Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controlabilidade Exata da Aproximação de Galerkin para Fluidos Micropolares

Weslay Vieira de Araujo

Teresina - 2014

Weslay Vieira de Araujo

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Exata da Aproximação de Galerkin para Fluidos Micropolares

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

Serviço de Processamento Técnico

A663c Araujo, Weslay Vieira de.

Controlabilidade exata da aproximação de Galerkin para fluidos micropolares/ Weslay Vieira de Araujo - 2014.

50f.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2014.

Orientação: Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira.

Co-Orientação: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.

1. Análise Matemática. 2. Controlabilidade Exata. 3. Aproximação de Galerkin. 4. Fluidos Micropolares. I. Título.

CDD 515

Aos meus pais Francisco e Maria, meus irmãos Vitor, Lucas, Josué e Débora, à minha noiva Kécia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado sabedoria e força para que podesse chegar até aqui. Sem Ele não teria conseguido nada do que conquistei na minha vida, pois está sempre na minha frente. Por ter colocado pessoas maravilhosas na minha vida que sempre torceram por mim.

Agradeço à minha família por ter sempre me apoiado em meus estudos e me encorajado a concluir o mestrado, mesmo com imensa saudade. Aos meus pais Francisco e Maria, meus irmãos Vitor, Lucas, Josué e Débora, e à minha noiva Kécia que sempre se preocupou comigo e que em suas ligações diárias me mostrava o que é amar de verdade. Amo todos vocês.

Agradeço ao professor Alexandro Marinho por acreditar em mim no estudo da matemática desde a graduação com orientação em trabalhos de iniciação científica. Por sua paciência e dedicação em minha orientação agora no mestrado, a qual culmina neste trabalho.

Agradeço aos meus professores do mestrado Paulo Alexandre, Juscelino Silva, Jurandir Lopes e Cícero Aquino por suas excelentes aulas, as quais me incentivaram a continuar meus estudos.

Agradeço aos professores Marcondes Clark e Aldo Trajano por terem aceito o convite para participar da minha banca e pelas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos do mestrado, não irei citá-los pois não quero correr o risco de esquecer algum, pelo apoio e incentivo nas horas mais difíceis. Com estes aprendi muito, quer seja no estudo da matemática onde nos reuníamos dia e noite para estudar e resolver listas de exercícios, quer seja como pessoa por suas simplicidades e espírito de cooperação.

Agradeço à coordenação pedagógica do IFPI - Campus Parnaíba, em especial à professora Maria dos Remédios Brito que prontamente se colocou a disposição em organizar meus horários nesta mesma instituição a fim de que não prejudicasse meus estudos no mestrado.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“*Uns confiam em carros e outros em cavalos, mas nós faremos menção do nome do Senhor nosso Deus.*”

Salmos 20:7.

Resumo

Consideramos o modelo não-linear descrito por um fluido micropolar em uma região limitada e suave do $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) com controles distribuidos com suporte em um pequeno subconjunto do domínio. Admitimos hipóteses convenientes sobre a base e introduzimos a aproximação de Galerkin para o sistema de fluidos micropolares controlável. Usando o Método da Unicidade de Hilbert combinado com um argumento clássico de ponto fixo provamos a controlabilidade exata para este sistema de dimensão finita.

Palavras-chaves: Controlabilidade Exata, Aproximação de Galerkin, Fluidos Micropolares.

Abstract

We consider the nonlinear model describing micropolar fluid ina a bounded smooth region of $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) with distribuited controls supported in small subset of this domain. Under suitable assumptions on the Galerkin basis, we introduce Galerkin's approximations for the controllable micropolar fluid system. By using the Hilbert Uniqueness Method in combinations with a fixed point argument, we prove the exact controllability result for this finite-dimensional system.

Keywords: Exact Controllability, Galerkin's Approximations, Micropolar Fluids.

Sumário

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto limitado cuja fronteira Γ é considerada bem regular. Considere $\mathcal{O} \subset \Omega$ aberto, não-vazio e suficientemente pequeno. Para $T > 0$, consideramos o domínio cilíndrico $Q = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^4$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Denotamos por $n = n(x)$ o vetor normal unitário externo a Ω no ponto $x \in \Gamma$.

Usamos as notações y, w e p para o campo de velocidade, velocidade angular de rotação das partículas do fluido e distribuição de pressão, respectivamente.

As equações que governam o movimento são as seguintes:

$$\begin{cases} y_t - (\mu + \mu_r)\Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = 2\mu_r \nabla \times w + u 1_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ w_t - \widehat{c}\Delta w + (y \cdot \nabla)w - \overline{c}\nabla(\nabla \cdot w) = 2\mu_r \nabla \times y + v 1_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em} \quad Q, \\ y = w = 0 & \text{em} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0, w(0) = w^0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\widehat{c} = c_a + c_d$ e $\overline{c} = c_o + c_d - c_a$.

Em (1), $\mathcal{O}$ é o domínio de controle, u e v são as funções de controle que atuam sobre o sistema, $1_{\mathcal{O}}$ é a função característica de $\mathcal{O}$, e as constantes positivas μ, μ_r, c_o, c_a e c_d caracterizam as propriedades físicas do fluido: μ é a *viscosidade Newtoniana* usual e μ_r, c_o, c_a e c_d são *viscosidades* adicionais relacionadas com a falta de simetria do tensor de tensão e, consequentimente, ao fato de que o campo de rotações internas w não se anula. Estas constantes satisfazem a desigualdade $c_o + c_d > c_a$ ($\overline{c} > 0$).

Para a dedução do modelo e discussões físicas relacionadas, ver Condiff e Dalher [6], Eringen [10], [11], Lucaszewicz [27] e Petrosyan [33]. Observamos que (1) inclui como caso particular as clássicas equações de Navier-Stokes, as quais têm sido amplamente estudadas (ver, por exemplo, Ladyzhenskaya [22] ou Teman [37]). Neste caso $\mu_r = 0$ e as equações $(1)_1$ e $(1)_2$ são dissociadas. Vários experimentos mostram que as soluções do modelo de fluidos micropolares descrevem melhor o comportamento real de vários fluidos que as soluções correspondentes das equações de Navier-Stokes. Em particular, esta não linearidade associada ao sistema também pode ser usada para simular o comportamento de cristais líquidos, fluidos poliméricos e sangue em vasos finos (ver [1], [4], [9], [19], [34], [36]).

Uma boa referência dos aspectos matemáticos de (1) é [27]; esta contém resultados importantes de existência e unicidade. Em [35] a existência de uma solução forte é provada usando o método de Galerkin.

Devido à dissipação e não-reversibilidade do sistema, é claro que não se pode esperar a controlabilidade exata do modelo de fluidos micropolares com soluções arbitrárias (do mesmo modo como nas equações de Navier-Stokes). Por outro lado, a controlabilidade aproximada é uma questão aberta para o modelo. Porém, a noção de controlabilidade aproximada não parece ser muito significativa. De fato, mesmo se pudéssemos obter uma vizinhança arbitrária de um determinado alvo $\{y^T, w^T\}$ no tempo T pela ação de um controle, a questão sobre o que fazer após o tempo T para ficar na mesma vizinhança permanece aberta.

No contexto das equações de Navier-Stokes, existem resultados de controlbilidade exata local para trajetórias não-controladas obtidas em Fursikov-Imanuvilov [18], Imanuvilov [20] e Fernández-Cara [14]. A controlabilidade aproximada global das equações de Navier-Stokes 2-D com condições de contorno foi obtida por Coron [7]. Combinando os resultados de controlabilidade aproximada global e controlabilidade local, a controlabilidade exata global para o sistema de Navier-Stokes 2-D foi analisada em Coron-Fursikov [8]. Em [24] e [25] Lions e Zuazua introduziram a aproximação de Galerkin de dimensão finita para o sistema de Navier-Stokes, e provaram que estas aproximações de Galerkin são exatamente controláveis. Os problemas de controle ótimo associados com as equações de Navier-Stokes também possui um alcance grande e importante em aplicações. Estas questões foram estudadas, por exemplo, por Fursikov [15] e por Gunzburger e Hou em [16] e [17].

Concernente aos resultados de controle para fluidos micropolares, Fernández-Cara e Guerrero em [13] estudaram a controlabilidade exata local para trajetórias do sistema (1). Note que este caso envolve uma dificuldade. A razão principal é que w é uma variável não-escalar e as equações satisfeitas por suas componentes w_i são associadas aos termos de segunda ordem $\partial_i(\nabla \cdot w)$. No presente trabalho estudamos a controlabilidade exata para fluidos micropolares segundo a aproximação de Galerkin, e alcançamos basicamente o meso nível de conhecimento como no caso das clássicas equações de Navier-Stokes. Os resultados dados neste trabalho podem ser aplicados para diferentes modelos de fluidos mecânicos. Alguns destes modelos, tal como os sistemas de Boussinesq generalizados (ver [2]) e as equações descritas por cristais líquidos (ver [19]) são intensamente estudados.

Este artigo é organizado da seguinte maneira: No capítulo 1, expomos algumas definições e resultados preliminares que utilizamos ao longo do trabalho. No capítulo 2, introduzimos a aproximação de Galerkin para (1) e mostramos que tal aproximação tem uma única solução $\{y, w\} \in C^0([0,T];E) \times C^0([0,T];F)$. No capítulo 3, estabelecemos os resultados de controlabilidade exata para o sistema de dimensão finita. A prova é baseada no Método da Unicidade de Hilbert introduzido por Lions (ver, por exemplo, [23]) para estudar a controlabilidade exata do sistema linear associado e uma técnica do ponto fixo.

Capítulo 1

Noções e Resultados Preliminares

Neste capítulo faremos menção de algumas definições e resultados que julgamos importantes para o desenvolvimento do presente trabalho. Portanto, demonstrações não serão feitas apenas mencionaremos as referências onde estas podem ser encontradas.

1.1 Os espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1. *Sejam* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto mensurável. Definimos o espaço de funções* $L^p(\Omega)$ *por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, *definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess}\{|f(x)|\} = \inf\{C > 0; |f(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Quando $p = 2$ podemos definir uma estrutura hilbertiana no espaço $L^2(\Omega)$ através do seguinte produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Lema 1.1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $1 < q < \infty$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então dados* $\alpha, \beta \geqslant 0$ *temos*

$$\alpha\beta \leqslant \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q.$$

Demonstração: Vide [3]. ∎

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, então o produto* $f \cdot g$ *está em* $L^1(\Omega)$ *e vale*

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Vide [3]. ∎

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$. *Então a soma* $f + g$ *está em* $L^p(\Omega)$ *e vale*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração: Vide [3]. ∎

Teorema 1.3. *Os espaços* $L^p(\Omega)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, são espaços de Banach.*

Demonstração: Vide [3]. ∎

1.2 Introdução às Distribuições

Definição 1.2. *Chama-se de multíndice a qualquer* k*-upla* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$*, onde* $\alpha_i \in \mathcal{N}$*,* $\forall i = 1, ..., k$. *A ordem de um multíndice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ *é o número* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ *e o operador derivada parcial de ordem* $|\alpha|$*, denotado por* D^α*, é definido como segue*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_k^{\alpha_k}}.$$

Definição 1.3. *Seja* u *uma função mensurável definida quase sempre em* Ω. *Definimos o suporte de* u *como sendo o complemeto do maior conjunto aberto* W *de* Ω *no qual* u *se anula. Escreve-se:*

$$\text{supp}(u) = \Omega \setminus W.$$

Definição 1.4. *Representa-se por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis em* Ω *com suporte compacto. Os elementos de* $C_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes.*

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ não é normado. Entretanto, para os propósitos da teoria que nos interessa é suficiente definir uma topologia sobre $C_0^\infty(\Omega)$, a fim de que possamos falar em convergência. Tal noção de convergência foi introduzida por Laurent-Schwartz.

Definição 1.5. *Seja* $(\varphi_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *uma sequência de funções em* $C_0^\infty(\Omega)$. *Diz-se que* $(\varphi_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$ *quando forem satisfeitas as condições:*

i. todas as $(\varphi_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *possuem suportes contidos em um compacto fixo* $K \subset \Omega$*;*

ii. a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathcal{N}}$ *converge para* φ *uniformemente em* K*, juntamente com todas as suas derivadas de todas as ordens.*

Definição 1.6. *O espaço vetorial* $C_0^\infty(\Omega)$*, munido da noção de convergência acima definida, é representado por* $D(\Omega)$*.*

Definição 1.7 (Distribuição sobre Ω)**.** *Denomina-se distribuições sobre* Ω *a toda aplicação linear contínua sobre* $D(\Omega)$*. Ou seja, uma distribuição é uma aplicação* $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *tal que:*

i. $T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi)$*,* $\forall \phi, \psi \in D(\Omega)$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

ii. Se φ_n *converge para* φ *em* $D(\Omega)$*, então* $T(\varphi_n)$ *converge para* $T(\varphi)$ *em* $\mathbb{R}$.

A ação de uma distribuição T, sobre os elementos $\varphi \in D(\Omega)$ será denotada por $\langle T, \varphi\rangle$ e denotaremos o espaço vetorial de todas as distribuições sobre $D(\Omega)$ por $D'(\Omega)$. Além disso, dizemos que uma sequência T_n converge para T em $D'(\Omega)$ quando a sequência $\langle T_n, \varphi\rangle$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

Representa-se por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ localmente integráveis, ou seja, integráveis a Lebesgue sobre qualquer compacto $K \subset \Omega$. Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ podemos associar uma distribuição $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx.$$

Temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Definição 1.8. *Seja* T *uma distribuição sobre* Ω *e* $\alpha \in \mathbb{N}^k$ *um multíndice. Definimos a derivada de ordem* $|\alpha|$ *de* T *como a forma linear* $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Nota-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

1.3 Noções de Integração de Funções Vetoriais

Seja (S, A, m) um espaço de medida abstrado e X um espaço de Banhach. Uma aplicação $u : S \to X$ é dita uma vetorial função simples, se u assume apenas um número finito de valores distintos.

Uma função simples $u : S \to X$ é dita A-mensurável, se

$$u^{-1}\{x\} \in A, \text{ para cada } x \in X.$$

Uma função simples, A-mensurável, $u : S \to X$ é integrável em relação à medida m, também dita m-integrável, se

$$m\{u^{-1}\{x\}\} < \infty.$$

para cada $x \in X$, $x \neq 0$. Neste caso, a soma finita,

$$\sum_{x \in X, \ x \neq 0} m\{u^{-1}\{x\}\}x,$$

que representa um vetor em X, é dita a integral de u em relação à medida m, e escreve-se:

$$\int_S u dm = \sum_{x \in X, \ x \neq 0} m\{u^{-1}\{x\}\}x.$$

Se x_1, x_2, ... , x_r são valores vetoriais distintos assumidos por u, em subconjuntos distintos S_1, S_2, ... , S_r, de S, então podemos escrever:

$$u(s) = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s)$$

onde χ_{S_j} é a função característica de S_j. Temos então

$$\int_S u(s) dm = \sum_{j=1}^{r} x_j m(S_j).$$

A representação $u = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s)$, quando os $x_j's$ são todos distintos e os $S_j's$ são dois a dois disjuntos, é chamada a representação canônica de u.

Se u tem representação canônica $u = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s)$, então

$$\|u(s)\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s) \right\|_X = \sum_{j=1}^{r} \|x_j\|_X \chi_{S_j}(s), \; \forall s \in S.$$

Além disso,

$$\left\| \int_S u(s) dm \right\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{r} x_j m(S_j) \right\|_X \leqslant \sum_{j=1}^{r} \|x_j\|_X m(S_j) = \int \|u(s)\|_X dm.$$

Teorema 1.4. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples definidas em S a valores em X satisfazendo*

$$\lim_{n,m\to\infty} \int \|u_n(t) - u_m(t)\|_X dm = 0.$$

Então existe uma única função $u : S \to X$ tal que $\|u(t)\|_X$ e $\|u(t) - u_n(t)\|_X$ são A-mensuráveis e

$$\lim_{n\to\infty} \int \|u(t) - u_m(t)\|_X dm = 0.$$

Demonstração: Vide [5]. ∎

Em decorrência do teorema acima, denotamos

$$\int u(t) dm = \lim_{n\to\infty} \int u_n(t) dm$$

e diz-se que $\int u(t)dm$ é a integral de Bochner de u em relação a m. A coleção de todas as funções $u : S \to X$, que são Bochner integráveis ou integráveis no sentido de Bochner é denotado por

$$B^1(S, A, m; X).$$

Teorema 1.5. *A função $\|\cdot\|_{B^1} : B^1 \to \mathbb{R}$, dada por $\|\cdot\|_{B^1} = \int \|u(t)\|_X dm$, define uma norma sobre espaço das funções Bochner integráveis. O espaço B^1 munido dessa norma é um espaço de Banach. Além disso, vale*

$$\left\| \int u(t) dm \right\|_X \leqslant \int \|u(t)\|_X dm.$$

Demonstração: Vide [5]. ∎

Definição 1.9. *Dizemos que uma função u é fortemente A-mensurável quando existir uma sequência de funções simples $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$u_n(s) \to u(s) \text{ em } X, \text{ q.s. em } S$$

Teorema 1.6. *Uma função fortemente* A*-mensurável,* $u : S \to X$ *é Bochner integrável se, e somente se,* $\|u\|_X$ *é integrável.*

Demonstração: Vide [5]. ■

1.4 Distribuições Vetoriais

Seja T um número real positivo e considere o intervalo aberto $(0, T)$, juntamente com um espaço de Banach X. Por $L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, representa-se o espaço vetorial das funções vetoriais $u : (0, T) \to X$, definidas quase sempre em $(0, T)$ com valores em X, fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \to \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0, T)$. Em $L^p(0, T; X)$ definimos a norma $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)} : L^p(0, T; X) \to \mathbb{R}$ por

i. para $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(x)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}};$$

ii. para $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Com essa norma segue que $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach.

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, podemos definir uma estrutura hilbertiana no espaço $L^2(0, T; X)$ através do seguinte produto interno

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt,$$

onde $(u(t), v(t))_X$ denota o produto interno em X entre u e v. Ou seja, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert.

Lema 1.2. *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e suponhamos* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$*, então*

$$L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; Y).$$

Demonstração: Vide [28]. ■

Sejam X um espaço de Banach e X' o seu dual. Existe uma identificação entre os espaços $[L^p(0,T;X)]'$ e $L^q(0,T;X')$, onde p, $q \in \mathbb{R}$, com $1 \leqslant p < \infty$ são tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Isto é,

$$[L^p(0,T;X)]' \simeq L^q(0,T;X').$$

A dualidade entre os espaços $[L^p(0,T;X)]' \simeq L^q(0,T;X')$ e $L^p(0,T;X)$ é dada por

$$\langle u, v\rangle_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X',X} dt.$$

O resultado abaixo mostra que tal dualidade em forma de integral está bem definida.

Lema 1.3. *Se* p *e* q *são índices conjugados,* $u \in L^p(0,T;X)$ *e* $v \in L^q(0,T;X')$*, então a função real* $t \to \langle u(t), v(t)\rangle_{X',X}$ *está em* $L^1(0,T)$.

Demonstração: Vide [28]. ■

Considere $u \in L^p(0,T;X)$ e $\varphi \in D(0,T)$, espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $(0,T)$, equipado com a noção de convergência introduzida por Laurent-Schwartz. Associamos a cada u a aplicação $\tau_u : D(0,T) \to X$, definida por

$$\langle \tau_u, \varphi\rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds.$$

onde o valor da integral é um vetor em X.

A aplicação τ_u definida acima é linear e contínua em $D(0,T)$ e consequentemente uma distribuição sobre $(0,T)$, chamada distribuição vetorial sobre $(0,T)$, definida por $u \in L^p(0,T;X)$, com valores em X. Deste modo escrevemos

$$\tau_u \in \mathcal{L}(D(0,T),X).$$

O espaço $\mathcal{L}(D(0,T),X)$ é chamado de espaço vetorial das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e será representado por $D'(0,T;X)$.

Lema 1.4. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(s)\varphi(s)ds = 0$$

para toda $\varphi \in D(0,T)$*, então* $u(t) = 0$ *q.s.em* $(0,T)$.

Demonstração: Vide [29]. ■

Lema 1.5. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds = 0$$

para toda $\varphi \in D(0,T)$, *então* u *é constante.*

Demonstração: Vide [29]. ■

Lema 1.6. *Seja* X *um espaço de Banach cujo dual é representado por* X'. *Se* u *e* g *pertencem a* $L^1(0,T;X)$, *então as seguintes condições são equivalentes:*

i. u *é igual quase sempre a uma primitiva de* g, *isto é*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \ \xi \in X, \text{ independente de } t;$$

ii. Para cada $\varphi \in D(0,T)$, *tem-se*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt;$$

iii. Para cada $x' \in X'$,

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T)$.

Demonstração: Vide [29]. ■

Corolário 1.1. *Sejam* X, Y *espaços de Banach, tais que* $X \hookrightarrow Y$. *Se*

$$u \in L^1(0,T;X) \ e \ \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y)$$

então $u \in C^0([0,T];Y)$.

Demonstração: Vide [29]. ■

Por $C_s([0,T];Y)$, representemos o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y. Isso significa que a aplicação $t \to \langle u(t), y'\rangle$, é contínua em $[0,T]$ para todo $y' \in Y'$ dual de Y. Note que essas funções são também chamadas de funções escalares contínuas.

Teorema 1.7. *Sejam* X, Y *espaços de Banach,* X *reflexivo. Suponha* $X \subset Y$ *densamente e a injeção de* X *em* Y *contínua. Então*

$$L^\infty(0,T;X)\bigcap C_s([0,T];Y) = C_s([0,T];X).$$

Demonstração: Vide [29]. ■

1.5 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, p um número real tal que $1 \leqslant p < \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multíndice $\alpha \in \mathcal{N}^k$, com $|\alpha| \leqslant m$, isto é

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leqslant m\}.$$

A função $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},\ \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

é uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$.

Quando $p = \infty$ tem-se

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m\}.$$

A função $\|\cdot\|_{m,\infty} : W^{m,\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)},\ \forall u \in W^{m,\infty}(\Omega),$$

é uma norma em $W^{m,\infty}(\Omega)$.

Teorema 1.8. *O espaço* $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaços de Banach.*

Demonstração: Vide [30]. ∎

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, são chamados espaços de Sobolev de ordem m, sobre Ω.

Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ recebem notação especial, a saber

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Na verdade os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert, com produto interno dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Sabe-se que o espaço das funções testes $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$, entretanto $C_0^\infty(\Omega)$ não é, em geral, denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Nesse sentido, denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $W^{m,p}(\Omega)$. Este é um espaço de Banach também chamado de espaço de Sobolev. Simbolicamente,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$ temos os espaços $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. O dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W^{-m,q}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído dos funcionais lineares e contínuos

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

1.6 Resultados Preliminares

Teorema 1.9 (Desigualdade de Poincaré). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e limitado. Então existe uma constante* $C = C(\Omega, p) > 0$, *tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leqslant C||u||_0, \ \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

onde $||u||_0 = \left(\sum_{0<|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração: Vide [5]. ■

Como consequência da Desigualdade de Poincaré, a expressão

$$||u||_0 = \left(\sum_{0<|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma natural para os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.10 (Desigualdade de Gronwall). *Seja* C *uma constante não negativa,* $u \geqslant 0$, *q.s. em* $(0, T)$, *uma função integrável em* $(0, T)$, *e* $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa, tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t u(x)\varphi(x)dx, \ \forall t \in [0, T].$$

Então

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_0^t u(x)dx}, \ \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Vide [5]. ■

Teorema 1.11 (Desigualdade de Gronwall Generalizada). *Sejam* $f, \nu : [0, T] \to \mathbb{R}$ *funções não negativas e integráveis,* ν_0 *constante não negativa, e* $a : [0, T] \to \mathbb{R}$, *uma função contínua, não negativa, tais que*

$$v(t) \leqslant v_0 + \int_0^t f(x)dx + \int_0^t v(x)a(x)dx, \ \forall t \in [0, T].$$

Então

$$v(t) \leqslant \left(v_0 + \int_0^t f(x)dx\right)e^{\int_0^t a(x)dx}, \ \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Vide [5]. ∎

Definição 1.10. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $\partial\Omega$ é C^1, então ao longo de $\partial\Omega$ está definido um campo unitário de vetores normais*

$$n = (n_1, ..., n_n)$$

em cada ponto $x \in \partial\Omega$ temos $n(x) = (n_1, ..., n_n)$ com $|n(x)| = 1$.

Assuma que Ω é um conjunto aberto, limitado de $\mathbb{R}^n$ e $\partial\Omega$ é C^1. Então, temos os três seguintes teoremas:

Teorema 1.12 (Gauss-Green)**.** *Suponha que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u n_i dS, \ i \in \{1, ..., n\}.$$

Demonstração: Vide [12]. ∎

Teorema 1.13 (Fórmula de Integração por Partes)**.** *Suponha que u, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i dS, \ i \in \{1, ..., n\}.$$

Demonstração: Vide [12]. ∎

Teorema 1.14 (Fórmulas de Green)**.** *Suponha que u, $v \in C^2(\overline{\Omega})$, então*

i. $\displaystyle\int_\Omega Du \cdot Dv dx = -\int_{\partial\Omega} u\Delta v dS + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} dS$;

ii. $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v dS - \int_\Omega v\Delta u dS = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} dS.$

Demonstração: Vide [12]. ∎

Definição 1.11 (Condições de Carathéodory)**.** *Sejam D um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$, cujos elementos são denotados por (x, t), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory se:*

i. $f(x, t)$ *é mensurável em* t *para cada* x *fixo;*

ii. $f(x,t)$ *é contínua em* x *para cada* t *fixo;*

iii. Para cada compacto $U \subset D$*, existe uma função real integrável* $m_U(t)$ *tal que*

$$|f(x,t)| \leqslant m_U(t), \ \forall (x,t) \in U.$$

Teorema 1.15 (Carathéodory)**.** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação satisfazendo as condições de Carathéodory sobre o retângulo* $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$*, com* a*,* $b \in \mathbb{R}_+$*. Então existe uma solução* $\varphi(t)$ *do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sobre algum intervalo do tipo $(t_0 - \beta, t_0 + \beta)$*, para algum* $\beta > 0$*.*

Demonstração: Vide [31]. ∎

Corolário 1.2 (Prolongamento de Soluções)**.** *Sejam* $D = [0,T] \times B$*, com* $0 < T < \infty$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b, b > 0\}$*, e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0, |x| \leqslant b. \end{cases}$$

Se em qualquer intervalo I *onde* $\varphi(t)$ *está definida tivermos* $|\varphi(t)| \leqslant M$*;* $\forall t \in I$*, onde* M *é uma constante independente de* I *e* $M < b$*, então* φ *tem um prolongamento até* $[0,T]$*.*

Demonstração: Vide [31]. ∎

Teorema 1.16 (Hellinger-Toeplitz)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert, e* $T : H \to H$ *um operador linear satisfazendo*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \ \forall u, \ v \in H.$$

Então T *é contínuo e auto-adjunto.*

Demonstração: Vide [32]. ∎

Seja E um espaço vetorial normado e $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Denotamos por $D(\varphi)$ o domínio de φ, isto é,

$$D(\varphi) = \{x \in E; \varphi(x) < +\infty\}.$$

Definição 1.12. *Uma função* $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *diz-se semicontínua inferiormente (s.c.i.) se para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *o conjunto*

$$[\varphi \leqslant \lambda] = \{x \in E; \varphi(x) \leqslant \lambda\}$$

é fechado.

Algumas propriedades das funções s.c.i. são:

(a) Se φ é s.c.i., então para todo $x \in E$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe alguma vizinhança V de x tal que

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(x) - \varepsilon, \ \forall y \in V$$

e reciprocamente. Em particular, para toda sequência (x_n) em E tal que $x_n \to x$, temos

$$\liminf_{n \to \infty} \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x)$$

e reciprocamente.

(b) Se φ_1 e φ_2 são s.c.i. então $\varphi_1 + \varphi_2$ é s.c.i.

(c) Se $(\varphi_i)_{i \in I}$ é uma família de funções s.c.i então a função definida por

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

é s.c.i.

Definição 1.13. *Uma função* $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *diz-se convexa se*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \ \forall x, y \in E, \ \forall t \in (0,1).$$

Algumas propriedades das funções convexas são:

(a) Se φ é uma função convexa, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $[\varphi \leqslant \lambda]$ é convexo.

(b) Se φ_1 e φ_2 são convexas então $\varphi_1 + \varphi_2$ é convexa.

(c) Se $(\varphi_i)_{i \in I}$ é uma família de funções convexas então a função definida por

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} \varphi_i(x)$$

é convexa.

Definição 1.14. *Dada uma função* $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tal que* $\varphi \not\equiv +\infty$ *(isto é* $D(\varphi) \neq \emptyset$*) define-se a função* $\varphi^* : E^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *conjungada de* φ, *por*

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in E} \{\langle f, x\rangle - \varphi(x)\}, \; f \in E^*.$$

Nota-se que φ^* é uma função s.c.i. e convexa sobre E^*.

Teorema 1.17. *Sejam* H *um espaço de Banach reflexivo,* K *um subconjunto convexo, fechado e não-vazio e* $\varphi : K \to \mathbb{R}$ *uma função com as seguintes propiedades:*

i. φ *é convexa;*

ii. φ *é s.c.i.;*

iii. Se K *é limitado, então* φ *é coercivo, isto é*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = \infty.$$

Então existe $x_0 \in K$ *tal que*

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in K} \varphi(x).$$

Além disso, se φ *é estritamente convexa então* x_0 *é único.*

Demonstração: Vide [3]. ■

Teorema 1.18 (Fenchel-Rockafeller)**.** *Suponha que* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ *onde* V *e* W *são espaços de Hilbert, e que* $\varphi : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *e* $\psi : W \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *são funcionais não-triviais convexos e semicontínuos inferiormente. Suponha que exista exista* $x \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ *tal que* φ *é contínua em* x *e* ψ *é contínua em* Lx*. Então*

$$\inf_{x \in V} [\varphi(x) + \psi(Lx)] = - \inf_{q \in W^*} [\varphi^*(L^* q) + \psi^*(-q)].$$

Demonstração: Vide [3]. ■

Teorema 1.19 (Projeção sobre um convexo fechado)**.** *Seja* H *um espaço de Hilbert e* $K \subset H$ *um subconjunto convexo, fechado e não-vazio. Então para todo* $v \in H$ *existe um único* $u \in K$ *tal que*

$$\|v - u\| = \min_{w \in K} \|v - w\|.$$

Além disso, u *se caracteriza por*

$$\begin{cases} u \in K \\ (v - u, w - u) \leqslant 0, \ \forall w \in K \end{cases}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ *denota o produto interno em* H*.*

Demonstração: Vide [3]. ∎

Teorema 1.20 (Ponto fixo de Schauder)**.** *Seja* S *um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado* E *e seja* $T : S \to S$ *uma aplicação contínua tal que* $T(S) \subset K \subset S$*, onde* K *é compacto. Então* T *tem um ponto fixo.*

Demonstração: Vide [21]. ∎

Corolário 1.3. *Seja* S *um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado* E *e seja* $T : S \to S$ *uma aplicação contínua tal que* $T(S)$ *é relativamente compacto. Então* T *tem um ponto fixo.*

Demonstração: Vide [21]. ∎

Considere $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach reflexivos, sendo as injeções contínuas e $B_0 \hookrightarrow B$ compactamente. Para $0 < T < \infty$, seja

$$W = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma:

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}}.$$

Nota-se que W é um espaço de Banach, sendo W continuamente imerso em $L^{p_0}(0, T; B)$. Além disso, temos o seguinte resultado

Teorema 1.21 (Aubin-Lions)**.** *Com as hipóteses acima, resulta ser compacta a imersão de* W *em* $L^{p_0}(0, T; B)$*.*

Demonstração: Vide [37]. ∎

1.7 Alguns Resultados Técnicos

Nesta seção apresentamos alguns espaços vetoriais que são usuais no contexto de fluidos imcompressíveis, seus produtos internos e normas, bem como alguns resultados técnicos, que serão utilizados ao longo do trabalho, envolvendo tais aplicações.

Consideremos as seguintes notações

$$\mathbf{D}(\Omega) = \{D(\Omega)\}^n, \qquad \mathbf{H}_0^m(\Omega) = \{H_0^m(\Omega)\}^n,$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n \quad \text{e} \quad \mathbf{L}^2(\Omega) = \{L^2(\Omega)\}^n.$$

Equipamos $\mathbf{L}^2(\Omega)$ com produto interno e norma dados por

$$(\varphi, \psi)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \psi_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \varphi_i(x)\psi_i(x)dx,$$

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Também definimos em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ o produto interno e norma dados por

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) dx,\end{aligned}$$

$$\|\varphi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Segue da desigualdade de Poincaré:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leqslant C(\Omega) \|\varphi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \; \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Considera-se o espaço, sem topologia, $\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathbf{D}(\Omega); \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega\}$. O fecho de $\mathcal{D}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ serão representados respectivamente por $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$ e tais espaços vetoriais, usuais no contexto de fluidos incompressíveis, serão usados em todo o trabalho com a seguinte caracterização (ver Teman [37])

$$\mathbf{V} = \{\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega\}$$

e

$$\mathbf{H} = \{\varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \varphi = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \varphi \cdot n = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

O espaço $\mathbf{V}$ está contido em $\mathbf{H}$ com imersão contínua e densa. Denota-se por $\mathbf{V}'$ e $\mathbf{H}'$ os duais fortes de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{H}$ respectivamente. Seja τ a imersão de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{H}$. O operador adjunto τ^* é linear, um a um e contínuo de $\mathbf{H}'$ em $\mathbf{V}'$, pois $\tau(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$ é denso em $\mathbf{H}$ e $\tau^*(\mathbf{H}')$ é denso em $\mathbf{V}'$. Portanto $\mathbf{H}'$ pode ser identificado com um subespaço denso de $\mathbf{V}'$. Por outro lado, pelo Teorema da Representação de Riesz, pode-se identificar $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}'$ e chegar às seguintes inclusões

$$\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \hookrightarrow \mathbf{V}'$$

onde as inclusões são densas e contínuas.

Como as constantes μ, μ_r, c_a, c_d e c_0 não são relevantes nos argumentos e resultados, supomos em (1) todos os coeficientes iguais a um.

Daqui em diante, para evitar excesso de notações, $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$ representa o produto interno e a norma em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, e $a(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$ representa o produto interno e a norma em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Multiplicando $(1)_1$ e $(1)_2$ por φ e ψ, respectivamente e integrando sobre Ω, obtemos a seguinte formulação variacional para (1):

$$\begin{cases} (y_t, \varphi) + a(y,\varphi) + ((y\cdot\nabla)y, \varphi) = (\nabla \times w, \varphi) + (u1_{\mathcal{O}}, \varphi) \\ (w_t, \psi) + a(w,\psi) - (\nabla(\nabla\cdot w), \psi) + ((y\cdot\nabla)w, \psi) = (\nabla \times y, \psi) + (v1_{\mathcal{O}}, \psi) \\ y(0) = y^0 \in \mathbf{V}, w(0) = w^0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.1}$$

para todo $\{\varphi,\psi\} \in \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Esta observação e algumas outras que encontraremos ao longo do trabalho seguem dos seguintes resultados técnicos:

(a)

$$\begin{aligned} (-\Delta y, \varphi) &= \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega -\Delta y_j \varphi_j dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega -\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \varphi_j dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = a(y,\varphi); \end{aligned}$$

(b)

$$(\nabla p, \varphi) = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_j} \varphi_j dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega (-p) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} dx = \int_\Omega (-p)(\nabla\cdot\varphi) dx = 0;$$

(c)

$$
\begin{aligned}
((y\cdot\nabla)w,w) &= \left(\left(\sum_{j=1}^{3} y_j\frac{\partial w_1}{\partial x_j},\dots,\sum_{j=1}^{3} y_j\frac{\partial w_n}{\partial x_j}\right),(w_1,\dots,w_n)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\sum_{j=1}^{3} y_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\,dx=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}w_i\,dx\\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{w_i^2}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial y_j}{\partial x_j}w_i^2\,dx\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega(\nabla\cdot y)w_i^2\,dx=0;
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
(\nabla(\nabla\cdot w),w) &= \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right)w_i\,dx=-\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_i}dx\\
&= -\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)^2dx=-|\nabla\cdot w|^2;
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\varphi,\psi) &= \int_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3},\psi_1\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1},\psi_2\right)\\
&+ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2},\psi_3\right)dx\\
&= \int_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2},\psi_1\right)-\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3},\psi_1\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3},\psi_2\right)-\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1},\psi_2\right)\\
&+ \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1},\psi_3\right)-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2},\psi_3\right)dx\\
&= -\int_\Omega\left(\varphi_3,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)+\left(\varphi_2,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\right)-\left(\varphi_1,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right)+\left(\varphi_3,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)\\
&- \left(\varphi_2,\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)+\left(\varphi_1,\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}\right)dx\\
&= \int_\Omega\left(\varphi_1,\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right)+\left(\varphi_2,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)\\
&+ \left(\varphi_3,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)dx=(\varphi,\nabla\times\psi);
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
|\nabla \times y| &= \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (\nabla \times y)_j \cdot (\nabla \times y)_j \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (\nabla \times (\nabla \times y))_j \cdot y_j \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (\nabla(\nabla \cdot y) - \Delta y)_j \cdot y_j \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} (\nabla y)_j \cdot (\nabla y)_j \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\nabla y| = \|y\|;
\end{aligned}
$$

(g)

$$(\nabla \times w, y) \leqslant \|w\||y| \leqslant \frac{1}{2}\|w\|^2 + |y|^2;$$

e, por fim

$$(\nabla \times y, w) \leqslant \|y\||w| \leqslant \frac{1}{2}\|y\|^2 + |w|^2.$$

Capítulo 2

Aproximações de Galerkin

Sendo $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert seprável podemos tomar uma base enumerável $\{f_j\}_{j\geqslant 1}$ de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Também, com maior razão, podemos tomar uma base enumerável $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ de $\mathbf{V}$. Tais bases serão consideradas ortonormais completas em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Consideramos os espaços de dimensão finita

$$E = [e_1, \dots, e_n] \quad \text{e} \quad F = [f_1, \dots, f_n].$$

Note que $E \subset \mathbf{V}$ e $F \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Introduzimos a aproximação de Galerkin para a formulação variacional (1.1):

$$\begin{cases} (y_t, e) + a(y, e) + ((y \cdot \nabla)y, e) = (\nabla \times w, e) + (u1_{\mathcal{O}}, e) \\ (w_t, f) + a(w, f) - (\nabla(\nabla \cdot w), f) + ((y \cdot \nabla)w, f) = (\nabla \times y, f) + (v1_{\mathcal{O}}, f) \\ y(0) = y^0 \in E, w(0) = w^0 \in F \end{cases} \tag{2.1}$$

para todo $\{e, f\} \in E \times F$.

Teorema 2.1. *O sistema* (2.1) *tem uma única solução* $\{y, w\} \in C^0([0,T]; E) \times C^0([0,T]; F)$.

Demonstração: Queremos encontrar $y(t) \in E$ e $w(t) \in F$ tais que (2.1) seja satisfeita. Sendo $y(t), y^0 \in E$ e $w(t), w^0 \in F$ temos

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(t) e_j \qquad \text{e} \qquad w(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t) f_j,$$

$$y^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \qquad \text{e} \qquad w^0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j.$$

Fazendo $e = e_j$ e $f = f_j$ com $j = 1, 2, \dots, n$ em (2.1) obtemos que $g_j(t)$ e $h_j(t)$ satisfazem o sistema abaixo:

$$\begin{cases} g_j'(t) = -g_j(t) - ((y \cdot \nabla)y, e_j) + (\nabla \times w, e_j) + (u1_{\mathcal{O}}, e_j) \\ h_j'(t) = -h_j(t) - (\nabla(\nabla \cdot w), f_j) - ((y \cdot \nabla)w, f_j) + (\nabla \times y, f_j) + (\nu 1_{\mathcal{O}}, f_j) \\ g_j(0) = \alpha_j, h_j(0) = \beta_j \end{cases} \tag{2.2}$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Fazendo

$$K_j^1 = -((y \cdot \nabla)y, e_j) + (\nabla \times w, e_j) + (u1_{\mathcal{O}}, e_j)$$

e

$$K_j^2 = -(\nabla(\nabla \cdot w), f_j) - ((y \cdot \nabla)w, f_j) + (\nabla \times y, f_j) + (\nu 1_{\mathcal{O}}, f_j)$$

e tomando $F_1(t, g_j) = -g_j + K_j^1$, $F_2(t, h_j) = -h_j + K_j^2$, o sistema (2.2) assume a forma

$$\begin{cases} g_j'(t) = F_1(t, g_j) \\ h_j'(t) = F_2(t, h_j) \\ g_j(0) = \alpha_j, h_j(0) = \beta_j \end{cases} \tag{2.3}$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Chamando $g = (g_1, \dots, g_n)$, $F_1(t, g) = (F_1(t, g_1), \dots, F_1(t, g_n))$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $F_2(t, h) = (F_2(t, h_1), \dots, F_2(t, h_n))$, $g^0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, e por fim, $h^0 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, obtemos

$$\begin{cases} g'(t) = F_1(t, g) \\ h'(t) = F_2(t, h) \\ g(0) = g^0, h(0) = h^0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Seja $D = [0, T] \times B$ onde $B = \{\{g, h\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |\{g, h\}| \leqslant b, b > 0\}$. Então

i. Fixado g temos que $F_1(t, g)$ é mensurável em t, pois em $F_1(t, g_j) = -g_j - ((y \cdot \nabla)y, e_j) + (\nabla \times w, e_j) + (u1_{\mathcal{O}}, e_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, temos que $-g_j$ é constante, $-((y \cdot \nabla)y, e_j)$ e $(\nabla \times w, e_j)$ são independentes de t e $(u1_{\mathcal{O}}, e_j)$ é mensurável em t, já que $u \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times [0, T])$;

ii. Fixando t temos que $F_1(t, g)$ é contínua, pois em $F_1(t, g_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, temos que $-g_j$ e $(u1_{\mathcal{O}}, e_j)$ são contínuas e

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \in E$$

é contínua, e

$$y \in E \mapsto ((y \cdot \nabla)y, e_j)$$

é contínua e portanto

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto ((y \cdot \nabla)y, e_j)$$

é contínua.

Também,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \in E$$

é contínua, e

$$w \in F \mapsto (\nabla \times w, e_j)$$

é contínua e portanto

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\nabla \times w, e_j)$$

é contínua;

iii. Sendo D compacto existem constantes k_1, $k_2 > 0$ tais que

$$|((y \cdot \nabla)y, e_j)| < k_1, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

e

$$|(\nabla \times w, e_j)| < k_2. \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |F_1(t, g_j)| &= |-g_j - ((y \cdot \nabla)y, e_j) + (\nabla \times w, e_j) + (u1_{\mathcal{O}}, e_j)| \\ &\leqslant b + k_1 + k_2 + |(u1_{\mathcal{O}}, e_j)| \\ &= m_j(t) \end{aligned}$$

sendo $m_j(t)$ integrável $[0, T]$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, segue que $|F_1(t, g)| \leqslant M(t)$, para todo $(t, g) \in D$ onde $M(t) = (m_1(t), \dots, m_n(t))$ é integrável em $[0, T]$.

De forma análoga obtemos:

i. $F_2(t,h)$ é mensurável em t para cada h fixo;

ii. $F_2(t,h)$ é contínua em h para cada t fixo;

iii. $|F_2(t,h)| \leqslant N(t)$, para todo $(t,g) \in D$ onde $N(t)$ é integrável em $[0,T]$.

Considere $X(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ então o sistema (2.4) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} X'(t) = F(t,X) \\ X(0) = X^0 \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $F(t,X) = \begin{pmatrix} F_1(t,g) \\ F_2(t,h) \end{pmatrix}$ e $X^0 = \begin{pmatrix} g^0 \\ h^0 \end{pmatrix}$.

Além disso, segue das observações anteriores que

i. $F(t,X)$ é mensurável em t para cada X fixo;

ii. $F(t,X)$ é contínua em X para cada t fixo;

iii. $|F(t,X)| \leqslant M(t) + N(t) = P(t)$, para todo $(t,X) \in D$ onde $P(t)$ é integrável em $[0,T]$.

Portanto o sistema (2.1) satisfaz as condições de Carathéodory e consequentimente existe uma solução $\{y(t), w(t)\}$ em $[0,t_n]$ com $0 < t_n < T$ de (2.1).

Nota-se que para cada intervalo I onde $\{y(t), w(t)\}$ está definida temos que $|\{y(t), w(t)\}| \leqslant M$, para todo $t \in$ I com M independente de I e de n, e $M < b$. De fato, tomando $e = y(t)$ em $(2.1)_1$ temos

$$(y', y) + a(y,y) + ((y \cdot \nabla)y, y) = (\nabla \times w, y) + (u1_{\mathcal{O}}, y)$$

e portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y|^2 + \|y\|^2 = (\nabla \times w, y) + (u1_{\mathcal{O}}, y). \tag{2.6}$$

Analogamente, fazendo $f = w(t)$ em $(2.1)_2$ obtemos

$$(w', w) + a(w,w) - (\nabla(\nabla \cdot w), w) + ((y \cdot \nabla)w, w) = (\nabla \times y, w) + (v1_{\mathcal{O}}, w)$$

e portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \|w\|^2 + |\nabla \cdot w|^2 = (\nabla \times y, w) + (v1_{\mathcal{O}}, w). \tag{2.7}$$

Somando-se as equações (2.6) e (2.7) seque que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|y|^2 + |w|^2) &+ \|y\|^2 + \|w\|^2 + |\nabla \cdot w|^2 = (\nabla \times w, y) + (\nabla \times y, w)\\ &+ (u1_{\mathcal{O}}, y) + (v1_{\mathcal{O}}, w) \leqslant \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|w\|^2)\\ &+ |u1_{\mathcal{O}}|^2 + |v1_{\mathcal{O}}|^2 + 2(|y|^2 + |w|^2).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|y|^2 + |w|^2) &+ \|y\|^2 + \|w\|^2 + 2|\nabla \cdot w|^2\\ &\leqslant 2(|u1_{\mathcal{O}}|^2 + |v1_{\mathcal{O}}|^2) + 4(|y|^2 + |w|^2).\end{aligned}$$

Integrando de 0 a $t < T$ temos

$$\begin{aligned}|y(t)|^2 + |w(t)|^2 &+ \int_0^t (\|y(s)\|^2 + \|w(s)\|^2 + 2|\nabla \cdot w(s)|^2) ds\\ &\leqslant |y(0)|^2 + |w(0)|^2 + 2\int_0^t (|u1_{\mathcal{O}}(s)|^2 + |v1_{\mathcal{O}}(s)|^2) ds\\ &+ 4\int_0^t (|y(s)|^2 + |w(s)|^2) ds.\end{aligned}$$

Fazendo

$$K = |y(0)|^2 + |w(0)|^2 + 2\int_0^t (|u1_{\mathcal{O}}(s)|^2 + |v1_{\mathcal{O}}(s)|^2) ds$$

e usando a desigualdade de Gronwall, segue que

$$|y(t)|^2 + |w(t)|^2 \leqslant Ke^{4T}.$$

Desta forma, obtemos a constante $M = Ke^{4T}$ que não depende de t e de n. Além disso, podemos considerar B tão grande quando necessário para que tenhamos $M < b$.

Logo, a solução $\{y(t), w(t)\}$ de (2.1) pode ser extendida até $[0, T]$. Além disso, $\{y(t), w(t)\} \in C^0([0, T]; E) \times C^0([0, T]; F)$.

Quanto à unicidade, sejam $\{y_1(t), w_1(t)\}$ e $\{y_2(t), w_2(t)\}$ duas soluções de (2.1). Então $y_0(t) = y_1(t) - y_2(t)$ e $w_0(t) = w_1(t) - w_2(t)$ satisfazem

$$\begin{cases}(y_{0t}, e) + a(y_0, e) + ((y_0 \cdot \nabla)y_0, e) = (\nabla \times w_0, e)\\ (w_{0t}, f) + a(w_0, f) - (\nabla(\nabla \cdot w_0), f) + ((y_0 \cdot \nabla)w_0, f) = (\nabla \times y_0, f)\\ y_0(0) = 0, w_0(0) = 0\end{cases} \tag{2.8}$$

Tomando $e = y_0$, $f = w_0$ e integrando em t temos

$$\frac{1}{2}|y_0(t)|^2 + \int_0^t a(y_0(s), y_0(s))ds - \int_0^t (\nabla \times w_0(s), y_0(s))ds = 0$$

e

$$\frac{1}{2}|w_0(t)|^2 + \int_0^t a(w_0(s), w_0(s))ds + \int_0^t |\nabla \cdot w_0(s)|^2 ds - \int_0^t (\nabla \times y_0(s), w_0(s))ds = 0.$$

Somando as igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|y_0(t)|^2 + |w_0(t)|^2) \quad &+ \quad \int_0^t \|y_0(s)\|^2 ds + \int_0^t \|w_0(s)\|^2 ds + \int_0^t |\nabla \cdot w_0(s)|^2 ds \\ &= \quad \int_0^t (\nabla \times w_0(s), y_0(s))ds + \int_0^t (\nabla \times y_0(s), w_0(s))ds. \quad (2.9)\end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^t (\nabla \times w_0(s), y_0(s))ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|w_0(s)\|^2 ds + \int_0^t |y_0(s)|^2 ds$$

e

$$\int_0^t (\nabla \times y_0(s), w_0(s))ds \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|y_0(s)\|^2 ds + \int_0^t |w_0(s)|^2 ds.$$

Substituindo agora em (2.9) segue que

$$\begin{aligned}|y_0(t)|^2 + |w_0(t)|^2 \quad &+ \quad \int_0^t \|y_0(s)\|^2 ds + \int_0^t \|w_0(s)\|^2 \\ &\leqslant \quad |y_0(0)|^2 + |w_0(0)|^2 + 2\int_0^t (|y_0(s)|^2 + |w_0(s)|^2)ds.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\begin{aligned}|y_0(t)|^2 + |w_0(t)|^2 \quad &\leqslant \quad (|y_0(0)|^2 + |w_0(0)|^2)e^{\int_0^t 2ds} \\ &\leqslant \quad (|y_0(0)|^2 + |w_0(0)|^2)e^{2T} \\ &= \quad 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$y_0(t) = w_0(t) = 0$$

e consequentimente

$$y_1(t) = y_2(t) \text{ e } w_1(t) = w_2(t).$$

■

Capítulo 3

Controlabilidade Exata do Sistema (2.1)

A aproximação de Galerkin (2.1) diz-se exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, dados $\{y^0, w^0\}$, $\{y^T, w^T\} \in E \times F$, existe um par de controles $\{u, v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2$ tal que a solução $\{y, w\}$ de (2.1) satisfaz

$$\{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\} = \{y^T, w^T\}. \tag{3.1}$$

O custo para alcançar (3.1) é dado por

$$\mathcal{C}\{u, v\} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (|u|^2 + |v|^2) dx dt. \tag{3.2}$$

O principal resultado deste trabalho é o seguinte:

Teorema 3.1. *Seja* $T > 0$ *um número real dado. Então a aproximação de Galerkin* (2.1) *é exatamente controlável no sentido* (3.1). *Além disso, o custo do controle dado em* (3.2) *é limitado independentimente da não-linearidade do sistema.*

Demonstração: Para uso posterior, no intuito de mostrar e tornar explícito que o custo do controle pode ser limitado independentimente da não-linearidade do sistema, introduzimos a família de sistemas:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + \alpha(y \cdot \nabla)y + \nabla p = \nabla \times w + u 1_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ w_t - \Delta w + \beta(y \cdot \nabla)w - \nabla(\nabla \cdot w) = \nabla \times y + v 1_{\mathcal{O}} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{em} \quad Q, \\ y = w = 0 & \text{em} \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0, w(0) = w^0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

com α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Provaremos nosso resultado principal para o sistema (3.3). Para isso, vamos introduzir sua formulação variacional. A saber,

$$\begin{cases} (y_t, e) + a(y, e) + \alpha((y \cdot \nabla)y, e) = (\nabla \times w, e) + (u1_{\mathcal{O}}, e) \\ (w_t, f) + a(w, f) - (\nabla(\nabla \cdot w), f) + \beta((y \cdot \nabla)w, f) = (\nabla \times y, f) + (v1_{\mathcal{O}}, f) \\ y(0) = y^0 \in E, w(0) = w^0 \in F \end{cases} \tag{3.4}$$

para todo $\{e, f\} \in E \times F$.

Procedemos com a demostração em três etapas:

3.1 Etapa 1 (Sistema Linear)

Tomamos uma função

$$h \in L^2(0, T; E) \tag{3.5}$$

e consideramos o sistema linear

$$\begin{cases} (y_t, e) + a(y, e) + \alpha((h \cdot \nabla)y, e) = (\nabla \times w, e) + (u1_{\mathcal{O}}, e) \\ (w_t, f) + a(w, f) - (\nabla(\nabla \cdot w), f) + \beta((h \cdot \nabla)w, f) = (\nabla \times y, f) + (v1_{\mathcal{O}}, f) \\ y(0) = w(0) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

para todo $\{e, f\} \in E \times F$.

O sistema (3.6) tem única solução $\{y, w\} \in C^0([0, T]; E) \times C^0([0, T]; F)$.

Demonstração: Análoga a do sistema (2.1). ∎

Observação 3.1. *Devido a linearidade do sistema* (3.6)*, podemos assumir as condições iniciais nula. Assim, todos os resultados são válidos bem como se as condições iniciais são não-nulas, isto é,* $y(0) = y^0 \in E$ *e* $w(0) = w^0 \in F$.

Vamos provar que o sistema (3.6) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ no sentido (3.1). Para isso, cosideremos o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Se* $\{g_1, g_2\} \in E \times F$ *e satisfaz*

$$(\{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\}, \{g_1, g_2\}) = 0$$

para todo $\{u, v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0, T))^2$, tivermos que

$$\{g_1, g_2\} \equiv 0$$

então (3.6) é exatamente controlável no tempo $T > 0$.

Demonstração: De fato, o conjunto $S = \{\{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\}; \{y, w\}$ é solução de (3.6)$\} \subset E \times F$ é tal que $S^{\perp} = \{0\}$ em $E \times F$, e como S é um subespaço vetorial de $E \times F$, tendo $E \times F$ dimensão finita, segue que $S = E \times F$. ■

Vamos considerar $\{\varphi, \psi\}$ como sendo uma solução do sistema adjunto de (3.6)

$$\begin{cases} (-\varphi_t - \alpha(h \cdot \nabla)\varphi, e) + a(\varphi, e) = (\nabla \times \psi, e), \forall e \in E \\ (-\psi_t - \beta(h \cdot \nabla)\psi, f) + a(\psi, f) - (\nabla(\nabla \cdot \psi), f) = (\nabla \times \varphi, f), \forall f \in F \\ \varphi(T) = g_1 \in E, \psi(T) = g_2 \in F \end{cases} \tag{3.7}$$

O sistema (3.7) tem única solução $\{\varphi, \psi\} \in C^0([0, T]; E) \times C^0([0, T]; F)$.

Demonstração: Basta considerar a mudança de variáveis $\tau = T - t$ com $y(t, x) = \varphi(\tau, x)$ e $w(t, x) = \psi(\tau, x)$. Daí,

$$y_t(t, x) = -\varphi_t(\tau, x) \text{ e } w_t(t, x) = -\psi_t(\tau, x).$$

Portanto, o sistema (3.7) é equivalente ao sistema (3.6) com as condições iniciais $y(0) = g_1 \in E$ e $w(0) = g_2 \in F$. ■

Observação 3.2. *A motivação para tomarmos o sistema adjunto da forma dada em* (3.7) *segue utilizando a noção de derivada distribucional, alguns resultados técnicos e o resultado abaixo.*

Observe que

$$((h(t) \cdot \nabla)\varphi(t), y(t)) = -((h(t) \cdot \nabla)y(t), \varphi(t)), \ \forall t \in [0, T].$$

De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= ((h(t) \cdot \nabla)(\varphi(t) + y(t)), \varphi(t) + y(t)) \\ &= ((h(t) \cdot \nabla)\varphi(t) + (h(t) \cdot \nabla)y(t), \varphi(t) + y(t)) \\ &= ((h(t) \cdot \nabla)\varphi(t), y(t)) + ((h(t) \cdot \nabla)y(t), \varphi(t)). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$((h(t) \cdot \nabla)\psi(t), w(t)) = -((h(t) \cdot \nabla)w(t), \psi(t)), \ \forall t \in [0, T].$$

Tomando $\{e, f\} = \{y(t), w(t)\}$ em (3.7) temos

$$(-\varphi_t - \alpha(h \cdot \nabla)\varphi, y) + a(\varphi, y) = (\nabla \times \psi, y).$$

Integrando de 0 a T, segue que

$$\int_0^T (-\varphi_t - \alpha(h\cdot\nabla)\varphi, y)dt + \int_0^T a(\varphi, y)dt = \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt;$$

$$\int_0^T (-\varphi_t, y)dt + \int_0^T (-\alpha(h\cdot\nabla)\varphi, y)dt + \int_0^T a(y,\varphi)dt = \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt;$$

$$\int_0^T (-\varphi_t, y)dt + \int_0^T (\alpha(h\cdot\nabla)y, \varphi)dt + \int_0^T a(y,\varphi)dt = \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt.$$

Integrando a primeira integral por partes, obtemos

$$-(y(T),\varphi(T)) + \int_0^T [(y_t,\varphi) + \alpha((h\cdot\nabla)y,\varphi) + a(y,\varphi)]dt = \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt.$$

De forma análoga obtemos também

$$\begin{aligned}-(w(T),\psi(T)) \quad &+ \quad \int_0^T [(w_t,\psi) + a(w,\psi) + \beta((h\cdot\nabla)w,\psi) - (\nabla(\nabla\cdot w),\psi)]dt \\ &= \quad \int_0^T (\nabla\times\varphi, w)dt.\end{aligned}$$

Somando-se as duas últimas equações, temos

$$\begin{aligned}(y(T),g_1) + (w(T),g_2) \quad &= \quad \int_0^T [(y_t,\varphi) + a(y,\varphi) + \alpha((h\cdot\nabla)y,\varphi)]dt - \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt \\ &+ \quad \int_0^T [(w_t,\psi) + a(w,\psi) + \beta((h\cdot\nabla)w,\psi) - (\nabla(\nabla\cdot w),\psi)]dt \\ &- \quad \int_0^T (\nabla\times\varphi, w)dt.\end{aligned}$$

De (3.6), vemos que

$$\begin{aligned}(y(T),g_1) + (w(T),g_2) \quad &= \quad \int_0^T (\nabla\times w,\varphi)dt + \int_0^T (u1_{\mathcal{O}},\varphi)dt - \int_0^T (\nabla\times\psi, y)dt \\ &+ \quad \int_0^T (\nabla\times y,\psi)dt + \int_0^T (v1_{\mathcal{O}},\psi)dt - \int_0^T (\nabla\times\varphi, w)dt.\end{aligned}$$

Como

$$(\nabla\times w,\varphi) = (\nabla\times\varphi, w) \text{ e } (\nabla\times y,\psi) = (\nabla\times\psi, y)$$

então

$$(y(T),g_1) + (w(T),g_2) = \int_0^T [(u1_{\mathcal{O}},\varphi) + (v1_{\mathcal{O}},\psi)]dt.$$

Logo,

$$(\{y(T),w(T)\},\{g_1,g_2\}) = \int_0^T (\{u1_{\mathcal{O}}, v1_{\mathcal{O}}\},\{\varphi,\psi\})dt. \tag{3.8}$$

Assumindo que

$$(\{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\}, \{g_1, g_2\}) = 0$$

para todo $\{u, v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0, T))^2$, obtemos então

$$\int_0^T (\{u1_{\mathcal{O}}, v1_{\mathcal{O}}\}, \{\varphi, \psi\})dt = 0$$

para todo $\{u, v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0, T))^2$.

Portanto, devemos ter

$$\{\varphi, \psi\} = \{0, 0\} \text{ em } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Como $\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=1}^{n} \{\varphi_i(t)e_i, \psi_i(t)f_i\}$ então obtemos $\{\varphi_i(t), \psi_i(t)\} = \{0, 0\}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consequentimente,

$$\varphi(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)e_i(x) = 0, \ \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

e

$$\psi(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)f_i(x) = 0, \ \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega.$$

Segue então que

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \{0, 0\}.$$

Em particular, para $t = T$

$$g_1(x) = \varphi(T, x) = 0 \text{ e } g_2(x) = \psi(T, x) = 0.$$

Logo,

$$\{g_1, g_2\} \equiv \{0, 0\}.$$

Assim, o sistema (3.6) é exatamente controlável.

3.2 Etapa 2 (Estimativas)

Devido aos resultados obtidos na Etapa 1, podemos definir o funcional $M : L^2(0, T; E) \to \mathbb{R}$ por

$$M(h) = \inf_{\{u,v\} \in \mathcal{U}_{ad}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} (|u|^2 + |v|^2) dx dt$$

onde $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto de controles admissíveis

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\{u, v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2;\ \{y, w\} \text{ solução de (3.6) satisfaz (3.1)}\}.$$

Vamos provar que

$$M(h) \leqslant \text{constante independente de } h, \alpha \text{ e } \beta. \tag{3.9}$$

Para isso, usaremos argumentos de dualidade. Consideremos o operador $L : \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2 \to E \times F$ definido por

$$L\{u, v\} = \{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\}.$$

Pela unicidade da solução tal operador está bem definido. Além disso, valem as seguintes afirmações:

i. L é linear;

De fato, suponhamos que $L\{u, v\} = \{y, w\}$ e $L\{u_1, v_1\} = \{y_1, w_1\}$ então

$$\begin{cases} (y_t, e) + a(y, e) + \alpha((h \cdot \nabla)y, e) = (\nabla \times w, e) + (u1_{\mathcal{O}}, e) \\ (w_t, f) + a(w, f) - (\nabla(\nabla \cdot w), f) + \beta((h \cdot \nabla)w, f) = (\nabla \times y, f) + (v1_{\mathcal{O}}, f) \\ y(0) = w(0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (y_{1t}, e) + a(y_1, e) + \alpha((h \cdot \nabla)y_1, e) = (\nabla \times w_1, e) + (u_1 1_{\mathcal{O}}, e) \\ (w_{1t}, f) + a(w_1, f) - (\nabla(\nabla \cdot w_1), f) + \beta((h \cdot \nabla)w_1, f) = (\nabla \times y_1, f) + (v_1 1_{\mathcal{O}}, f) \\ y_1(0) = w_1(0) = 0 \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} (by_t + cy_{1t}, e) &+ a(by + cy_1, e) + \alpha((h \cdot \nabla)(by + cy_1), e) \\ &- (\nabla \times (bw + cw_1), e) \\ &= b(y_t, e) + b[a(y, e)] + b[\alpha((h \cdot \nabla)y, e)] - b(\nabla \times w, e) \\ &+ c(y_{1t}, e) + c[a(y_1, e)] + c[\alpha((h \cdot \nabla)y_1, e)] - c(\nabla \times w_1, e) \\ &= b(u1_{\mathcal{O}}, e) + c(u_1 1_{\mathcal{O}}, e) \\ &= (bu1_{\mathcal{O}} + cu_1 1_{\mathcal{O}}, e). \end{aligned}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}(bw_t + cw_{1t}, f) &+ a(bw + cw_1, f) - (\nabla(\nabla \cdot (bw + cw_1)), f)\\ &+ \beta((h \cdot \nabla)(bw + cw_1), f) - (\nabla \times (by + cy_1), f)\\ &= (bv1_{\mathcal{O}} + cv_1 1_{\mathcal{O}}, f).\end{aligned}$$

Portanto, $\{by + cy_1, bw + cw_1\}$ é solução de

$$\begin{cases}(Y_t, e) + a(Y, e) + \alpha((h \cdot \nabla)Y, e) = (\nabla \times W, e) + (bu1_{\mathcal{O}} + cu_1 1_{\mathcal{O}}, e)\\ (W_t, f) + a(W, f) - (\nabla(\nabla \cdot W), f) + \beta((h \cdot \nabla)W, f) = (\nabla \times Y, f)\\ +(bv1_{\mathcal{O}} + cv_1 1_{\mathcal{O}}, f)\\ Y(0) = W(0) = 0\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}L\{b\{u, v\} + c\{u_1, v_1\}\} &= L\{bu + cu_1, bv + cv_1\}\\ &= \{by + cy_1, bw + cw_1\}\\ &= b\{y, w\} + c\{y_1, w_1\}\\ &= bL\{u, v\} + cL\{u_1, v_1\}.\end{aligned}$$

ii. L é contínuo.

De fato, tendo em vista que $\left[\int_{\mathcal{O}} (|e|^2 + |f|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $E \times F$ e que em $E \times F$ todas as normas são equivalentes (pois $E \times F$ tem dimensão finita), temos que existem constantes positivas c e C, as quais dependem apenas de E e F tais que

$$c\|\{e, f\}\|^2_{E\times F} \leqslant \int_{\mathcal{O}} (|e|^2 + |f|^2)dx \leqslant C\|\{e, f\}\|^2_{E\times F}$$

para todo $\{e, f\} \in E \times F$.

Portanto, tomando $e = y(t)$ e $f = w(t)$ em (3.6) obtemos, por uma estimativa análoga à feita na demostração do Teorema 2.1, que

$$|y(\cdot, T; \{u, v\})|^2 + |w(\cdot, T; \{u, v\})|^2 \leqslant K \int_0^T (|u1_{\mathcal{O}}(t)|^2 + |v1_{\mathcal{O}}(t)|^2)dt$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|L\{u,v\}\|^2_{E\times F} &= \|\{y(\cdot,T;\{u,v\}),w(\cdot,T;\{u,v\})\}\|^2_{E\times F}\\
&\leqslant \frac{1}{c}\int_{\mathcal{O}}(|y(\cdot,T;\{u,v\})|^2+|w(\cdot,T;\{u,v\})|^2)dx\\
&\leqslant \frac{K}{c}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|u1_{\mathcal{O}}|^2+|v1_{\mathcal{O}}|^2)dxdt\\
&= \frac{K}{c}\|\{u,v\}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}.
\end{aligned}$$

Considere os funcionais $F_1 : \mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2 \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ dado por

$$F_1\{u,v\} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|u|^2+|v|^2)dxdt$$

e $F_2 : E\times F \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ dado por

$$F_2\{g_1,g_2\} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \{g_1,g_2\}=\{y^T,w^T\}\\ +\infty & , \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

Deste modo, podemos reescrever o funcional M como segue

$$M(h) = \inf_{\{u,v\}\in\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}[F_1\{u,v\}+F_2\{L\{u,v\}\}].$$

Provaremos agora que F_1 e F_2 são funções semicontínuas inferiormente e convexas. De fato, F_1 é semicontínua inferiormente pois é contínua. Quanto à convexidade temos

$$\begin{aligned}
F_1\{t\{u_1,v_1\}+(1-t)\{u_2,v_2\}\} &= F_1\{tu_1+(1-t)u_2, tv_1+(1-t)v_2\}\}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|tu_1+(1-t)u_2|^2+|tv_1+(1-t)v_2|^2)dxdt\\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|t|^2|u_1|^2+|1-t|^2|u_2|^2\\
&+ |t|^2|v_1|^2+|1-t|^2|v_2|^2)dxdt\\
&\leqslant t\cdot\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|u_1|^2+|v_1|^2)dxdt\\
&+ (1-t)\cdot\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|u_2|^2+|v_2|^2)dxdt\\
&= tF_1\{u_1,v_1\}+(1-t)F_2\{u_2,v_2\}.
\end{aligned}$$

Também F_2 é semicontínua inferiormente, pois dado $\lambda\in\mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
[F_2\leqslant\lambda] &= \{\{g_1,g_2\}\in E\times F; F_2\{g_1,g_2\}\leqslant\lambda\}\\
&= \{\{g_1,g_2\}\in E\times F; F_2\{g_1,g_2\}=0\}\\
&= \{y^T,w^T\}.
\end{aligned}$$

é fechado.

Quanto à convexidade temos

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} = F_2\{tg_1 + (1-t)h_1, tg_2 + (1-t)h_2\}.$$

Basta agora analisarmos os seguintes casos:

1. $\{g_1, g_2\} = \{y^T, w^T\} = \{h_1, h_2\}$.

   Neste caso,

$$tg_1 + (1-t)h_1 = ty^T + (1-t)y^T = y^T$$

   e

$$tg_2 + (1-t)h_2 = tw^T + (1-t)w^T = w^T.$$

   Logo,

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} = 0 = tF_2\{g_1, g_2\} + (1-t)F_2\{h_1, h_2\}.$$

2. $\{g_1, g_2\} = \{y^T, w^T\} \neq \{h_1, h_2\}$.

   Neste caso,

$$tg_1 + (1-t)h_1 \neq y^T \text{ ou } tg_2 + (1-t)h_2 \neq w^T.$$

   Logo,

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} = +\infty = tF_2\{g_1, g_2\} + (1-t)F_2\{h_1, h_2\}.$$

3. $\{g_1, g_2\} \neq \{y^T, w^T\} = \{h_1, h_2\}$.

   Caso análogo ao anteiror.

4. $\{g_1, g_2\} = \{h_1, h_2\} \neq \{y^T, w^T\}$.

   Neste caso,

$$tg_1 + (1-t)h_1 = h_1 \neq y^T \text{ ou } tg_2 + (1-t)h_2 = h_2 \neq w^T.$$

   Logo,

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} = +\infty = tF_2\{g_1, g_2\} + (1-t)F_2\{h_1, h_2\}.$$

5. $\{g_1, g_2\} \neq \{y^T, w^T\} \neq \{h_1, h_2\} \neq \{g_1, g_2\}$.

   Neste caso, temos por fim que

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} \leqslant +\infty = tF_2\{g_1, g_2\} + (1-t)F_2\{h_1, h_2\}.$$

Concluimos então que em todos os possíveis casos temos que

$$F_2\{t\{g_1, g_2\} + (1-t)\{h_1, h_2\}\} \leqslant tF_2\{g_1, g_2\} + (1-t)F_2\{h_1, h_2\}.$$

Sendo então $\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2$ e $E \times F$ espaços de Hilbert, $L : \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2 \to E \times F$ um operador linear contínuo e, F_1 e F_2 funções semicontínuas inferiormente e convexas, pelo teorema da dualidade de Fenchel-Rockafellar temos

$$\begin{aligned} M(h) &= \inf_{\{u,v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} [F_1\{u,v\} + F_2\{L\{u,v\}\}] \\ &= -\inf_{\{g_1,g_2\} \in E \times F} [F_1^*\{L^*\{g_1, g_2\}\} + F_2^*\{-\{g_1, g_2\}\}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$-M(h) = \inf_{\{g_1,g_2\} \in E \times F} [F_1^*\{L^*\{g_1, g_2\}\} + F_2^*\{-\{g_1, g_2\}\}]$$

onde $L^* : E \times F \to \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2$ é o adjunto de L.

Usando (3.8) vemos que

$$\begin{aligned} (L^*\{g_1, g_2\}, \{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} &= (\{g_1, g_2\}, L\{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} \\ &= \int_0^T (\{\varphi, \psi\}, \{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O})} dt \\ &= (\{\varphi, \psi\}, \{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$L^*\{g_1, g_2\} = \{\varphi, \psi\} \text{ em } \mathcal{O} \times (0,T).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} F_1^*\{\varphi, \psi\} &= \sup_{\{u,v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} \{(\{\varphi, \psi\}, \{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} - F_1\{u,v\}\} \\ &= \sup_{\{u,v\} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} \{(\{\varphi, \psi\}, \{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2} - \frac{1}{2}\|\{u,v\}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2}\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}(\{\varphi,\psi\},\{u,v\})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2} &\leqslant \|\{\varphi,\psi\}\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}\|\{u,v\}\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\{\varphi,\psi\}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}+\frac{1}{2}\|\{u,v\}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$F_1^*\{\varphi,\psi\}=\frac{1}{2}\|\{\varphi,\psi\}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2}=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|\varphi|^2+|\psi|^2)dxdt$$

e

$$\begin{aligned}F_2^*\{-\{g_1,g_2\}\} &= \sup_{\{h_1,h_2\}\in E\times F}\{(-\{g_1,g_2\},\{h_1,h_2\})-F_2\{h_1,h_2\}\}\\ &= -(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\}).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}-M(h) &= \inf_{\{g_1,g_2\}\in E\times F}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)}(|\varphi|^2+|\psi|^2)dxdt-(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\})\right]\\ &\geqslant \inf_{\{g_1,g_2\}\in E\times F}\left[\frac{c}{2}\int_Q(|\varphi|^2+|\psi|^2)dxdt-(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\})\right]. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\{e,f\}=\{\varphi(t),\psi(t)\}$ em (3.7) temos

$$-(\varphi_t,\varphi)+a(\varphi,\varphi)-(\nabla\times\psi,\varphi)=0.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2+a(\varphi(t),\varphi(t))-(\nabla\times\psi(t),\varphi(t))=0.$$

Integrando de t a T, obtemos

$$-\frac{1}{2}|\varphi(T)|^2+\frac{1}{2}|\varphi(t)|^2+\int_t^T a(\varphi(s),\varphi(s))ds-\int_t^T(\nabla\times\psi(s),\varphi(s))ds=0.$$

$$\frac{1}{2}|\varphi(t)|^2+\int_t^T a(\varphi(s),\varphi(s))ds-\int_t^T(\nabla\times\psi(s),\varphi(s))ds=\frac{1}{2}|g_1|^2.$$

De modo análogo,

$$\frac{1}{2}|\psi(t)|^2+\int_t^T a(\psi(s),\psi(s))ds-\int_t^T(\nabla\times\varphi(s),\psi(s))ds+\int_t^T|\nabla\cdot\psi(s)|^2ds=\frac{1}{2}|g_2|^2.$$

Somando-se estas duas equações vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2) &+ \int_t^T[a(\varphi(s),\varphi(s))+a(\psi(s),\psi(s))]ds\\ &- 2\int_t^T(\nabla\times\psi(s),\varphi(s))ds+\int_t^T|\nabla\cdot\psi(s)|^2ds\\ &= \frac{1}{2}(|g_1|^2+|g_2|^2). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Note ainda que usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_t^T [a(\varphi(s),\varphi(s))+a(\psi(s),\psi(s))]dsdt &= -\int_0^T\int_T^t [a(\varphi(s),\varphi(s))\\ &+ a(\psi(s),\psi(s))]dsdt\\ &= -t\int_T^t [a(\varphi(s),\varphi(s))+a(\psi(s),\psi(s))]ds\Big|_0^T\\ &+ \int_0^T t[a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t))]dt\\ &= \int_0^T t[a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t))]dt.\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo valem as igualdades abaixo:

$$\int_0^T\int_t^T (\nabla\times\psi(s),\varphi(s))dsdt = \int_0^T t(\nabla\times\psi(t),\varphi(t))dt$$

e

$$\int_0^T\int_t^T |\nabla\cdot\psi(s)|^2 dsdt = \int_0^T t|\nabla\cdot\psi(t)|^2 dt.$$

Integrando a equação (3.11) em $(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T (|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2)dt &+ \int_0^T t[a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t))]dt\\ &- 2\int_0^T t(\nabla\times\psi(t),\varphi(t))dt+\int_0^T t|\nabla\cdot\psi(t)|^2dt\\ &= \frac{T}{2}(|g_1|^2+|g_2|^2).\end{aligned}$$

Note que

$$a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t)) = \|\varphi(t)\|^2+\|\varphi(t)\|^2 \leqslant C\|\{\varphi(t),\psi(t)\}\|^2_{E\times F}$$

e

$$|\nabla\cdot\psi(t)|^2 \leqslant C|\psi(t)|^2$$

para algum $C>0$, que depende somente de E e F, já que E e F têm dimensão finita.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{T}{2}(|g_1|^2+|g_2|^2) &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T (|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2)dt+\int_0^T t[a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t))]dt\\ &+ 2\int_0^T t|(\nabla\times\psi(t),\varphi(t))|dt+\int_0^T t|\nabla\cdot\psi(t)|^2dt.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}2|(\nabla\times\psi(t),\varphi(t))| &+ a(\varphi(t),\varphi(t))+a(\psi(t),\psi(t))+|\nabla\cdot\psi(t)|^2\\ &\leqslant C\|\varphi(t)\|^2+\|\psi(t)\|^2+\|\varphi(t)\|^2+C|\psi(t)|^2\\ &\leqslant K(|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2)\end{aligned}$$

para uma costante K tomada adequadamente e que depende apenas de E e F, temos

$$\frac{T}{2}(|g_1|^2+|g_2|^2)\leqslant\left(\frac{1}{2}+KT\right)\int_0^T(|\varphi(t)|^2+|\psi(t)|^2)dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{c}{2}\int_Q(|\varphi|^2+|\psi|^2)dxdt &= c\int_\Omega\frac{1}{2}\int_0^T(|\varphi|^2+|\psi|^2)dtdx\\ &\geqslant \frac{cT}{2(1+2KT)}\int_\Omega(|g_1|^2+|g_2|^2)dx\\ &\geqslant \frac{kT}{2(1+2KT)}(|g_1|^2+|g_2|^2).\end{aligned}$$

De (3.10) e da desigualdade acima temos

$$-M(h)\geqslant\inf_{\{g_1,g_2\}\in E\times F}\left[\frac{kT}{2(1+2KT)}(|g_1|^2+|g_2|^2)-(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\})\right].$$

Utilizando a desiguadade abaixo

$$\begin{aligned}(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\}) &\leqslant \|\{g_1,g_2\}\|\|\{y^T,w^T\}\|\\ &\leqslant \lambda(|g_1|^2+|g_2|^2)+\frac{1}{2\lambda}(|y^T|^2+|w^T|^2)\end{aligned}$$

com $\lambda=\dfrac{kT}{2(1+2KT)}$, temos

$$\frac{kT}{2(1+2KT)}(|g_1|^2+|g_2|^2)-(\{g_1,g_2\},\{y^T,w^T\})\geqslant-\frac{1+2KT}{kT}(|y^T|^2+|w^T|^2).$$

Logo,

$$-M(h)\geqslant\inf_{\{g_1,g_2\}\in E\times F}\left[-\frac{1+2KT}{kT}(|y^T|^2+|w^T|^2)\right].$$

Consequentimente,

$$M(h)\leqslant\frac{1+2KT}{kT}(|y^T|^2+|w^T|^2).$$

onde o lado direito da desigualdade independe de h, α e β.

Concluímos então que

$$M(h)\leqslant \text{constante independente de } h,\alpha \text{ e } \beta.$$

3.3 Etapa 3 (Sistema Não-Linear)

Provamos na Etapa 1 que (3.6) é exatamente controlável, portanto $\mathcal{U}_{ad}$ é não-vazio. Sendo o sistema (3.6) linear então $\mathcal{U}_{ad}$ é convexo. De fato, sejam $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_2\} \in \mathcal{U}_{ad}$ cujas respectivas soluções $\{y_1, w_1\}$ e $\{y_2, w_2\}$ de (3.6) satisfazem

$$\{y_1(\cdot, T; \{u_1, v_1\}), w_1(\cdot, T; \{u_1, v_1\})\} = \{y_1^T, w_1^T\}$$

e

$$\{y_2(\cdot, T; \{u_2, v_2\}), w_2(\cdot, T; \{u_2, v_2\})\} = \{y_2^T, w_2^T\}.$$

Dado $t \in [0, 1]$ temos pela linearidade do sistema que

$$t\{y_1, w_1\} + (1 - t)\{y_2, w_2\} \text{ é solução de } (3.6)$$

com controle $\{t\{u_1, v_1\} + (1 - t)\{u_2, v_2\}\}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\{[ty_1 + (1-t)y_2] \quad & (\quad \cdot, T; \{t\{u_1, v_1\} + (1-t)\{u_2, v_2\}\}) \\
& , \quad [tw_1 + (1-t)w_2](\cdot, T; \{t\{u_1, v_1\} + (1-t)\{u_2, v_2\}\})\} \\
& = \quad \{ty_1^T + (1-t)y_2^T, tw_1^T + (1-t)w_2^T\} \\
& = \quad t\{y_1^T, w_1^T\} + (1-t)\{y_2^T, w_2^T\}.
\end{aligned}$$

Segue portanto que $\mathcal{U}_{ad}$ é convexo.

Também temos que $\mathcal{U}_{ad}$ é fechado, pois tomando $\{e, f\} = \{y(t), w(t)\}$ em (3.6) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2 + \|y(t)\|^2 = (\nabla \times w(t), y(t)) + (u1_{\mathcal{O}}(t), y(t))$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |\nabla \cdot w(t)|^2 = (\nabla \times y(t), w(t)) + (v1_{\mathcal{O}}(t), w(t)).$$

Somando-se as equações acima temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|y(t)|^2 + |w(t)|^2) \quad & + \quad \|y(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 + |\nabla \cdot w(t)|^2 \\
& = \quad 2(\nabla \times w(t), y(t)) + (u1_{\mathcal{O}}(t), y(t)) + (v1_{\mathcal{O}}(t), w(t)).
\end{aligned}$$

Agora, integrando de 0 a t segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(|y(t)|^2+|w(t)|^2) &+ \int_0^t(\|y(s)\|^2+\|w(s)\|^2)ds+\int_0^t|\nabla\cdot w(s)|^2ds \\
&= 2\int_0^t(\nabla\times w(s),y(s))ds+\int_0^t[(u1_{\mathcal{O}}(s),y(s))+(v1_{\mathcal{O}}(s),w(s))]ds \\
&\leqslant 2\int_0^t(\nabla\times w(s),y(s))ds+|u|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}|y|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,t))} \\
&+ |v|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}|w|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,t))}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(|y(t)|^2+|w(t)|^2) &\leqslant C_1(|u|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}+|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}) \\
&+ C_2\int_0^t(|y(s)|^2+|w(s)|^2)ds.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Gronwall, temos

$$|y(t)|^2+|w(t)|^2\leqslant C(|u|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}+|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}). \tag{3.12}$$

Tomamos $\{u_n,v_n\}\in\mathcal{U}_{ad}\to\{u,v\}\in\mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2$, ou seja,

$$u_n-u\to 0, \text{ em } \mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2$$

e

$$v_n-v\to 0 \text{ em } \mathbf{L}^2(\mathcal{O}\times(0,T))^2.$$

Seja $\{y_n,w_n\}$ solução de (3.6) com controle $\{u_n,v_n\}$ satisfazendo

$$\{y_n(\cdot,T;\{u_n,v_n\}),w_n(\cdot,T;\{u_n,v_n\})\}=\{y_n^T,w_n^T\}$$

com

$$\{y_n^T,w_n^T\}\to\{y^T,w^T\}.$$

Considere $\{y,w\}$ solução de (3.6) com controle $\{u,v\}$. Pela linearidade do sistema, para cada $n\in\mathcal{N}$ vemos que $\{y_n-y,w_n-w\}$ é solução com controle $\{u_n-u,v_n-v\}$.

Logo, por (3.12) temos

$$|y_n(t)-y(t)|^2+|w_n(t)-w(t)|^2\leqslant C(|u_n-u|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}+|v_n-v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}).$$

Donde

$$\{y_n, w_n\} \to \{y, w\}.$$

Em particular, para $t = T$

$$\begin{aligned}
\{y(\cdot, T; \{u, v\}), w(\cdot, T; \{u, v\})\} &= \{\lim y_n(\cdot, T; \{u_n, v_n\}), \lim w_n(\cdot, T; \{u_n, v_n\})\} \\
&= \{\lim y_n^T, \lim w_n^T\} \\
&= \{y^T, w^T\}.
\end{aligned}$$

Temos então que $\mathcal{U}_{ad}$ é fechado.

Podemos então, pelo Teorema 1.19, para cada $h \in L^2(0, T; E)$ escolhermos $\{u, v\} \in \mathcal{U}_{ad}$ o único elemento tal que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (|u|^2 + |v|^2)dxdt = M(h). \tag{3.13}$$

Definimos desta forma uma aplicação contínua $h \mapsto \{u, v\}$ de $L^2(0, T; E)$ em $\mathbf{L}^2(\mathcal{O} \times (0, T))^2$. De fato, suponhamos que $h_n \in L^2(0, T; E)$ associadas aos controles $\{u_n, v_n\}$ é tal que $h_n \to h$ em $L^2(0, T; E)$, onde $\{u, v\}$ é o controle assiciado a h.

Temos então que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} (|u_n - u|^2 + |v_n - v|^2)dxdt &= M(h_n - h) \\
&\leqslant |M|_{(L^2(0,T;E))^*}|h_n - h|_{L^2(0,T;E)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $h_n \to h$ na equação acima, vemos que

$$\{u_n, v_n\} \to \{u, v\}.$$

Logo, tal aplicação é de fato, contínua.

Denotando por $\{y(h), w(h)\}$ a solução de (3.6) com controle $\{u, v\} = \{u(h), v(h)\}$, podemos considerar a composta destas aplicações e definir uma aplicação contínua $F : L^2(0, T; E) \to L^2(0, T; E)$ por $h \to y(h)$.

Tendo em vista (3.9), (3.12) e (3.13) obtemos que quando h varia em $L^2(0, T; E)$, $\{y, w\}$ permanece em um conjunto limitado $K_1 \times K_2 \subset L^2(0, T; E) \times L^2(0, T; F)$. Em particular, $K_1 = Im(F)$ é um conjunto limitado de $L^2(0, T; E)$.

Provaremos agora que $F : K_1 \to K_1$ admite um ponto fixo.

Podemos, se necessário, tomar o fecho e a envoltória convexa de K_1, que ainda sim teremos conjuntos limitados, portanto já podemos tomar K_1 fechado e convexo.

De acordo com o teorema do ponto fixo de Schauder é suficiente mostrar que $F(K_1)$ é relativamente compacto em K_1.

Para isso, provaremos que

$$y_t \text{ permanece em um conjunto limitado de } L^2(0,T;E) \text{quando } h \text{ varia em } K_1. \tag{3.14}$$

De fato, de (3.6) segue a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |(y_t, e)| &\leqslant \alpha|h(t)||\nabla y(t)||e| + |\nabla y(t)||\nabla e| + |\nabla w(t)||e| + |u(t)|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O})}|e|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C(\alpha|h(t)||\nabla y(t)| + |\nabla y(t)| + |\nabla w(t)| + |u(t)|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O})})|e| \end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo $e \in E$, pois no espaço de dimensão finita E todas as normas são equivalentes.

Portanto,

$$|y_t(t)| \leqslant C(\alpha|h(t)||\nabla y(t)| + |\nabla y(t)| + |\nabla w(t)| + |u(t)|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{O})}).$$

A desigualdade acima prova (3.14).

Então $F(K_1)$ é limitado em

$$W = \{\xi; \xi \in L^2(0,T;E), \frac{d\xi}{dt} \in L^2(0,T;E)\}.$$

Logo, pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions, fazendo $B_0 = B = B_1 = E$ e $p_0 = p_1 = 2$, temos que $F(K_1)$ é relativamente compacto em $K_1 \subset L^2(0,T;E)$.

Tendo, portanto, a aplicação $F : K_1 \to K_1$ que associa $h \to y(h)$ um ponto fixo, então como o sistema (3.6) é exatamente controlável em $T > 0$, temos a controlabilidade exata de (3.4). Além disso, para qualquer h, temos a estimativa uniforme (3.9), assim o controle $\{u(h), v(h)\}$ satisfaz as condições do Teorema 3.1. Concluimos desta forma a prova do Teorema 3.1. ∎

Observação 3.3. *No caso bidimensional, o sistema não-linear que descreve o comportamento de fluidos micropolares (com controles distribuidos em pequenos conjuntos) é dado por*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla) y + \nabla p = \nabla \times w + u 1_{\mathcal{O}} & em \quad Q, \\ w_t - \Delta w + (y \cdot \nabla) w = \nabla \times y + v 1_{\mathcal{O}} & em \quad Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & em \quad Q, \\ y = w = 0 & em \quad \Sigma, \\ y(0) = y^0, w(0) = w^0 & em \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.16}$$

Neste caso, a velocidade angular w *é uma variável escalar e as quantidades* $\nabla \times w$ *e* $\nabla \times y$ *são definidas respectivamente por*

$$\nabla \times w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}, -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \ e \ \nabla \times y = \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial y_1}{\partial x_2}.$$

Usando argumentos análogos, a aproximação de Galerkin de (3.16) *é também exatamente controlável.*

Referências Bibliográficas

[1] T. Ariman and M. Turk, *On steady and pulsatile flow of blood*, J. Appl. Mech., 41 (1974), 1-7.

[2] J. L. Boldrini, B. Climent-Ezquerra, M. A. Rojas-Medar and M. D. Rojas-Medar, *On an Iterative Method for Approximate Solutions of a Generalized Boussinesq Model*, to appear in Journal Mathematical Fluid Mechanics.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: Theórie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[4] C. Calmelet-Eluhu and D. R.Majumdar, *Flow of a micropolar fluid through a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscillations*, Math. Comput. Modelling, 27 (8) (1998), 69-78.

[5] N. N. O. Castro, *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano (*$2 < \mathtt{p} < 3$*).* João Pessoa: UFPB, 2005.

[6] D. W. Condiff and J. S. Dahler, *Fluid mechanics aspects of antisymmetric stress*, Phys. Fluids, 11 (1964), 842-854.

[7] J. M. Coron, *On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 1 (1995/96), 35-75.

[8] J. M. Coron and A. V. Fursikov, *Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary*, Russian J. Math. Phys., 4 (4) (1996), 429-448.

[9] D. Dupuy, G. P. Panasenko and R. Stavre, *Asymptotic methods for micropolar fluids in a tube structure*, Math. Models Methods Appl. Sci., 14 (5) (2004), 735-758.

[10] A. C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech., 16 (1966), 1-18.

[11] A. C. Eringen, *Simple microfluids*, Int. J. Enging. Sci., 2 (1964), 205-217.

[12] L. C. Evans, *Partial Diferencial Equations*. v. 19. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[13] E. Fernández-Cara and S. Guerrero, *Local exact controllability of micropolar fluids*, J. Math. Fluid Mech., 9 (2007), 419-453.

[14] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Y. Imanuvilov and J.-P. Puel, *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl., 83 (12) (2004), 1501-1542.

[15] A. V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Transl. Math. Monogr., 187, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[16] A. V. Fursikov, M. Gunzburger and L. Hou, *Optimal boundary control for the evolutionary Navier-Stokes system: the three-dimensional case*, SIAM J. Control Optim., 43 (6) (2005), 2191-2232.

[17] A. V. Fursikov, M. Gunzburger and L. Hou, *Optimal Dirichlet control and inhomogeneous boundary value problems for the unsteady Navier-Stokes equations*, ESAIM Proc., 4 (1998), 97-116.

[18] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, volume 34 of Lecture Notes Series, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Center, Seoul, 1996.

[19] F. Guillén-González, M. A. Rojas-Medar and M. A. Rodríguez-Bellido, *Sufficient conditions for regularity and uniqueness of a 3D nematic liquid crystal model*, Math. Nachr., 282 (6) (2009), 846-867.

[20] O. Y. Imanuvilov, *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 6 (2001), 39-72.

[21] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley Easten Limited, New Delhi, 1990.

[22] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, second edition, Gordon and Breach, New York, 1969.

[23] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome I. Contrôlabilité Exacte*, Rech. Math. Appl. 8, Masson, Paris, 1988.

[24] J. L. Lions and E. Zuazua, *Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 234 (1997), 1015-1021.

[25] J. L. Lions and E. Zuazua, *Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., XXVI (4) (1998), 605-621.

[26] J. L. Lions and E. Zuazua, *On the cost of controlling unstable systems: the case of boundary controls*, J. Anal. Math., 73 (1997), 225-249.

[27] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and Applications, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[28] M. P. Matos, *Integral de Bochner e Espaços* $\mathsf{L}^\mathsf{p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[29] L. A. J. Medeiros, *Lições de Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[30] L. A. Medeiros, M. M. Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Editora da UFRJ,1989.

[31] L. A. J. Medeiros, S. Malta, M. M. Miranda, *Tópicos de Equações Diferenciais.* Rio de Janeiro: UFRJ, 1998.

[32] C. R. de Oliveira, *Introdução à Análise Funcional.* Publicações Matemáticas. Rio de Janeior: IMPA, 2010.

[33] L. Petrosyan, *Some Problems of Fluid Mechanics with Antisymmetric Stress Tensor*, Erevan, 1984 (in Russian).

[34] A. S. Popel, S. A. Regirer, P. I. Usick, *A continuum model of blood flow*, Biorheology, 11 (1974), 427-437.

[35] M. A. Rojas-Medar, *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution*, Math. Nachr., 188 (1997), 301-319.

[36] R. Stavre, *The control of the pressure for a micropolar fluid*, Dedicated to Eugen Soós, Z. Angew. Math. Phys., 53 (6) (2002), 912-922.

[37] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis* ($2^{\mathtt{nd}}$ Revised Edition), North-Holland, Amsterdam, 1979.