Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	NOTA

Exame de Acesso ao Doutorado Acadêmico em Matemática
Teresina 01/02/2019

NOME:____ CPF: ____________________

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Suponha que $|f(x)| < |x|$, para todo $x \in B$ não nulo. Seja $x_0 \in B$ um ponto não nulo, considere a sequência (x_n) definida como $x_n = f(x_{n-1})$ para $n \geq 1$. Mostre que existe $\lim x_n$ e calcule seu valor.

2. Dada $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^n$, defina a *extensão radial* de f como a aplicação $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ tal que
$$F(x) = \begin{cases} |x| \cdot f\left(\dfrac{x}{|x|}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Mostre que F é diferenciável na origem $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ se, e somente se, f é a restrição de uma aplicação linear.

3. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para $x, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se $\langle f'(x) \cdot v, v\rangle \geq \alpha |v|^2$, onde $\alpha > 0$ é uma constante.
   (a) Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários.
   (b) Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e daí, que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.

4. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos J-mensuráveis e $f : A \to B$ é contínua e tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$, para algum $c > 0$ e todo $x, y \in A$. Mostre que, para toda função $g : B \to \mathbb{R}$ integrável, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

5. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicação linear inversível e $B_R \subset \mathbb{R}^n$ bola aberta de raio R centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n$. Mostre que
$$\int_{B_R} \mathrm{e}^{-\langle Ty, Ty\rangle} dy = \int_{T(B_R)} \mathrm{e}^{-\langle x, x\rangle} |\det T^{-1}| dx,$$
onde $\langle \, , \rangle$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Conclua que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\langle Ty, Ty\rangle} dy = \pi^{\frac{n}{2}} |\det T^{-1}|.$$

6. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ tais que $\Delta u = \Delta v = 0$ em U. Considere também $x_0 \in U$ e r uma constante positiva com $B = \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1}; |x - x_0| \leq r\right\} \subset U$, tal que $u = v$ em ∂B. Prove que, $u = v$ em B.

Bom Trabalho!