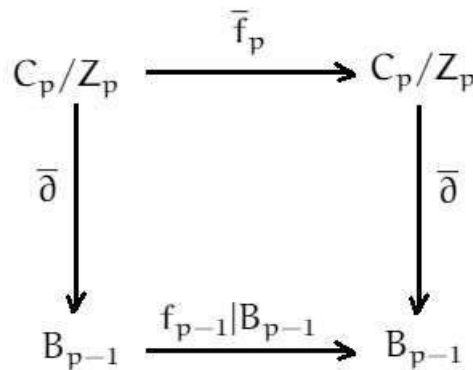


Figura 4.3: Diagrama do Lema de Hopf

De fato,

$$\begin{aligned}
 (\bar{\partial} \circ \bar{f}_p)(w + Z_p) &= \bar{\partial}(f_p(w) + Z_p) \\
 &= \partial(f_p(w)) \\
 &= f_{p-1}(\partial(w)) \\
 &= f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}}(\partial(w)) \\
 &= f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}}(\bar{\partial}(w + Z_p)) \\
 &= (f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}} \circ \bar{\partial})(w + Z_p).
 \end{aligned}$$

Assim,  $\text{tr}(\bar{\partial} \circ \bar{f}_p) = \text{tr}(f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}} \circ \bar{\partial}) \Rightarrow \text{tr}(\bar{f}_p) = \text{tr}(f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}})$ . De (4.1) segue que

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(f_p) &= \text{tr}(f_p|_{Z_p}) + \text{tr}(\bar{f}_p) \\
 &= \text{tr}(f_p|_{Z_p}) + \text{tr}(f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}}).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como  $B_n = 0$ , pois  $\dim(K) = n$ , considere  $\text{tr}(f_{-1}|_{\mathbb{B}_{-1}}) = \text{tr}(f_n|_{\mathbb{B}_n}) = 0$  e

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr}(f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}}) &= \sum_{p=-1}^{n-1} (-1)^{p+1} \text{tr}(f_p|_{\mathbb{B}_p}) \\
 &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p [-\text{tr}(f_p|_{\mathbb{B}_p})] + \text{tr}(f_{-1}|_{\mathbb{B}_{-1}}) \\
 &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p [-\text{tr}(f_p|_{\mathbb{B}_p})] + (-1)^n \text{tr}[-(f_n|_{\mathbb{B}_n})] \\
 &= \sum_{p=0}^n (-1)^p [-\text{tr}(f_p|_{\mathbb{B}_p})].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, de (4.2) e (4.3) temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr}(f_p) &= \sum_{p=0}^n (-1)^p [\text{tr}(f_p|_{Z_p}) + \text{tr}(f_{p-1}|_{\mathbb{B}_{p-1}})] \\
 &= \sum_{p=0}^n (-1)^p [\text{tr}(f_p|_{Z_p}) - \text{tr}(f_p|_{\mathbb{B}_p})] \\
 &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \text{tr}(f_{p*}).
 \end{aligned}$$

□

Por fim provaremos a nossa segunda e última aplicação da teoria de homologia desenvolvida dessa dissertação

**Teorema do ponto fixo de Lefschetz:** Seja  $f : |K| \rightarrow |K|$  uma aplicação contínua. Se  $L(f) \neq 0$  então  $f$  admite pelo menos um ponto fixo.

**Prova:** Suponha por absurdo que  $f$  não tem pontos fixos. Então existe  $c > 0$  tal que  $|x - f(x)| \geq c$ , para todo  $x \in K$ . Como a homologia de  $K$  independe da triângulação, podemos supor que todos os seus simplexos tem diâmetro menor que  $\frac{c}{2}$ .

Pelo teorema da aproximação simplicial, temos que existe uma subdivisão baricêntrica  $K^{(m)}$  de  $K$  e uma aproximação simplicial  $\varphi : |K^{(m)}| \rightarrow |K|$ , onde  $\varphi : K^{(m)} \rightarrow K$  é aplicação simplicial. Como  $\varphi$  é aproximação simplicial de  $f$  temos que  $\varphi(x)$  e  $f(x)$  estão no mesmo simplexo de  $K$ , para todo  $x \in K^{(m)}$ , logo

$$\begin{aligned} |x - \varphi(x)| &= |x - f(x) + f(x) - \varphi(x)| \\ &\geq |x - f(x)| - |f(x) - \varphi(x)| \\ &> c - \frac{c}{2} \\ &= \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Se  $\sigma$  é um simplexo de  $K^{(m)}$  e  $x \in \sigma$ , o ponto  $\varphi(x)$  não pertence ao  $\sigma$ , ou seja,  $\varphi(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ , para todo  $\sigma \in K^{(m)}$ . Pelo Teorema 4, temos que  $\varphi$  induz um morfismo que denotaremos pela mesma notação,  $\varphi : C(K^{(m)}) \rightarrow C(K)$ . Daí considere o morfismo

$$\begin{aligned} f : C(K) &\rightarrow C(K) \\ f &= \varphi \circ Sd^m \end{aligned}$$

onde  $Sd^m : C(K) \rightarrow C(K^{(m)})$ . Logo temos que para todo  $p \in \mathbb{N}$   $f_p = \varphi_p \circ Sd^m$  e pelo Teorema 3 temos que o morfismo  $f$  induz uma sequência de homomorfismos  $f_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$ , para cada  $p > 0$ , que pelo Teorema 9 independe da aproximação simplicial. Dado  $w = \sum_j g_j \sigma_j^p \in C_p(K)$  temos que  $Sd^m(w) \in C_p(K^{(m)})$ , logo  $Sd^m(w) = \sum_i g_i \bar{\sigma}_i^p$ , onde  $\bar{\sigma}_i^p \in K^{(m)}$  e  $\bar{\sigma}_i^p \subset \sigma_j^p$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_p(w) &= \varphi_p \left( \sum_i g_i \bar{\sigma}_i^p \right) \\ &= \sum_i g_i \varphi_p(\bar{\sigma}_i^p). \end{aligned}$$

Como  $\varphi(\sigma) \cap \sigma = \emptyset$ , temos que  $\varphi_p(\sigma_j^p) \cap \sigma_j^p = \emptyset$  e então  $\varphi_p(\bar{\sigma}_i^p) \cap \sigma_j^p = \emptyset$ ,  $\forall i$ . Escrevendo  $f_p(w)$  como combinação linear das  $p$ -cadeias elementares, temos que o

coeficiente de  $\sigma_j^p$  vai ser zero, visto que  $\varphi_p(\overline{\sigma_i^p}) \cap \sigma_j^p = \emptyset$  e

$$f_p(w) = \sum_i g_i \varphi_p(\overline{\sigma_i^p}).$$

Para cada  $\sigma_j^p \in K$ , temos que  $f_p(\sigma_j^p)$  tem coeficiente zero multiplicando  $\sigma_j^p$  quando escrito como combinação linear das  $p$ -cadeias elementares. Portanto, os elementos da diagonal da matriz  $[f_p]$  são todos zero. Logo  $\text{tr.}(f_p) = 0$ , e pelo Lema de Hopf,  $L(f) = 0$ . Absurdo! Então,  $f$  tem ao menos um ponto fixo.

□

Como consequências do Teorema do ponto fixo de Lefschetz temos o Teorema do ponto fixo de Brouwer e um resultado de Topologia Diferencial e Sistemas Dinâmicos.

**Corolário 1: Teorema do ponto fixo de Brouwer:** Seja  $B$  a bola fechada de centro na origem e raio 1 em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Toda aplicação contínua  $f : B \rightarrow B$  possui pelo menos um ponto fixo.

**Comentário da prova:** Como  $B$  é contrátil temos que os grupos de homologia  $H_p(B) \simeq 0$  para todo  $0 < p$  e como  $B$  é conexa  $H_0(B) \simeq \mathbb{Z}$ . Daí temos que as induzidas  $(f_p)_*$  são aplicações nulas para todo  $0 < p$ . Mas agora dado a induzida  $(f_0)_*$  tomemos um 0-ciclo  $z = g\langle a \rangle$  onde  $a$  é um vértice da  $(n+1)$ -pseudovarietade relacionada a  $B$  e então  $(f_0)_*(z + B_0(B))$  é um 0-ciclo não nulo em  $H_0(B)$ . Portanto  $\text{tr.}(f_{p*}) = 0$  se  $0 < p$  e  $\text{tr.}(f_{0*}) \neq 0$ . Assim  $L(f) \neq 0$  e segue pelo Teorema de Lefschetz que  $f$  tem um ponto fixo.

□

A característica de Euler do poliedro  $|K|$  é a soma alternada  $\chi(|K|) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha_r$ , onde  $\alpha_r$  é o número de simplexes de dimensão  $r$  e  $n$  é a dimensão de  $|K|$ .

Daí podemos observar que se  $K$  é a  $n$ -pseudovarietade associada ao poliedro  $|K|$ , o corpo dos coeficientes das cadeias de  $K$  for um corpo de característica zero e a aplicação  $f : |K| \rightarrow |K|$  for homotópica à identidade então o número de Lefschetz de  $f$  é igual a característica de Euler do poliedro  $|K|$ , ou seja,  $L(f) = \chi(|K|)$ .

**Corolário 2:** Se uma superfície compacta  $S$  tem característica de Euler diferente de zero então todo campo contínuo de vetores tangentes a  $S$  possui ao menos uma singularidade.

**Comentário da prova:** Suponha por absurdo que temos um campo  $X$  de vetores tangentes a  $S$ , o qual podemos supor diferenciável, com  $X(p) \neq 0$  para todo  $p \in S$ . Definimos então uma aplicação  $f : S \rightarrow S$  sem pontos fixos, homotópica à identidade, fixando um número  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e pondo, para cada  $p \in S$ ,  $f(p) =$  ponto obtido deslocando  $p$  ao longo da órbita que se origina em  $p$ , por um tempo  $\epsilon$ .

□



# Referências Bibliográficas

- [1] CROOM, F. H. **Basic Concepts of Algebraic Topology**. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1978.
- [2] LIBARDI, Alice Kimie Miwa. VIEIRA, João Peres. MELO, Thiago de. **Invariantes topológicos**. São Paulo : Cultura Acadêmica, 2012.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, vol.2** 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral** 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento** 4.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2012.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Homologia Básica** 2.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2012.
- [7] LIRA, Fabrício de Macedo. **Triangulação de superfícies fechadas e orientáveis com poucos vértices**. Dissertação de mestrado do programa de pós graduação em matemática da Universidade Federal do Alagoas, 2015.
- [8] MONTIEL, Sebastián. Ros, Antonio. **Curves and surfaces** 2.ed. : The American Mathematical Society, 2009.
- [9] MUNKRES, J. R. **Elements of Algebraic Topology**.The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, 1984.
- [10] MUNKRES, J. R. **Topology: A First Course**. Prentice Hall, Inc.,1975.