Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza
Programa Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Seleção - Mestrado Acadêmico
Teresina 24/07/2017

NOME:____ INSCRIÇÃO:____________

1. Uma sequência $\{x_n\}$ é dita de variação limitada se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| < +\infty.$$

   Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

2. Seja $A \subset \mathbb{R}$ qualquer. Prove que toda cobertura de A por abertos possui uma subcobertura enumerável.

3. Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, então quais são as possibilidades para os conjuntos dos valores de aderência de f no ponto a.

4. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que não existe $x \in [0,1]$ satisfazendo $f(x) = f'(x) = 0$. Mostre que $Z = \{x \in [0,1] \; ; \; f(x) = 0\}$ é um conjunto finito.

5. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ e $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$. Prove que f é identicamente nula.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uma função duas vezes diferenciável tal que $f'' \leq 0$. Prove que f é constante.

7. Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $L = \lim_{x\to\infty} f'(x)$ existe. Prove que, para cada $c > 0$, $\lim_{x\to\infty}[f(x+c) - f(x)] = cL$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.

8. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável prove que $g(x) = f(x)^2$ é integrável. A recíproca dessa afirmação é verdadeira? Justifique.

9. Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e par. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

10. Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3$ e a partição $P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, 1\right\}$ do intervalo $[0,1]$. Calcule $s(f,P)$ e $S(f,P)$.