**Universidade Federal do Piauí - UFPI**
**Centro de Ciências da Natureza - CCN**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | NOTA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática**
**Teresina, 01 de fevereiro de 2019**

NOME:______________________________________________ CPF: ____________________

1. Assinale V (Verdadeiro) ou F (Falso), justificando brevemente sua resposta:

   (a) (   ) Se $|x| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, então $x = 0$.

   (b) (   ) A série de números reais positivos $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum \frac{1}{x_n}$ diverge.

   (c) (   ) Sejam $X$ e $Y$ subconjuntos não-vazios em $\mathbb{R}$. Se $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua, então $f^{-1} : Y \to X$ é contínua.

   (d) (   ) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{y\to 0} g(y)$. Admitindo a existência da função composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0$.

   (e) (   ) Se uma sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ então a sequência de funções $(f_n)$ também converge uniformemente para $f$.

   (f) (   ) Se uma sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Mostre que a sequência $(x_n)$ dada por

$$x_n = \int_1^n \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2} dt$$

   é uma sequência de Cauchy.

3. Considere as séries de termos positivos $\sum x_n$ e $\sum y_n$. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

   para todo $n \geq n_0$. Mostre que se $\sum x_n$ é divergente então $\sum y_n$ também é divergente.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

   Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto, então toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, tal que $f(0) = 0$ e $f'(x) > f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) > 0$, para todo $x > 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e limitada. Mostre que existe uma sequência $(x_n)$ com $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, tal que a sequência $(f'(x_n))$ é convergente.

8. Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-2s^2}\, ds$ e responda os itens abaixo:

   (a) Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe.

   (b) Sendo $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} \cdot (A - f(x)) = 0$.

**Bom Trabalho!**