	Universidade Federal do Piauí - UFPI **Centro de Ciências da Natureza - CCN** **Programa de Pós-Graduação em Matemática**	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 22/11/2018

NOME:____ CPF: ____________________

1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, mostre que
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geq 2^n.$$

2. Mostre que o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável.

3. Seja $x_0 = 1$ e $x_n = \frac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$. Prove que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ e calcule seu valor.

4. Mostre que o conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ é compacto.

5. Se $f : [a, b] \to \mathbb{Q}$ é uma função contínua, então f é constante.

6. Seja $f : [0, e] \to \mathbb{R}$ definida como:
$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{se} \quad x > 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$
Verifique se f satisfaz as hipóteses do *Teorema do Valor Médio*. Justifique sua resposta.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e limitada inferiormente. Mostre que a equação: $f'(x) + 2x = 0$, possui solução.

8. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto $a \in int(I)$. Prove que
$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}.$$

9. Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Prove que
$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

10. Supondo que a sequência de números reais $(a_n)_{n\geq 1}$ seja convergente, prove que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformememnte em qualquer intervalo $|x| \leq r < 1$.

Bom Desempenho!