Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Pós-Graduação em Matemática - PGMAT

1	2	3	4	5	6	7	8	NOTA

Seleção do Doutorado Acadêmico
Teresina 21/11/2019

NOME:____ INSCRIÇÃO: _______________

1. Seja $V \subseteq \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial próprio. Prove que $\text{int}V = \emptyset$.
2. Sejam $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família enumerável de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$. Prove que se $\text{int}X_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\text{int}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j\right) = \emptyset$.
3. Prove que não existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ injetiva e de classe C^1. E uma função contínua e injetiva $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, existe? Justifique sua resposta.
4. Sejam $F, G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e tais que
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2.$$
Suponha que em um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ temos que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ ou $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Seja $z_0 = F(x_0,y_0)$. Prove que existe uma vizinhança I de z_0 e uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x,y) = \varphi(F(x,y))$.
5. Enuncie os teoremas da função inversa e da função implícita e prove que estes são equivalentes.
6. Se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ tem medida nula, então para todo $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, o produto cartesiano $X \times Y$ tem medida nula em $\mathbb{R}^{m+n}$.
7. Seja $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado. Prove que toda função $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua é integrável.
8. Sejam $u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Sejam $D \subseteq U$ um domínio compacto com fronteira regular. Aplicando o teorema da divergência ao campo de vetores $F = u \cdot \nabla v$ obtenha a primeira fórmula de Green:
$$\int_D [u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v\rangle] dx = \int_{\partial D} u \frac{dv}{\partial N}.$$

Bom Desempenho!