UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE SELEÇÃO PARA O MESTRADO - 2018

Data: 24/10/2017
Candidato(a):____ Nota:__________

1. Construa uma sequência de números reais $x_1, x_2, \ldots$ tal que o conjunto dos limites de subsequências é precisamente o intervalo $[0,1]$. Justifique sua resposta.

2. Decida se a seguinte afirmação é falsa ou verdadeira (justifique): se $\sum_n a_n$ converge, então $\sum_n 2^{-n} a_n$ também converge.

3. Seja $K \subset \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: para toda família de abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ (L é um conjunto qualquer de índices) tal que $K \subset \bigcup_\lambda A_\lambda$, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in L$ de forma que $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$. Prove que K é um subconjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica, isto é, existe $C > 0$ tal que $f(x + C) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(\mathbb{R})$ é um intervalo limitado e fechado.

5. Enuncie o Teorema do Valor Médio e, em seguida, use-o para mostrar que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

6. Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a,b]$ e deriváveis no intervalo (a,b). Mostre que existe $c \in (a,b)$, tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

7. Seja $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma função contínua em $[0,1]$ e duas vezes diferenciável no intervalo $(0,1)$, tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Prove que existem $a, b \in [0,1]$ distintos e tais que $f'(a)f'(b) = 1$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela expressão

$$f(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} e^{-t^3}\, dt,$$

onde $g(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^3}\, dt$ e $h(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} e^{-t^3}\, dt$. Calcule o valor de $f'(1)$.

9. Seja $f : [0,a] \to [0, f(a)]$ uma função derivável e estritamente crescente tal que $f(0) = 0$.

   (a) Mostre que a função

   $$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x),$$

   $x \in [0,a]$, é constante.

   (b) Mostre que

   $$xy \le \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt$$

   para todos $0 \le x \le a$ e $0 \le y \le f(a)$.

(c) Prove a desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \ \forall\, a, b \geq 0, \ \ \text{onde } p, q \in (1, \infty) \ \text{ e } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

com igualdade se, e só se, $a^p = b^q$.

10. Seja f_n uma sequência de funções. Prove que se cada $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $X \subset \mathbb{R}$ e $f_n \to f$ uniformemente em X então f também é uniformemente contínua em X.