UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Quando a C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência implica na C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência

Ronaldo Carvalho da Silva

Teresina - 2017

Ronaldo Carvalho da Silva

Dissertação de Mestrado:

Quando a C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência implica na C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586q Silva, Ronaldo Carvalho da.

Quando a C^{ℓ}-$\mathcal{K}$-equivalência implica na C^{ℓ}-$\mathcal{R}$-equivalência / Ronaldo Carvalho da Silva. – Teresina, 2017.
48f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

1. Geometria e Topologia. 2.Teoria de Singularidades. I. Título

CDD 516

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Quando a C -K-equivalência implica na C -R-equivalência

RONALDO CARVALHO DA SILVA

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 28 de Julho de 2017.

Banca Examinadora:

[illegible]

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior - orientador

Liane Mendes Feitosa Soares

Prof. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares - membro interno

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho - membro externo

À minha família, especialmente minha mãe Maria do Remédio Carvalho da Silva. Por todo o carinho e inspiração, sem vocês nada seria.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos: Primeiramente à Deus pela oportunidade de realizar mais este sonho.

À minha mãe Maria do Remédio, que em meio a tantas dificuldades sempre me apoiou e a minha tia Lina Maria por cuidar de mim ao longo desses anos que fiquei longe de casa.

Aos meus irmãos Suzana, Rony e Silvilane, por toda a paciência e compeensão em meus momentos de insegurança e nervosismo e também agradecer a minha prima Marinalda por escutar minhas reclamações quando chegava em casa e por sempre me motivar.

À todos os meus amigos e parentes que compartilharam desta caminhada que não foi fácil, obstáculos e dificuldades foram vencidos. A todos o meu muito obrigado.

Ao Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior, pela valiosa orientação e por depositar sua confiança em mim diante desse trabalho e em especial a Prof(a). Dr. Liane por acreditar em mim durante a graduação e me incentivar a fazer o mestrado.

Aos professores do Departamento de Matemática e meus amigos da Pós e graduação pela amizade e agradável convívio.

E também deixo aqui meu agradecimento à meu amigo e conterrâneo Prof. Dr. João Benício De Melo Neto(in memorian).

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O nosso objetivo é mostrar condições suficientes para que a C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência implica na C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência para germes de funções semiquase homogêneos de classe C^ℓ onde $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. Bem como ilustrar exemplos onde essa implicação não ocorre.

Palavras-chave : Germes de funções, Semi quase Homogêneo, C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência, C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência.

Abstract

Our objective is to show sufficient conditions for the equivalence of C^ℓ-$\mathcal{K}$ to imply C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalence for germs of semi quasi homogeneous functions of class C^ℓ where $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. In addition to illustrating examples where this implication does not occur.

Key-words: Functions germs, Homogeneous semi quase, C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalence, C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalence.

Sumário

Introdução

Cada área da Matemática tem uma maneira própria de classificar seus objetos. Em Teoria de Singularidades os objetos mais importantes a serem classificados são os germes de aplicações diferenciáveis (i.e., $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ de classe C^∞). Toda classificação é feita através de alguma relação de equivalência. Um dos principais tópicos estudados foi a importância das singularidades quase homogêneas, pois foi deste estudo que surgiu a seguinte pergunta.

Dado um germe de função f, existe ou não, um germe de polinômio quase homogêneo f_0 que é $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ equivalente a f? Uma das respostas a essa questão importante é devido a K. Saito [6], essa foi uma das motivações deste trabalho. Assim outro ponto fundamental deste trabalho é investigar a versão C^ℓ da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ equivalências de germes de funções reais semi quase homogêneas de classe C^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. Uma vez feito isto para germes de funções de classe C^∞ quase homogêneos, como mostra os trabalhos de K. Saito [6] e M. Takahashi [7]. Este trabalho é baseado no artigo dos professores Carlos Humberto Soares Júnior, João Carlos Ferreira Costa e Marcelo José Saia.

No Capitulo 2, introduzimos os conceitos de germes de aplicações suaves e analíticas complexas e algumas propriedades básicas do anel local ε_n.

No Capitulo 3, apresentamos um estudo detalhado das relações de equivalências, em especial a $\mathcal{R}$-equivalência e $\mathcal{K}$-equivalência abordando suas propriedades.

O Capitulo 4 contém uma das motivações deste trabalho baseados nos artigo M. Takahashi [7], Carlos Humberto Soares Júnior, João Carlos Ferreira Costa e Marcelo José Saia e algumas definições e resultados importantes como : Fórmula de Euler (ou relação de Euler)(Prop. 4.1.11).

O Capitulo 5 é uma versão do Capitulo 4, onde investigaremos a versão C^ℓ da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ equivalências de germes de funções reais semi quase homogêneas de classe C^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. O resultado principal é o Teorema 5.3.1, no qual daremos uma condição suficiente para que a C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência implique na C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência para germes de funções de classe C^ℓ. Este resultado foi inspirado no artigo de M. Takahashi [7]. No caso particular em que os germes são quase homogêneos de classe C^ℓ veremos que o (Corolário 5.3.5) recobre o resultado de M. Takahashi [7] para $\ell = \infty$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Vamos começar revendo rapidamente algumas definições e propriedades elementares de grupos, anéis, ideais e várias operações que podem ser realizadas em tais conjuntos e por fim definir relação de equivalência em um conjunto.

1.1 Grupos e subgrupos

Definição 1.1.1 Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall\ a, b, c \in G$ (Associatividade);

2. Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \quad \forall\ a \in G$ (Existência de elemento neutro);

3. Dado $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$ (Existência de elemento oposto);

Além disso, um grupo G é chamado Abeliano se também satisfaz a propriedade:

4. $a * b = b * a, \quad \forall\ a, b \in G$ (Comutatividade).

Observação 1.1.2 Usaremos a notação $(G, *)$ para indicar que G é um grupo e $*$ é a operação neste grupo.

Observação 1.1.3 Dado um grupo G, mostre que os elementos neutro e oposto são únicos.

Observação 1.1.4 Devido a observação anterior, usaremos a notação a^{-1} para indicar o elemento oposto de a.

Definição 1.1.5 Dado um grupo G, um subgrupo de G é um subconjunto H satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $e \in H$;

2. dados $a, b \in H$ tem-se $a * b^{-1} \in H$.

Exemplo 1.1.6

1. São exemplos de grupos os conjuntos $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ e $(S_n, \circ)$, em que S_n é formado pelas permutações de n elementos;

2. São subgrupos de $\mathbb{Z}$ todos os subconjuntos $n\mathbb{Z} = \{nx/x \in \mathbb{Z}\}$, com n inteiro não negativo;

3. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{C}, +)$.

1.2 Anéis, subanéis e ideais

Definição 1.2.1 Seja A um conjunto não vazio no qual estão definidas as operações de soma e de produto

$$+ : A \times A \to A$$

e

$$\cdot : A \times A \to A$$

Diremos que A é um anel quando são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $(A, +)$ é um grupo abeliano;

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall\, a, b, c \in A$ (Associatividade do produto);

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall\, a, b, c \in A$ (Distributividades).

O anel A é dito um anel com unidade quando:

4. Existe $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \quad \forall\, a \in A$;

Além disso, o anel A será chamado anel comutativo quando:

5. $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall\ a \in A$.

Observação 1.2.2 Em geral usamos a notação $(A, +, \cdot)$ para indicar o anel A. Quando não houver risco de confusões usaremos simplesmente A.

Exemplo 1.2.3 São exemplos de anéis: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, em que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n. O primeiro é um anel comutativo com unidade e o segundo é um anel com unidade mais não é comutativo.

Definição 1.2.4 Sejam A um anel e B um subconjunto de A. Diremos que B é subanel de A quando, com as operações induzidas de A, B também for um anel.

Exemplo 1.2.5

1. $\{0\}$ e A são subanéis de A;

2. Dados $x_1, \ldots, x_n$ em anel A, o conjunto $B := \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n / a_i \in A\}$ é um subanel de A.

Definição 1.2.6 Um ideal I de um anel A é suconjunto de A tal que:

1. $(I, +)$ é um grupo aditivo;

2. $IA \subset I$, i.e, $a \cdot x \in I, \ \forall\ a \in A$ e $\forall x \in I$.

Definição 1.2.7 Um elemento x em um anel A é dito uma unidade quando este divide 1, i.e, quando $x \cdot y = 1$ para algum $y \in A$.

Exemplo 1.2.8 Fixemos um elemento $x \in A$. Mostre que o conjunto $\langle x \rangle$ definido por

$$\langle x \rangle := \{a \cdot x; a \in A\}$$

é um ideal de A. Além disso, mostre que x é uma unidade se, e somente se, $\langle x \rangle = A = \langle 1 \rangle$.

Operações com ideais

Dados dois ideais I e J de um anel A, definimos os seguintes ideais:

a. A soma de I e J é o conjunto de todos os elementos $x + y$ onde $x \in I$ e $y \in J$. É o menor ideal que contém I e J, em outras palavras é o ideal gerado pela união $I \bigcup J$.

b. A interseção de qualquer família de $(I_\alpha)_\alpha \in \Lambda$ de ideais é um ideal.

c. O produto de dois ideais I, J de A é o ideal $I \cdot J$ gerado por todos os produtos $x \cdot y$, onde $x \in I$ e $y \in J$. É o conjunto de todas as somas finitas $\sum x_i y_j$ onde cada $x_i \in I$ e cada $y_j \in J$.

Observação 1.2.9 Um ideal $\mathfrak{m} \subsetneq A$ em um anel A chama-se maximal se não existe ideal I de A tal que $\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq A$.

Exemplo 1.2.10 O ideal $\langle x, y \rangle$ é maximal em $\mathbb{R}[x, y]$, onde $\mathbb{R}[x, y]$ é o anel dos polinômios nas indeterminadas x, y com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2.11 Uma relação de equivalência num conjunto X é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva,i.e,

1. $\forall\ a \in X, \quad$ tem-se $a\mathfrak{R}a$;
2. $\forall\ a, b \in X, \quad$ tem-se $a\mathfrak{R}b \Rightarrow b\mathfrak{R}a$
3. $\forall\ a, b, c \in X, \quad$ tem-se $a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c \Rightarrow a\mathfrak{R}c$.

Observação 1.2.12 Dado um conjunto X, com uma relação de equivalência $\mathfrak{R}$, a classe de equivalência de um elemento $a \in X$ é o subconjunto de todos os elementos de X que são equivalentes a a, ou seja,

$$[a] = \{x \in X \mid x\mathfrak{R}a\}.$$

Uma relação de equivalência permite particionar o conjunto em classes de equivalência, esta construção é muito importante para gerar vários conjuntos quocientes, como grupos quocientes ou topologias quocientes. A idéia é partir de um conjunto, em princípio mais complicado X e tentar criar um outro conjunto Y, mais simples, que vê elementos distintos de X como iguais. Então, estudando-se o conjunto mais simples Y pode-se tirar sobre X.

Exemplo 1.2.13 A relação no conjunto A definida por

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = y$$

é uma relação de equivalência em A.

De fato, vejamos que

1. $x\mathfrak{R}x$, pois tem-se que $x = x$;
2. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = y \Rightarrow y = x \Leftrightarrow y\mathfrak{R}x$;
3. $x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x = y$ e $y\mathfrak{R}z \Leftrightarrow y = z$. Daí temos que

$$x = z \Leftrightarrow x\mathfrak{R}z.$$

Exemplo 1.2.13 A relação ´$\subset$´ não define uma relação de equivalência.

De fato, não ocorre a seguinte condição:

2. $A \subset B$, mas não é verdade que $B \subset A$.

Capítulo 2

Introdução a Teoria de Singularidades

Neste capitulo, definimos importantes estruturas da Teoria de Singularidades, tais como o conceito de germes, a definição do anel ε_n e seu ideal maximal $\mathfrak{m}_n$, e destacamos algumas de suas propriedades. Toda a teoria desenvolvida neste trabalho envolve estas estruturas.

2.1 Germes

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. Definimos, no conjunto $P(X)$ das partes de X, a relação de equivalência:

$$A \sim_x B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U,$$

para alguma vizinhança U de x em X

Observação 2.1.1 O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado X é chamado de conjunto das partes de X, denotado $P(X)$.

Definição 2.1.2 Um germe de um subconjunto $A \subset X$ é a classe de equivalência de A pela relação $\sim_x$.

Denotamos por (A, x) o germe do subconjunto $A \subset X$. Quando não houver risco de interpretações usaremos a letra A para denotar esse germe.

Proposição 2.1.3 Mostre que a relação $\sim_x$ é uma relação de equivalência no conjunto $P(X)$.

Demonstração. I. $A \sim_x A$, pois temos que $A \cap U = A \cap U$;

II. $A \sim_x B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U \Rightarrow B \cap U = A \cap U \Leftrightarrow B \sim_x A$;

III. $A \sim_x B$ e $B \sim_x C$. Daí tem-se que

$$A \cap U = B \cap U, \quad B \cap V = C \cap V.$$

Tome $W = U \cap V$. Portanto,

$$A \cap W = B \cap W = C \cap W \implies A \sim_x C.$$

□

Seja agora Y um conjunto qualquer e C o conjunto dos pares (U, f) tais que U é uma vizinhança de x em X e $f : U \subset X \to Y$ é uma função. Definimos a relação de equivalência em C por :

$$(U, f) \backsimeq_x (V, g) \Leftrightarrow \exists\, W \subset U \cap V,$$

onde W é uma vizinhança de x tal que $f\,|_W = g\,|_W$.

Definição 2.1.4 Um germe de aplicação de X em Y no ponto x é uma relação de equivalência de uma aplicação $f : U \to Y$ pela relação $\backsimeq_x$.

Denotamos o germe de uma aplicação $f : U \to Y$ de várias formas : simplesmente f, ou (f, x) ou $f : (X, x) \to Y$ ou (U, f), dentre outros.

Proposição 2.1.5 Mostre que a relação $\backsimeq_x$ é uma relação de equivalência no conjunto C.

Demonstração. De fato, de maneira análoga tem-se que as propriedades 1 e 2 seguem da definição. Agora note que $(U, f) \backsimeq_x (V, g)$ e $(V, g) \backsimeq_x (W, h)$, assim temos

$$(U, f) \backsimeq_x (V, g) \implies \exists\, A \subset U \cap V \;;\; f\,|_A = g\,|_A$$

e

$$(V, g) \backsimeq_x (W, h) \implies \exists\, B \subset V \cap W \;;\; g\,|_B = h\,|_B \;.$$

Tome $C = A \cap B$. Logo,

$$f|_C = g|_C = h|_C \Longrightarrow f|_C = h|_C\,.$$

$\square$

2.2 Germes de Aplicações suaves e Analíticas complexas

Definição 2.2.1 Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$ e consideremos somente aplicações de classe C^∞, $f : U \to \mathbb{R}^p$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança do ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\varepsilon^a_{n,p}$ o conjunto de todos os germes $f : (U, a) \to \mathbb{R}^p$.

Quando $a = 0$ escreveremos $\varepsilon_{n,p}$ e quando $p = 1$ escreveremos ε^a_n ou ε_n.

Definição 2.2.2 Agora, sejam $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^p$ e consideremos somente aplicações analíticas complexas (holomorfas), $f : U \to \mathbb{C}^p$, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma vizinhança do ponto $a \in \mathbb{C}^n$.

Devido as similaridades das propriedades, as notações $\varepsilon^a_{n,p}$, $\varepsilon_{n,p}$, ε^a_n e ε_n serão usadas. Observamos que na literatura é usual encontrar, no caso complexo, as notações $O^a_{n,p}$, $O_{n,p}$, O^a_n e O_n.

Observação 2.2.3 Definindo as operações de adição e multiplicação em ε^a_n

$$+ : \varepsilon^a_n \times \varepsilon^a_n \to \varepsilon^a_n$$

e

$$\cdot : \varepsilon^a_n \times \varepsilon^a_n \to \varepsilon^a_n,$$

respectivamente por, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, obtemos que ε^a_n é um anel comutativo com unidade.

Além disso, a translação $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ em que $T_a(x) = x + a$, induz um isomorfismo de anéis $T^*_a : \varepsilon^a_n \to \varepsilon^a_n$. Por esse motivo, na maioria dos casos, consideraremos germes na origem de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.2.4 Seja $\varepsilon^0_{n,p} = \{f \in \varepsilon_{n,p}; f(0) = 0\}$. Dado $f \in \varepsilon^0_{n,p}$, mostre que $f^* : \varepsilon_p \to \varepsilon_n$, definido por $f^*(g) = g \circ f$ é um homomorfismo de anéis.

Demonstração. 1. $f^*(g+h) = (g \circ h) \circ f = g \circ f + h \circ f = f^*(g) + f^*(h)$.

2. $f^*(g \cdot h) = (g \cdot h) \circ f = (g \circ f) \cdot (h \circ f) = f^*(g) \cdot f^*(h)$. Logo, f^* é um homomorfismo. □

2.3 Propriedades Básicas do Anel local ε_n

As propriedades a seguir são válidas em ambos os casos, real e complexo. Seja

$$\mathfrak{m}_n = \{f \in \varepsilon_n; f(0) = 0\}.$$

Claramente $\mathfrak{m}_n$ é um ideal de ε_n.

Proposição 2.3.1 $\mathfrak{m}_n$ é o único ideal maximal de ε_n.

Demonstração. $i)$ $\mathfrak{m}_n$ é um ideal. De fato, sejam $f, g \in \mathfrak{m}_n \Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (f+g) \in \mathfrak{m}_n$. Tome agora $f \in \mathfrak{m}_n$ e $g \in \varepsilon_n$, assim temos que $(g \cdot f)(0) = g(0) \cdot f(0) = g(0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow (g \cdot f) \in \mathfrak{m}_n$. Logo, $\mathfrak{m}_n$ é um ideal.

$ii)$ Suponha por absurdo que $\mathfrak{m}_n$ não seja maximal. Então, existe um ideal $J \subset \varepsilon_n$, tal que $\mathfrak{m}_n \subset J \subset \varepsilon_n$, onde $\mathfrak{m}_n \neq J$ e $J \neq \varepsilon_n$. Como $\mathfrak{m}_n \neq J$ temos que existe $f \in J$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_n \Rightarrow f(0) \neq 0$. Portanto, f tem inversa, i.e, $\frac{1}{f}$ que também é um germe em ε_n. Logo,

$$1 = f \cdot (\frac{1}{f}) \in J \Rightarrow J = \varepsilon_n.$$

Absurdo ! Portanto, $\mathfrak{m}_n$ é maximal.

$iii)$ $\mathfrak{m}_n$ é o único ideal maximal. Suponha que exista outro ideal tal que $I \subsetneq \varepsilon_n$. Então, I não contém unidades, assim tem-se $I \subset \mathfrak{m}_n$. Portanto, $\mathfrak{m}_n$ é o único ideal maximal de ε_n. □

Proposição 2.3.2 $\mathfrak{m}_n$ é o ideal de ε_n gerado pelos germes das funções $f_i(x) = x_i$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Demonstração. Note que $< x_1, x_2, \ldots, x_n > \subset \mathfrak{m}_n$. Agora, se $f \in \mathfrak{m}_n$ então existe uma bola aberta $B(0,r) = \{x \in \mathbb{K}^n; | x < r\}$ e um representante de f, também denotado por f, definido nesta bola. Observe que, para $x \in B(0,r)$ tem-se pelo Teorema fundamental do cálculo que

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),$$

onde $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ define um germe em ε_n. Logo $f \in < x_1, \ldots, x_n >$. □

Lema 2.3.3 Um germe $f \in \varepsilon_n$ é invertível se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $f \in \varepsilon_n$ é invertível, logo existe $g \in \varepsilon_n$ tal que $f \cdot g = 1$. Em particular, tem-se $(f \cdot g)(0) = 1 \Rightarrow f(0) \cdot g(0) = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Suponha que $f(0) \neq 0$. Pelo teorema da conservação do sinal, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem tal que $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in U$. Então, para $x \in U$ existe $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ tal que $f(x) \cdot g(x) = 1$, onde $g = \frac{1}{f} : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞. $\square$

Observação 2.3.4 Segue da **proposição 2.3.1** que ε_n é um anel local pois $\mathfrak{m}_n$ é o seu único ideal maximal.

Capítulo 3

Ações de Grupos e Relações de Equivalências

Iniciaremos esse capítulo com uma discurssão geral sobre as relações de equivalências induzidas por ações de grupo. Assim definiremos então alguns grupos de germes de difeomorfismos e, usando-os, introduzimos as relações de equivalências básicas em germes de aplicações: G-equivalência onde $G = \mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$.

3.1 Ações de Grupos

Definição 3.1.1 Sejam G um grupo e C um conjunto. Uma ação do grupo G no conjunto C é uma função

$$\varphi : G \times C \to C$$

tal que

1. $\varphi(e, x) = x, \quad \forall\, x \in C$;
2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, x), \quad \forall\, x \in C$ e $\forall\, g_1, g_2 \in G$.

Observamos que alguns autores preferem denotar $\varphi(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Definição 3.1.2 Fixemos $x \in C$.

1. Definimos a órbita de x como sendo o subconjunto de C definido por

$$Gx = \{\varphi(g, x) \in C; g \in G\} \subset C.$$

2. Definimos também o estabilizador de x em G como sendo o subgrupo

$$G_x = \{g \in G; \varphi(g, x) = x\}.$$

Note que o estabilizador é um subgrupo de G.

Uma ação de um grupo G em um conjunto C induz uma relação de equivalência em C da seguinte forma

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \mid \varphi(g, x) = y.$$

Seja $\varphi : G \times C \to C$ uma ação do grupo G no conjunto C.

Exemplo : Mostre que o estabilizador G_x é um subgrupo de G;

De fato, note que $e \in G_x$, pois $\varphi(e, x) = x$ e ainda dados $g_1, g_2 \in G_x$. Mostraremos que $g_1 \cdot g_2^{-1} \in G_x$, com efeito

$$\varphi(g, x) = y \implies \varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \cdot g, x) = \varphi(e, x) = x.$$

Logo,

$$\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2^{-1}, x)) = \varphi(g_1, x) = x.$$

Exemplo : Mostre que a relação $\sim$ é de fato uma relação de equivalência em C.

I) Reflexiva. $x \sim x$, pois tome $e \in G$. Assim, temos que $\varphi(e, x) = x$.

II) Simétrica. $x \sim y \Rightarrow \exists\ g \in G$ tal que $\varphi(g, x) = y$. Assim, tem-se

$$\varphi(g, y) = \varphi(g_1, \varphi(g, x)) = \varphi(g_1 \cdot g, x).$$

Tome $\bar{g} = g_1 \cdot g \in G$ tal que $\varphi(\bar{g}, x) = x \Rightarrow y \sim x$.

III) Transitiva. $x \sim y \Rightarrow \exists g_1 \in G$ tal que $\varphi(g_1, x) = y$ e $y \sim z \Rightarrow \exists g_2 \in G$ tal que $\varphi(g_2, y) = z$. Assim, temos que

$$\varphi(g_2, y) = z \Rightarrow z = \varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2 \cdot g_1, x).$$

Tome $\bar{g} = g_2 \cdot g_1$ tal que $\varphi(\bar{g}, x) = z \Rightarrow x \sim z$.

Definição 3.1.4 Denotamos por D_n o conjunto de todos os germes de aplicações $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que:

- h é um difeomorfismo, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
- h é um isomorfismo analítico, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Observação 3.1.5 Com a operação de composição é fácil vê que o conjunto D_n é um grupo.

A seguir definiremos as principais ações de grupo (e relações de equivalências) no espaço de germes $\varepsilon^0_{n,p}$.

3.2 A $\mathcal{R}$-equivalência (equivalência à direita)

Consideremos a ação do grupo D_n em $\varepsilon^0_{n,p}$ dada por

$$r : D_n \times \varepsilon^0_{n,p} \to \varepsilon^0_{n,p}$$

$$(h, f) \to f \circ h^{-1}$$

Definição 3.2.1 Dizemos que dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{R}$-equivalentes se, e somente se, existe $h \in D_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$. Isto é, f é $\mathcal{R}$-equivalente à g.

Exemplo 3.2.2 Dada uma função $f : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ tal que $f'(0)$ é sobrejetiva, segue-se do teorema da forma local das submersões $(n + k > n)$ que existe $h \in D_{n+k}$ tal que

$$(f \circ h)(x, y) = x, \ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Portanto, temos que $f \sim_{\mathcal{R}} Id_{\mathbb{R}^n}$.

3.3 A $\mathcal{L}$-equivalência (equivalência à esquerda)

Neste caso, consideremos a ação do grupo D_p em $\varepsilon^0_{n,p}$ dada por

$$l : D_p \times \varepsilon^0_{n,p} \to \varepsilon^0_{n,p}$$

$$(h, f) \to h \circ f$$

Definição 3.3.1 Dizemos que dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{L}$-equivalentes se, e somente se, existe $h \in D_p$ tal que $h \circ f = g$. Isto é, f é $\mathcal{L}$-equivalente à g.

Exemplo 3.3.2 Dada uma função $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^{n+k}, 0$ tal que $f'(0)$ é injetiva, segue-se do teorema da forma local das imersões $(n < n+k)$ que existe $h \in D_{p+k}$ tal que

$$(h \circ f)(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Portanto, temos que $f \sim_{\mathcal{L}} Id_{\mathbb{R}^n \times 0}$.

3.4 A $\mathcal{A}$-equivalência (equivalência à direita e esquerda)

Neste caso, basta consideramos a ação do grupo $D_n \times D_p$ em $\varepsilon^0_{n,p}$ dada por

$$a : (D_n \times D_p) \times \varepsilon^0_{n,p} \to \varepsilon^0_{n,p}$$

$$((h, k), f) \to k \circ f \circ h^{-1}$$

Definição 3.4.1 Dizemos que dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, existe $(h, k) \in D_n \times D_p$ tal que $k \circ f \circ h^{-1} = g$. Isto é, f é $\mathcal{A}$-equivalente à g.

É costume, em teoria de singularidades, dizemos que $f \sim g$ quando os germes f e g coincidem, à menos de mudança de coordenadas na fonte (domínio) e na meta (contradomínio).

Exemplo 3.4.2 A fim de darmos um exemplo onde a A-equivalência ocorre, consideremos $U \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança da origem e $f : U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^∞ tal que $f(0) = 0$. Assuma que o posto $f'(a)$ é constante, para todo $a \subset U$.

Observe que se $k =$ posto $f'(a) \leqslant min\{n, p\}$. Assim usaremos a seguinte afirmação. **Afirmação :** O germe $f \in \varepsilon^0_{n,p}$ é A-equivalente ao germe da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dado por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

em que $m =$ posto $f'_{|U}$. Então,

$$h \circ f \circ g^{-1}(x) = T(x), \quad \forall\, x \in U.$$

Portanto, $f \sim_{\mathcal{A}} T$.

3.5 A $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$-equivalência

Definição 3.5.1 (O grupo $\mathcal{C}$)

O grupo $\mathcal{C}$ é formado pelos germes de difeomorfismos (ou isomorfismo analítico) $H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0$ tais que $\pi_1(H(x, y)) = x$ e $\pi_2(H(x, 0)) = 0$. Isto é,

$$C = \{H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0; H(x, y) = (x, \varphi(x, y))\},$$

onde H é um difeomorfismo e $\varphi(x, 0) = 0$.

O grupo $\mathcal{C}$ age em $\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p}$ da seguinte forma :

$$c : C \times (\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p}) \to (\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p})$$

$$(H, (x, f)) \to H(x, f) = (x, \varphi(x, f)).$$

Desta forma, dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{C}$-equivalentes quando existir $H \in C$ tal que

$$H(x, f(x)) = (x, \varphi(x, f(x))) = (x, g(x)).$$

Neste caso, observe que o germe do gráfico de f é levado no germe do gráfico de g através de projeções verticais.

Definição 3.5.2 (O grupo $\mathcal{K}$)

O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos germes de difeomorfismos (ou isomorfismo analítico) $H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0$ tais que $h(x) = \pi_1(H(x, y)) : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ é um difeomorfismo (ou isomorfismo analítico) para cada $y \in \mathbb{K}^p, 0$ e $\pi_2(H(x, 0)) = 0$. Isto é,

$$K = \{H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0; H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))\},$$

onde $h(x)$ são difeomorfismos e $\varphi(x, 0) = 0$.

O grupo $\mathcal{K}$ age em $\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p}$ da seguinte forma :

$$k : K \times (\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p}) \to (\mathbb{K}^n \times \varepsilon^0_{n,p})$$

$$(H, (x, f)) \to H(x, f) = (h(x), \varphi(x, f)).$$

Assim, dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{K}$-equivalentes quando existir $H \in K$ tal que

$$H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x))) = (h(x), g \circ h(x)).$$

Neste caso, observe que o germe do gráfico de f é levado no germe do gráfico de g.

Proposição 3.5.3 Mostre que os germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, existe um germe de difeomorfismo (ou isomorfismo analítico) $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que f e $g \circ h$ são $\mathcal{C}$-equivalentes.

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes. Então, existe $H \in K$ tal que $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$, onde $H(x, y) = (h(x), \phi(x, y))$. Assim, tome $y = f(x)$ logo temos que $\phi(x, f(x)) = (g \circ h)(x)$. Defina $\bar{H}(x, y) = (x, \phi(x, y))$. Então,

$$\bar{H}(x, f(x)) = (x, \phi(x, f(x)) = (x, (g \circ h)(x))\cdot$$

Logo, existe $\bar{H} \in C$ tal que f e $g \circ h$ são $\mathcal{C}$-equivalentes.

$\Leftarrow$) Suponha agora que f e $g \circ h$ são $\mathcal{C}$-equivalentes, em que h é um germe de difeomorfismo (ou isomorfismo analítico) em $\mathbb{K}^n, 0$. Neste caso, existe $H \in C$ tal que $H(x, f(x)) = (x, (g \circ h)(x))$, em que $H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$. Então, defina $\bar{H}(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))$. Tomando $y = f(x)$ tem-se que

$$\bar{H}(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x)) = (h(x), (g \circ h)(x)).$$

Portanto, f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes. □

Proposição 3.5.4 Mostre que :

1. $\mathcal{C}$ é subgrupo de $\mathcal{K}$;

Demonstração. De fato, o difeomorfismo identidade $I_d \in H$ e ainda temos que dados $h_1, h_2 \in H$, tem-se que $h_1 \circ h_2^{-1} \in H$, pois a composição de difeomorfismo é ainda um difeomorfismo. □

2. $\mathcal{C}$-equivalência implica na $\mathcal{K}$-equivalência.

Demonstração. Com efeito, sejam f e g germes $\mathcal{C}$-equivalentes. Então, existe $H \in C$ com $H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$ tal que $H(x, f(x)) = (x, g(x))$. Assim, tome $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como sendo difeomorfismo identidade tem-se

$$H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x))) = (h(x), (g \circ h)(x)).$$

Portanto, f é $\mathcal{K}$-equivalente à g. □

3.6 Critérios Algébricos para $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$-equivalência

Lema 3.6.1 (Hadamard) Sejam $U \subset \mathbb{K}^n$ uma vizinhança da origem em $\mathbb{K}^n$ e $f : U \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}$ uma função diferenciável (ou analítica) que se anula em $0 \times \mathbb{K}^r$, i.e, $f(0, y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{K}^r$. Então, existem funções diferenciáveis (ou analíticas) $f_1, \ldots, f_n : U \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}$ tais que

$$f(x, y) = x_1 f_1(x, y) + \cdots + x_n f_n(x, y)$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Demonstração. Segue diretamente do teorema fundamental do cálculo e da regra da cadeia, pois por hipótese temos que $f(0, y) = 0, \forall y \in \mathbb{K}^r$ assim temos que

$$f(x, y) = f(x, y) - f(0, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(f(tx_1, \cdot\cdot, tx_n, y))dt = \int_0^1 (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y) \cdot x_i)dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y)dt] = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x, y),$$

em que $f_i(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y)dt$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Seja $f \in \varepsilon^0_{n,p}$ um germe cujas componentes são $f_1, f_2, \ldots, f_p \in \varepsilon_n$. Denotamos por I_f o ideal de ε_n gerado por $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Isto é,

$$I_f = f^*(m_p) = \langle f_1, \ldots, f_p \rangle_{\varepsilon_n}.$$

Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um germe dado por $f(x, y) = (x^2, xy)$, assim temos que $I_f = \langle x^2, xy \rangle$ é o ideal de ε_2. □

Teorema 3.6.2 (Critério para a $\mathcal{C}$-equivalência) Dados $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$, são equivalentes :

I) f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes ;

II) Os ideais I_f e I_g são iguais ;

III) Existe uma matriz invertível de ordem p com coordenadas $u_{ij} \in \varepsilon_n$ tais que

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij}(x) g_j(x),$$

onde $i = 1, \ldots, p$.

Demonstração. • I) $\Rightarrow$ II) Suponhamos que f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes. Então, $\exists H \in \mathcal{C}$ tal que

$$H(x, y) = (x, \varphi(x, y)),\ H(x, g(x)) = (x, f(x))$$

com $\varphi(x, 0) = 0$. Observe que, $\varphi(x, y) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ e $\varphi_i(x, 0) = 0$ para $i = 1, \ldots, p$. Assim, pelo lema de Hadamard, para cada $i = 1, \ldots, p$, podemos escrever

$$\varphi_i(x, y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \cdot \varphi_{ij}(x, y),$$

em que $\varphi_{ij} \in \varepsilon_{n+p}$. Logo,

$$f_i(x) = \varphi_i(x, g(x)) = \sum_{j=1}^{p} g_j(x) \cdot \varphi_{ij}(x, g(x)),$$

onde $g = (g_1, \ldots, g_p)$. Portanto,

$$f_i(x) \in I_g,\ \forall i = 1, \ldots, p,$$

e daí, $I_f \subset I_g$. Por simetria, claramente vale a inclusão $I_g \subset I_f$ e portanto vale a igualdade.

• II) $\Rightarrow$ III) Suponhamos que os ideais I_f e I_g são iguais. Então, podemos escrever

$$g_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot f_j, \quad f_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij} \cdot g_j,$$

em que $a_{ij}, b_{ij} \in \varepsilon_n$, para todo $i, j = 1, \ldots, p$.

Afirmação : Para cada x fixado, sejam A_x e B_x matrizes reais de ordem p com coordenadas $a_{ij}(x)$ e $b_{ij}(x)$, respectivamente. Então, existe uma matriz real C de ordem p tal que

$$U_0 = C(I - A_0 \cdot B_0) + B_0$$

é invertível. Logo, para x próximo da origem, a matriz $U_x = C(I - A_x \cdot B_x) + B_x$ é também invertível. Sejam $u_{ij} \in \varepsilon_n$ as coordenadas de U_x. Então,

$$U_x \cdot g = C(I - A_x \cdot B_x) \cdot g + B_x \cdot g = C(g - A_x \cdot B_x \cdot g) + f$$

$$= C(g - A_x \cdot f) + f = C(g - g) + f = f$$

e portanto

$$f_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} \cdot g_j.$$

• III) $\Rightarrow$ I) Neste caso, suponhamos que existe uma matriz invertível $[u_{ij}]$ de ordem p com coordenadas $u_{ij} \in \varepsilon_n$, tal que

$$f_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} \cdot g_j.$$

Defina $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^p, 0$ por $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, em que

$$\varphi_i(x, y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \cdot u_{ij}(x), \; i = 1, \ldots, p.$$

Claramente $\varphi(x, 0) = 0$.

Definimos o germe $H : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0 \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0$ por $H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$. Observe que

$$Jac(H) = \begin{bmatrix} I_n & * \\ 0 & Jac(\varphi_x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & * \\ 0 & [u_{ij}] \end{bmatrix}$$

Cujo determinante é não-nulo e portanto $H \in \varepsilon^0_{n,p}$ é um germe de difeomorfismo (ou isomorfismo analítico). Logo, $H \in \mathcal{C}$ e $H(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x))) = (x, f(x))$ pois $\varphi_i(x, g(x)) = f_i(x)$, implicando em $\varphi(x, g(x)) = f(x)$. Portanto, f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes. □

Exemplo 3.6.3 Os germes $f, g : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$, definidos por $f(x) = (x^2, 0)$ e $g(x) = (x^2, x^3)$ são $\mathcal{C}$-equivalentes pois

$$I_f = \langle x^2 \rangle = \langle x^2, x^3 \rangle = I_g.$$

Definição 3.6.4 Sejam I e J ideais de ε_n. Diremos que I e J são isomorfos induzidos quando existir um germe invertível $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que $h^*(I) = J$.

Corolário 3.6.5 (Critério para a $\mathcal{K}$-equivalência) Dados $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$, são equivalentes :

I) f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes ;

II) Os ideais I_f e I_g são isomorfos induzidos, i.e, $h^*(I) = J$;

III) Existe uma matriz invertível de ordem p com coordenadas $u_{ij} \in \varepsilon_n$ tais que

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij}(x)(g_j \circ h)(x),$$

onde $i = 1, \ldots, p$ para algum $h \in D_n$.

Demonstração. • Inicialmente provemos que I) $\Leftrightarrow$ II). De fato,

$$f \sim_{\mathcal{K}} g \Leftrightarrow \exists h \in D_n \mid f \sim_{\mathcal{C}} (g \circ h) \Leftrightarrow I_f = I_(g \circ h) \Leftrightarrow \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle g_1 \circ h, \dots, g_p \circ h \rangle$$

Afirmação : $h^*(I_g) = I_(g \circ h)$. De fato,

1. $h^*(\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot g_i) = (\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot g_i) \circ h = \sum_{i=1}^{p} (a_i \circ h) \cdot (g_i \circ h) \in I_(g \circ h)$.
2. $\sum_{i=1}^{p} b_i (g_i \circ h) = \sum_{i=1}^{p} (b_i \circ h^{-1}) \cdot (g_i \circ h) = h^*(\sum_{i=1}^{p} (b_i \circ h^{-1}) \cdot g_i) \in h^*(I_g)$.

Logo,

$$h^*(I_g) = I_(g \circ h),$$

como queríamos demonstrar. Desta forma,

$$f \sim_{\mathcal{K}} g \Leftrightarrow h^*(I_g) = I_(g \circ h) = I_f.$$

• A demonstração de II) $\Leftrightarrow$ III) segue da afirmação acima juntamente com o teorema anterior. □

Como consequência, demonstraremos algumas implicações das relações de equivalências relativas aos grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$. Primeiro, denotamos por $\mathcal{R}f$, $\mathcal{L}f$, $\mathcal{A}f$, $\mathcal{C}f$ e $\mathcal{K}f$ as órbitas da aplicação f. Escreveremos

$$\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{A}$$

para expressarmos que $f \sim_{\mathcal{R}} g \Longrightarrow f \sim_{\mathcal{A}} g$ (i.e, $\mathcal{R}f \subset \mathcal{A}f$). Similarmente para $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$.

Corolário 3.6.6

i. $\mathcal{R}, \mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{A}$;

ii. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{K}$;

iii. $\mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{K}$.

Demonstração. i) Sejam f, g germes $\mathcal{R}$-equivalentes. Então, existe $h^{-1} \in D_n$ tal que $(f \circ h^{-1})(x) = g(x)$, assim tome $k = I_d : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^p$ como sendo a identidade. Logo, existe $(h, k) \in D_n \times D_p$ tal que

$$(k \circ f \circ h^{-1})(x) = k(f(h^{-1}(x))),$$

chame $y = f(h^{-1}(x))$, tem-se que

$$(k \circ f \circ h^{-1})(x) = k(y) = y = f(h^{-1}(x)) = (f \circ h^{-1})(x) = g(x).$$

Portanto, temos que f e g são germes $\mathcal{A}$-equivalentes.

Agora observe que se f e g são germes $\mathcal{L}$-equivalentes. Então, existe $k \in D_p$ tal que $(k \circ f)(x) = g(x)$, assim tome $h = I_d : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ como sendo a identidade. Logo, existe $(h, k) \in D_n \times D_p$ tal que

$$(k \circ f \circ h^{-1})(x) = (k \circ f)(h^{-1}(x)) = (k \circ f)(x) = g(x).$$

Portanto, temos que f e g são germes $\mathcal{A}$-equivalentes.

$ii)$ Provaremos agora que $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{K}$.

De fato, dado um germe $f \in \varepsilon^0_{n,p}$, associamos o ideal $I_f \subset \varepsilon_n$ gerado pelas componentes de f, e observamos que

$$f^*(m_p) = \langle f^*(y_1), \ldots, f^*(y_p) \rangle = \langle y_1 \circ f, \ldots, y_p \circ f \rangle = \langle f_1, \ldots, f_p \rangle = I_f.$$

Suponhamos que temos f e g são germes $\mathcal{A}$-equivalentes com $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$. Então, existem $h \in D_n$ e $k \in D_p$ tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. Portanto,

$$I_g = g^*(m_p) = (k \circ f \circ h^{-1})^*(m_p) = (h^*)^{-1} \circ f^* \circ k^*(m_p) = (h^*)^{-1} \circ f^* \circ m_p =$$

$$= (h^*)^{-1} \circ f^*(m_p) = (h^*)^{-1} \circ I_f$$

e assim,

$$h^*(I_g) = h^*[(h^*)^{-1} \circ I_f] \;\Rightarrow\; h^*(I_g) = I_f.$$

Logo, os ideais I_f e I_g são isomorfos induzidos. Portanto, pelo **Corolário 3.6.5** tem-se, f e g são germes $\mathcal{K}$-equivalentes.

$iii)$ Já foi feita. $\square$

Capítulo 4

Singularidades de germes quase-homogêneos

Considere agora $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios nas indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A cada indeterminada x_i associamos um numero inteiro positivo w_i, chamado peso de x_i.

4.1 Polinômios quase homogêneos

Definição 4.1.1 Um polinômio

$$f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

é dito homogêneo de grau d se todos os monômios têm grau d, isto é, se

$$a_1 + \cdots + a_n = d,$$

$\forall a \in I$, com $\alpha_a \neq 0$.

Exemplo 4.1.2 $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^3$ é homogêneo de grau 3.

Definição 4.1.3 Um polinômio

$$f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

é dito quase homogêneo de grau d com relação a $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, com $w_i \in \mathbb{Z}$ não negativos, se

$$w \cdot a := w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = d, \ \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in I.$$

Observação 4.1.4 Os números inteiros $w_1, \ldots, w_n$ são chamados de pesos e o número d é chamado de grau pesado de f.

Exemplo 4.1.5 O polinômio

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^4y + y^3 + xyz^3 + z^6$$

é quase homogêneo com pesos $w = (1, 2, 1)$ e grau pesado $d = 6$.

Observação 4.1.6 Muitas vezes usamos a notação $d = deg_w(f)$ e outra vezes omitimos w. Um polinômio quase homogêneo como na observação anterior é chamado de polinômio quase homogêneo do tipo $(w_1, \ldots, w_n; d)$ ou do tipo $(w; d)$.

Proposição 4.1.7 Fixado o peso $w = (w_1, \ldots, w_n)$, seja $S_d = \{$ polinômios quase homogêneo de grau d com relaçao as pesos $w_1, \ldots, w_n\} \bigcup \{0\}$. Prove que S_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensão finita.

Observação 4.1.8 Sejam $f(x)$ um polinômio quase homogêneo do tipo $(w; d)$ e $w' = \mathsf{MDC}\{w_1, \ldots, w_n\}$. Então, $f(x)$ é quase homogêneo do tipo $(\frac{w_1}{w'}, \ldots, \frac{w_n}{w'}; \frac{d}{w'})$ pois

$$a_1w_1 + \cdots + a_nw_n = d \Leftrightarrow a_1\frac{w_1}{w'} + \cdots + a_n\frac{w_n}{w'} = \frac{d}{w'}.$$

Como consequência, podemos sempre assumir que os pesos $w_1, \ldots, w_n$ são primos entre si. Observe também que todo polinômio homogêneo é quase homogêneo com pesos $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 1$.

Fixados pesos $w = (w_1, \ldots, w_n)$, associamos a ação do grupo multiplicativo $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ em $\mathbb{K}^n$ dada por :

$$\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

$$(t, x) \to (t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n).$$

Exercício 4.1.9 Prove que a aplicação anterior é uma ação de grupo ?

Solução : De fato, sejam $1, a, b \in \mathbb{K}^*$ e $x \in \mathbb{K}^n$

1) $\varphi(1, x) = (1^{w_1} \cdot x_1, \ldots, 1^{w_n} \cdot x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = x.$

2) $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \varphi(a, (b^{w_1} \cdot x_1, \ldots, b^{w_n} \cdot x_n)) = \varphi(a, (y_1, \ldots, y_n)) = \varphi(a, y) = (a^{w_1} \cdot y_1, \ldots, a^{w_n} \cdot y_n) = (a^{w_1} \cdot b^{w_1} \cdot x_1, \ldots, a^{w_n} \cdot b^{w_n} \cdot x_n) = \varphi(a \cdot b, x).$

Onde temos que para cada $y_i = b^{w_i} \cdot x_i, \; \forall i = 1, \ldots, n$.

Proposição 4.1.10 Um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é quase homogêneo do tipo $(w; d)$ se, e somente se, $f(tx) = f(t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n) = t^d f(x)$, em que $tx = (t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n)$.

Demonstração. Suponhamos que f é quase homogêneo do tipo (w, d) então

$$a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_n \cdot w_n = d, \; \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in I.$$

Logo,

$$f(t \cdot x) = f(t^{w_1} \cdot x_1, \ldots, t^{w_n} \cdot x_n) = \sum \alpha_a (t^{w_1} \cdot x_1)^{a_1} \cdots (t^{w_n} \cdot x_n)^{a_n} =$$

$$= \sum \alpha_a \cdot t^{a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_n \cdot w_n} \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = t^d \sum \alpha_a \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = t^d \cdot f(x).$$

Reciprocamente, se $f(t \cdot x) = t^d \cdot f(x)$, temos que

$$\sum \alpha_a (t^{w_1} \cdot x_1)^{a_1} \cdots (t^{w_n} \cdot x_n)^{a_n} = t^d \sum \alpha_a \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

Portanto,

$$\sum \alpha_a \cdot t^{a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_n \cdot w_n} \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = t^d \sum \alpha_a \cdot x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}.$$

Assim, $t^{a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_n \cdot w_n} = t^d, \; \forall t$. Logo, $w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = d, \; \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in I \cdot$. Desta forma, f é quase homogêneo do tipo (w, d). $\square$

Proposição 4.1.11 Seja $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio quase homogêneo do tipo $(w; d)$. Então o germe $f(x) \in \mathfrak{m}_n \cdot J_f$, onde J_f é definido como sendo $J_f := \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$, chamado de ideal jacobiano de f.

Demonstração. Inicialmente provaremos que é válida a fórmula de Euler (ou relação de euler)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(x) = d \cdot f(x).$$

De fato, como $f(t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n) = t^d \cdot f(x)$, obtemos derivando com relação à t,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n) \cdot w_i \cdot t^{w_i - 1} \cdot x_i = d \cdot t^{d-1} \cdot f(x),$$

e fazendo $t = 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d \cdot f(x).$$

Logo $f(x) \in \mathfrak{m}_n \cdot J_f$. $\square$

Na próxima seção desse capitulo enuciaremos um dos resultados, que apriore não cabe a nós a demonstração pois veremos no capitulo que esse resultado serviu de inspiração para o nosso principal resultado que será provado no próximo capítulo. A idéia de falar desse teorema que foi provado por M. Takahashi [7] é dar ao leitor a capacidade de entender e compreender o que motivou o estudo desse trabalho.

4.2 Teorema de Takahashi

Vimos que se dois germes de funções são $\mathcal{R}$-equivalentes então eles são $\mathcal{K}$-equivalentes. Além disso, o teorema de Saito [6] garante que, quando um dos germes é quase homogêneo e finitamente determinado, a recíproca é verdadeira. Nesta seção enuciaremos um teorema recente de M.Takahashi [7] no qual a condição de determinação finita não é necessária. Mais precisamente :

Teorema 4.3.1 Se $\mathsf{f}, \mathsf{g} : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, são germes de funções $\mathcal{K}$-equivalentes e um deles é quase homogêneo então, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ estes são $\mathcal{R}$-equivalentes módulo $\pm$, e se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ estes são $\mathcal{R}$-equivalentes.

Demonstração : Ver [7]

Capítulo 5

C^ℓ-$\mathcal{R}$ e C^ℓ-$\mathcal{K}$ equivalências de germes de funções de classe C^ℓ semi quase homogêneas

Neste capítulo investigaremos a versão C^ℓ da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ equivalências de germes de funções reais semi quase homogêneas de classe C^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. Mostraremos também que a C^l-$\mathcal{R}$-equivalência implica na C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência, e sob certas condições, que para germes de funções semi quase homogêneos de classe C^ℓ a recíproca é verdadeira (**teorema principal 5.3.1**). Observe que apartir de agora estamos considerando germes de funções semi quase homogêneos sem hipótese de singularidade isolada na origem.

5.1 As equivalências C^ℓ-$\mathcal{R}$ e C^ℓ-$\mathcal{K}$

Definição 5.1.1 Para todo ℓ com, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$, diremos que os germes de funções de classe C^ℓ $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ são :

i) C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes se existir um germe de C^ℓ-difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g = f \circ h$.

ii) C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalentes se existir um germe de C^ℓ-difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de função de classe C^ℓ não nulo $M : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$, $M(0) \neq 0$, tal que $g = M \cdot (f \circ h)$.

Observação 5.1.2 Quando $\ell = \infty$ escreveremos simplesmente $\mathcal{R}$ ao invés de C^∞-$\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ no lugar de C^∞-$\mathcal{K}$, respectivamente.

Proposição 5.1.3 Mostre que a C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência implica na C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência.

Demonstração. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dois germes de aplicações, C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes. Então, existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, de classe C^ℓ, tal que $f(x) = g \circ h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Defina $H : (\mathbb{R}^{n+p}, 0) \to (\mathbb{R}^{n+p}, 0)$, da seguinte maneira, $H(x, y) = (h(x), y)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$.

i) Claramente, H é um germe de difeomorfismo de classe C^ℓ;

ii) $H(x, 0) = (h(x), 0) \Rightarrow H(\mathbb{R}^n \times \{0\}_p) = \mathbb{R}^n \times \{0\}_p$, onde $\{0\}_p = (0, 0, \ldots, 0)_p$;

iii) $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, f e g são C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalentes.

□

Como vimos, os teoremas de Saito e Takahashi dão condições sobre o qual se tem a recíproca. Mas a recíproca do exercício anterior não é verdadeira em geral. Veja o exemplo abaixo :

Exemplo 5.1.4 Se $\ell = \infty$, os germes $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ são $\mathcal{K}$-equivalentes mas não são $\mathcal{R}$-equivalentes.

De fato, veja que $I_f = I_g$, assim pelo critério para $\mathcal{C}$-equivalência temos que

$$f \sim_{\mathcal{C}} g \Longrightarrow f \sim_{\mathcal{K}} g,$$

pois $\mathcal{C} \Longrightarrow \mathcal{K}$. Mas por outro lado, não são $\mathcal{R}$-equivalentes. Com efeito, suponha por absurdo que são, assim $\exists h \in D_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$, assim temos que

$$-x^2 = g(x) = (f \circ h^{-1})(x) = f(h^{-1}(x)) = (h^{-1}(x))^2$$

Absurdo ! Logo, a recíproca não é verdadeira.

Portanto, nos parece importante exclarecer a relação entre C^ℓ-$\mathcal{R}$ e C^ℓ-$\mathcal{K}$ equivalências. Como vimos no capítulo anterior, este problema foi estudado por alguns autores no caso em que $\ell = \infty$ e os germes de funções são quase homogêneos (K. Saito [6] e M. Takahashi [7]). Entretanto, existem poucos trabalhos investigando as versões C^ℓ destas relações de equivalências para funções de classe C^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. Kuiper em [9] estudou a C^1-$\mathcal{R}$-equivalência de funções em uma vizinhança de um ponto crítico isolado. Bromberg e Medrano em [8] trataram da C^ℓ-$\mathcal{R}$-suficiência de funções quase homogêneas. Em [5], Ruas e Saia deram estimativas para o grau de C^ℓ-$\mathcal{R}$ e C^ℓ-$\mathcal{K}$ determinação de germes de aplicações quase homogêneas de classe C^∞.

Notações :

1. Dado qualquer ℓ com $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$ denotamos por $\varepsilon_n^{[\ell]}$ o conjunto de todos os germes de funções de classe C^ℓ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$.
2. Denote por $\mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ o conjunto de todos os germes $f \in \varepsilon_n^{[\ell]}$ tal que $f(0) = 0$.
3. Dado um germe $f \in \varepsilon_n^{[\ell]}$, J_f denota o ideal Jacobiano de f, i.e, $J_f := \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$.

Observação 5.1.5 A C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência entre dois germes de funções f e g de classe C^ℓ é denotada por $f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} g$, e a C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência destes será denotada por $f \overset{C^\ell-\mathcal{K}}{\sim} g$.

Definição 5.1.6 Um germe de função de classe C^ℓ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ é dito quase homogêneo do tipo $(r_1, r_2, \ldots, r_n; d)$ se este satisfaz a equação

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda^d \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$$

para todo $\lambda > 0$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, em que $\lambda \cdot x = (\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n)$. Fixados pesos $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, para cada monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, denotamos $\mathrm{fil}(x^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$. Uma filtração em $\varepsilon_n^{[\ell]}$ é definida pela função

$$\mathrm{fil}(f) = \min\{\mathrm{fil}(x^\alpha) \mid \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) \neq 0\}$$

para cada $f \in \varepsilon_n^{[\ell]}$.

Definição 5.1.7 Um germe de função de classe C^ℓ, $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ é chamado de semi quase homogêneo do tipo $(r_1, r_2, \ldots, r_n; d)$ se $f = q + \phi$ em que $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um germe de função quase homogênea de classe C^ℓ do tipo $(r_1, r_2, \ldots, r_n; d)$ e ϕ é um germe de função de classe C^ℓ, com $\mathrm{fil}(\phi) > \mathrm{fil}(f)$.

Observação 5.1.8 Um germe quase homogêneo é também semi quase homogêneo, pois a filtração do polinômio nulo é infinita. Observe ainda que não estamos considerando nenhuma condição de determinação finita para os germes f e q dados na definição anterior.

Exemplo 5.1.9 O germe $f(x,y) = x^6 - y^{12} + \frac{x^{10}}{x^4+y^8}$ é quase homogêneo do tipo $(2,1;12)$.

Exemplo 5.1.10 O germe $f(x,y) = \frac{x^{10}}{x^4+y^8} \cdot \frac{x^{10}}{x^4+y^8}$ é quase homogêneo do tipo $(2,1;24)$.

Exemplo 5.1.11 Seja $f(x,y) = \frac{x^{10}}{x^4+y^8} + (\frac{x^{12}}{x^4+y^8} + x^{14} + x^{10}y^8)$. Este germe é semi quase homogêneo do tipo $(2,1;12)$. De fato, podemos escrever $f = q + \phi$ onde $q(x,y) = \frac{x^{10}}{x^4+y^8}$, $\phi(x,y) = \frac{x^{12}}{x^4+y^8} + x^{14} + x^{10}y^8$ e note ainda que $\mathrm{fil}(\phi) = \mathrm{fil}(\frac{x^{12}}{x^4+y^8} + x^{14} + x^{10}y^8) = 16$ por causa dos pesos fixados $(2,1)$, $\mathrm{fil}(x^{14} + x^{10}y^8) = 28$, ou seja, $\mathrm{fil}(\phi) > \mathrm{fil}(f)$.

Observação 5.1.12 Seja $f(x_1,\dots,x_n)$ um germe quase homogêneo do tipo $(w_1,\dots,w_n;d)$. Então, existe uma permutação $\alpha : I_n \to I_n$ tal que

$$w_{\alpha(1)} \leqslant w_{\alpha(2)} \leqslant \cdots \leqslant w_{\alpha(n)}.$$

Assim, tem-se que $q(x_1,\dots,x_n) = f(x_{\alpha(1)},\dots,x_{\alpha(n)})$ é quase homogêneo e os pesos são $w_{\alpha(1)} \leqslant w_{\alpha(2)} \leqslant \cdots \leqslant w_{\alpha(n)}$ e grau pesado d.

5.2 Lemas

Lema 5.2.1 Seja f um germe de função quase homogêneo. Então, para qualquer constante real não-nula $c \neq 0$ tem-se que cf e f são $\mathcal{R}$-equivalentes módulo sinal.

Demonstração. Seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ definida por

$$F_t = F(x,t) = t \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \neq 0.$$

Logo, $\frac{\partial F}{\partial t} = f(x) \in \mathfrak{m}_n \cdot Jf$, pois f é quase homogêneo.

$$\begin{aligned} J_xF = \langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle &= \langle t \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, t \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle = Jf \\ &\Longrightarrow \mathfrak{m}_n \cdot JF = \mathfrak{m}_n \cdot f \\ &\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = f(x) \in \mathfrak{m}_n \cdot Jf = \mathfrak{m}_n \cdot JF. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema (Thom-Levine, ver [10])

$$F_t \sim_{\mathcal{R}_\pm} f \Longrightarrow F_c \sim_{\mathcal{R}_\pm} f \Longrightarrow c \cdot f \sim_{\mathcal{R}_\pm} f$$

□

Lema 5.2.2 Suponha que $f = q + \phi$ é um germe de função de classe C^l semi quase homogêneo tal que as seguintes condições são satisfeitas :

1. Para todo $i = 1, \dots, n$, existem germes de funções de classe C^ℓ, $b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ tais que
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x).$$
2. O germe ϕ pode ser escrito como
$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x),$$

com $a_j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$, para todo $j = 1, \dots, n$. Então, para qualquer constante não nula $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f \overset{C^\ell - \mathcal{R}_\pm}{\sim} f$.

Demonstração. Considere a família $F_t = q + t \cdot \phi$, onde q e ϕ satisfazem as condições 1 e 2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que os pesos satisfazem $r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ (ver observação 5.1.12). Então, fazendo $t = 0$ e $t = 1$, tem-se $F_0 = q$ e $F_1 = q + \phi = f$ e ainda note que $\frac{\partial F_t}{\partial t} = \phi$. Usando a extratégia dada por Takahashi, mostraremos que existe um campo
$$\xi : (\mathbb{R}^n \times [0, 1], 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$$

satisfazendo a seguinte equação :
$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, t) \cdot \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(x, t) \right] + \frac{\partial F_t}{\partial t}(x, t) = 0 \qquad (1)$$
$$\xi_i(0, t) = 0, \ \forall \ i = 1, \dots, n.$$

Isto é equivalente a
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, t) \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + t \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \right] + \phi(x) = 0 \qquad (2)$$

Por hipótese q e ϕ satisfazem as condições 1 e 2, assim podemos reescrever a equação (2) como :
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, t) \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + t \cdot \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) \right] + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) = 0, \qquad (3)$$

onde $a_j, b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[l]}$, $\forall\, i,j = 1,2,\dots,n$. Agora reescrevendo a equação (3), tem-se

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i(x,t)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + t\cdot\xi_i(x,t)\cdot\sum_{j=1}^{n} b_i^j(x)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_j}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,t)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + t\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^i(x)\cdot\xi_k(x,t)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,t) + t\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^i(x)\cdot\xi_k(x,t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right)\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = 0$$

Note que o coeficiente de $\frac{\partial q}{\partial x_i}(x)$ é igual a

$$\begin{aligned} t\cdot(b_1^i\xi_1 + b_2^i\xi_2) + \xi_i + a_i &= t\cdot(b_1^1\xi_1 + b_2^1\xi_2) + \xi_1 + a_1 \\ &\quad + t\cdot(b_1^2\xi_1 + b_2^2\xi_2) + \xi_2 + a_2 \end{aligned}$$

Observe que o índice i variou de 1 à 2 para cada valor de $k = 1,2$. Portanto, fazendo i variar de 1 à n para cada valor de $k = 1,2,\dots,n$ tem-se

$$t\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^i(x)\cdot\xi_k(x,t) + \xi_i + a_i,\ \forall\, i = 1,\dots,n.$$

Se ξ satisfaz as seguintes condições

$$\begin{gathered} t\cdot(b_1^1\xi_1 + b_2^1\xi_2 + \cdots + b_n^1\xi_n) + \xi_1 + a_1 = 0 \\ t\cdot(b_1^2\xi_1 + b_2^2\xi_2 + \cdots + b_n^2\xi_n) + \xi_2 + a_2 = 0 \\ \vdots \\ t\cdot(b_1^n\xi_1 + b_2^n\xi_2 + \cdots + b_n^n\xi_n) + \xi_n + a_n = 0 \end{gathered}$$

Note que para o caso $n = 2$, temos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} (1+tb_1^1) & tb_2^1 \\ tb_1^2 & (1+tb_2^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_1\\ -a_2\end{pmatrix}$$

Caso Geral :

$$A(x,t)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_1\\ -a_2\\ \vdots\\ -a_n\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

onde a matriz $A(x,t)$ é dada por

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} (1+tb_1^1) & tb_2^1 & \cdots & tb_n^1 \\ tb_1^2 & (1+tb_2^2) & \cdots & tb_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tb_1^n & tb_2^n & \cdots & (1+tb_n^n) \end{pmatrix}$$

Então, existe um campo de vetores ξ tal que (1) ocorre. De fato, note que $a_j(0) = 0$ e $b_i^j(0) = 0$, $\forall\ i,j = 1,\dots,n$, pois $a_j, b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$, $\forall\ i,j = 1,\dots,n$, assim temos que $\det[A(0,t)] \neq 0$. Logo, podemos resolver (4) em relação à ξ_i cuja a solução é

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A^{-1}(x,t) \cdot \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix},$$

e observe ainda que da equação (3), fazendo $x = 0$, tem-se $\xi_i(0,t) = 0$, $\forall\ i = 1,\dots,n$. Portanto, a família F_t é C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivial, i.e, f é C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalente à q. Como consequência tem-se, $c \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} c \cdot q$, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Por outro lado, q é quase homogêneo segue-se do (Lema 5.2.1) que $c \cdot q \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} q$ para alguma constante não nula $c \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} & f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} q \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} c \cdot q \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} c \cdot f \\ & \Longrightarrow c \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}\pm}{\sim} f \end{aligned}$$

□

Observe que no caso particular em que f é um germe de função de classe C^ℓ quase homogêneo, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$, o lema 5.2.2 é uma consequência da relação de Euler e portanto é desnecessário.

Lema 5.2.3 Suponha que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ é um germe de função semi quase homogêneo de classe C^ℓ, isto é, $f = q + \phi$ tal que as seguintes condições são satisfeitas :

1. Para todo $i = 1,\dots,n$, existem germes de funções de classe C^ℓ, $b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ tais que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x).$$

2. O germe ϕ pode ser escrito como

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x),$$

com $a_j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$, para todo $j = 1, \dots, n$ e seja $M : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ um germe de função de classe C^ℓ com $M(0) \neq 0$. Então, $M \cdot f$ e $M(0) \cdot f$ são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes.

Demonstração. (1ª Parte)

Como f é um germe semi quase homogêneo tem-se que $f = q + \phi$, onde $q(x_1, \dots, x_n)$ é um germe de função de classe C^ℓ quase homogêneo do tipo $(r_1, \dots, r_n; d)$, com $r_1 \leqslant \dots \leqslant r_n$ (ver observação 5.1.12) e ϕ um germe de função C^ℓ com $\mathtt{fil}(\phi) > \mathtt{fil}(f)$. Então, dado $\lambda > 0$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$f(\lambda^{r_1}x_1, \dots, \lambda^{r_n}x_n) = \lambda^d \cdot q(x_1, \dots, x_n) + \phi(\lambda^{r_1}x_1, \dots, \lambda^{r_n}x_n) \qquad (1)$$

Por outro lado, existem $b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)$$

Como $f = q + \phi$ (omitindo as variáveis) segue-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial q}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j} \qquad (2)$$

Por hipótese q é quase homogêneo, assim temos que pela (Relação de Euler)

$$q \in \mathfrak{m}_n \cdot J_q \Longrightarrow q = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{d} x_i \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i} \qquad (3)$$

(2ª Parte) Agora para provar que $M \cdot f$ e $M(0) \cdot f$ são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes, usaremos a idéia do lema anterior, ou seja, considere a família $F_t(x) = F(x, t)$ de tal forma que $F_0 = M(0) \cdot f$ e $F_1 = M \cdot f$, onde F_t é definida como sendo

$$\begin{aligned} F_t :& (\mathbb{R}^n \times [0, 1], 0) \to (\mathbb{R}, 0) \\ & (x, t) \to F_t(x) = F(x, t) = M(tx) \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Assim, mostraremos que existe um campo $\xi : (\mathbb{R}^n \times [0, 1], 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ satisfazendo a equação :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, t) \cdot \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(x, t) \right] + \frac{\partial F_t}{\partial t}(x, t) = 0 \qquad (4)$$
$$\xi_i(0, t) = 0, \ \forall \ i = 1, \dots, n.$$

Isto é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot tf(x) + M(tx) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot tf(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x,t) \cdot t + x_i] \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x,t) \cdot t + x_i] \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot (q(x) + \phi(x)) = 0$$

Agora observe que por hipótese ϕ pode ser escrito como

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x),$$

onde $a_j \in \mathfrak{m}_n^{[l]}$, $j = 1, \ldots, n$. Assim temos que,

$$q(x) + \phi(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x,t) \cdot t + x_i] \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot \left(q(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right) = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Usando as equações (2) e (3) em (5) obtemos :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \left[\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x,t) \cdot t + x_i] \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j}{d} x_j + a_j\right) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right] = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\xi_i(x,t) \cdot M(tx) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) + \xi_i \cdot M(tx) \cdot \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x,t) \cdot t + x_i] \cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx) \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j}{d} x_j + a_j\right) \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Reordenando a expressão (6),tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \xi_k(x,t) \cdot M(tx) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x,t) \cdot M(tx) \cdot b_j^k(x) \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[(\xi_i(x,t)\cdot t + x_i)\cdot \frac{\partial M}{\partial x_i}(tx)\cdot\left(\frac{r_k}{d}x_k + a_k\right)\right]\Bigg\}\cdot\frac{\partial q}{\partial x_k}(x) = 0$$

Note que o coeficiente de $\frac{\partial q}{\partial x_k}$ pode ser escrito como :

$\bullet(k=1)$

$$\xi_1\cdot M + \sum_{j=1}^{2}\xi_j M\cdot b_j^1 + \sum_{i=1}^{2} t\xi_i\cdot\frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right) + \sum_{i=1}^{2} x_i\cdot\frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right)$$
$$= \xi_1\cdot M + \left(\xi_1 M\cdot b_1^1 + \xi_2 M\cdot b_2^1\right) + \left(t\xi_1\cdot\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right) + t\xi_1\cdot\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right)\right)$$
$$+\left(x_1\cdot\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right) + x_2\cdot\frac{\partial M}{\partial x_2}\left(\frac{r_1}{d}x_1 + a_1\right)\right)$$

$\bullet(k=2)$

$$\xi_2\cdot M + \sum_{j=1}^{2}\xi_j M\cdot b_j^2 + \sum_{i=1}^{2} t\xi_i\cdot\frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right) + \sum_{i=1}^{2} x_i\cdot\frac{\partial M}{\partial x_i}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right)$$
$$= \xi_2\cdot M + \left(\xi_1 M\cdot b_1^2 + \xi_2 M\cdot b_2^2\right) + \left(t\xi_1\cdot\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right) + t\xi_2\cdot\frac{\partial M}{\partial x_2}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right)\right)$$
$$+\left(x_1\cdot\frac{\partial M}{\partial x_1}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right) + x_2\cdot\frac{\partial M}{\partial x_2}\left(\frac{r_2}{d}x_2 + a_2\right)\right)$$

Em outras palavras temos o seguinte sistema :

$$\begin{pmatrix} M(1+b_1^1) + t\frac{\partial M}{\partial x_1}\Delta_1 & Mb_2^1 + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_1 \\ Mb_1^2 + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_2 & M(1+b_2^2) + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{2} x_i\frac{\partial M}{\partial x_i}\cdot\Delta_1 \\ -\sum_{i=1}^{2} x_i\frac{\partial M}{\partial x_i}\cdot\Delta_2\end{pmatrix}$$

Observe que os índices i, j variam de 1 à 2 para cada valor de $k = 1, 2$. Portanto, se ξ satisfaz as seguintes condições

$$\bar{A}(x,t)\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

onde a matriz $\bar{A}(x,t)$ é dada por

$$\bar{A}(x,t) = \begin{pmatrix} M(1+b_1^1) + t\frac{\partial M}{\partial x_1}\Delta_1 & Mb_2^1 + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_1 & \cdots & Mb_n^1 + t\frac{\partial M}{\partial x_n}\Delta_1 \\ Mb_1^2 + t\frac{\partial M}{\partial x_1}\Delta_2 & M(1+b_2^2) + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_2 & \cdots & Mb_n^2 + t\frac{\partial M}{\partial x_n}\Delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Mb_1^n + t\frac{\partial M}{\partial x_1}\Delta_n & Mb_2^n + t\frac{\partial M}{\partial x_2}\Delta_n & \cdots & M(1+b_n^n) + t\frac{\partial M}{\partial x_n}\Delta_n \end{pmatrix}$$

Onde $\Delta_i = \left(\frac{r_i}{d}x_i + a_i(x)\right)$ e $B_k = -\sum_{i\neq k}^{n} x_i\cdot\frac{\partial M}{\partial x_i}(tx)\left(\frac{r_k}{d} + a_k(x)\right),\ k = 1,\ldots,n.$

Note que o $\det[\bar{A}(0,t)] = M(0)^n \neq 0$, pois uma vez que $a_j, b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ e $M(0) \neq 0$. Assim podemos resolver (7) em relação à ξ_i, cuja a solução é

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \bar{A}^{-1}(x,t) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

e observe ainda que da equação (6) fazendo $x = 0$, tem-se $\xi_i(0,t) = 0$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$. Portanto, a família F_t é C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivial, i.e,

$$F_0 \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} F_1 \Longrightarrow M(0) \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} M \cdot f$$

□

Observação 5.2.4 No caso particular em que f é um germe de função de classe C^ℓ quase homogêneo, $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$, a prova do lema 5.2.3 é essencialmente a mesma dada por Takahashi [7]. De fato, é necessário apenas substituir a $\mathcal{R}$-equivalência pela C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalência e a $\mathcal{K}$-equivalência pela C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalência e $a_j \in \mathfrak{m}_n$ por $a_j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ na prova dada por Takahashi.

5.3 Teorema principal

O principal resultado desta seção é o seguinte :

Teorema de (Costa-Saia-Soares) 5.3.1 Sejam $f, g \in \varepsilon_n^{[\ell]}$ germes C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalentes. Suponha que $f = q + \phi$ é um germe semi quase homogêneo tal que as seguintes condições são satisfeitas :

1. Para todo $i = 1, \ldots, n$, existem germes de funções de classe C^ℓ, $b_i^j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$ tais que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} b_i^j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x).$$

2. O germe ϕ pode ser escrito como

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial q}{\partial x_j}(x)$$

com $a_j \in \mathfrak{m}_n^{[\ell]}$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Sob estas condições, f é C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalente à g ou C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalente à $-g$.

Demonstração. Antes de seguirmos com a prova faremos algumas observações :

Observação 1 : Por hipótese $f \overset{C^\ell-\mathcal{K}}{\sim} g$, i.e, existe um germe de C^ℓ-difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e um germe de função não nulo $M : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$, $M(0) \neq 0$ tal que $g = M \cdot (f \circ h)$.

Observação 2 : Pelo lema 5.2.2, temos que para qualquer constante não nula $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} f$.

Observação 3 : Para qualquer difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ de classe C^ℓ temos que $c \cdot f$ e $c \cdot (f \circ h)$ são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes.

Observação 4 : Pelo lema 5.2.3, temos que $M \cdot f$ e $M(0) \cdot f$ são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes.

Agora concluimos a prova do (Teorema Principal). Como f é semi quase homogêneo, segue-se da observação 2 que para qualquer constante não nula $c = M(0) \neq 0$, tem-se

$$f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} M(0) \cdot f.$$

Da observação 3, temos para $c = M(0) \neq 0$

$$M(0) \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} M(0) \cdot (f \circ h)$$

Finalmente pela observação 4, temos $M(0) \cdot (f \circ h) \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} M(0) \cdot (f \circ h)$. Portanto,

$$\begin{aligned} & f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} M(0) \cdot f \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} M(0) \cdot (f \circ h) \overset{C^\ell-\mathcal{R}}{\sim} M \cdot (f \circ h) \\ & \Longrightarrow f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} M \cdot (f \circ h) \\ & \Longrightarrow f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} g \end{aligned}$$

$\square$

Observação 5.3.2 Se considerarmos o caso particular em que f é um germe de função de classe C^ℓ quase homogêneo então temos :

Corolário 5.3.3 Seja $1 \leqslant \ell \leqslant \infty$. Seja $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ são germes de funções de classe C^ℓ as quais são C^ℓ-$\mathcal{K}$-equivalentes e uma destas é quase homogênea. Então, f é C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalente à g ou C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalente à $-g$.

Observação 5.3.4 Note que, se f é um germe de função de classe C^ℓ quase homogêneo. Então, as duas hipóteses do **Teorema Principal 5.3.1** são claramente satisfeitas. Também cobrimos o resultado de (M. Takahashi [7]) para o caso de germes de funções de classe C^∞:

Corolário 5.3.5 Se $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ são germes de funções de classe C^∞ as quais são $\mathcal{K}$-equivalentes e um deles é quase homogêneo. Então, f é $\mathcal{R}$-equivalente à g ou $\mathcal{R}$-equivalente à $-g$.

5.4 Exemplos

Exemplo 5.4.1 Considere $g(x, y) = q(x, y) = \frac{x^8}{x^4+y^8}$ o qual é um germe de função de classe C^3 quase homogêneo do tipo $(2, 1; 8)$. Note que a classe de C^ℓ-diferenciabilidade de f segue-se do lema 2 (vê apêndice). Seja $f(x, y) = \frac{x^8}{x^4+y^8} + (x^{10} + x^8y^2)$ o qual é semi quase homogêneo do tipo $(2, 1; 8)$ e de classe C^3, pois note que a classe de $x^{10} + x^8y^2$ é C^∞.

Como $f \overset{C^3-\mathcal{K}}{\sim} q$, assim tem-se que existem $h : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ e $M : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}$, com $M(0) \neq 0$ tal que $f = M \cdot (q \circ h)$, i.e, fazendo $h = Id$ temos que, $f = M \cdot q$, onde M é dado como sendo

$$M(x, y) = 1 + (x^2 + y^2) \cdot (x^4 + y^8) \;\Rightarrow\; M(0) \neq 0.$$

Resta mostrar que q e ϕ satisfazem as hipóteses do (Teorema Principal 5.3.1), ou seja, $J_\phi \subset \mathfrak{m}_2^{[\ell]} \cdot J_q$ e $\phi \subset \mathfrak{m}_2^{[\ell]} \cdot J_q$.

$$\begin{aligned}
J_\phi &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle 10x^9 + 8x^7y^2, \quad 2x^8y \right\rangle \\
J_q &= \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{4x^{11} + 8x^7y^8}{(x^4+y^8)^2}, \quad \frac{-8x^8y^7}{(x^4+y^8)^2} \right\rangle \\
& b_1^1 \cdot \frac{(4x^{11} + 8x^7y^8)}{(x^4+y^8)^2} + b_1^2 \cdot \frac{(-8x^8y^7)}{(x^4+y^8)^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
& \Longrightarrow \quad b_1^1 = \frac{(5x^2+4y^2)((x^4+y^8)^2)}{2x^4+4y^8} \Longrightarrow \quad b_1^1(0) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad b_1^2 = 0 \Longrightarrow \quad b_1^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& b_2^1 \cdot \frac{(4x^{11} + 8x^7y^8)}{(x^4+y^8)^2} + b_2^2 \cdot \frac{(-8x^8y^7)}{(x^4+y^8)^2} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
& \Longrightarrow \quad b_2^1 = \frac{(xy)(x^4+y^8)^2}{2x^4+4y^8} \Longrightarrow \quad b_2^1(0) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad b_2^2 = 0 \Longrightarrow \quad b_2^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Portanto, existem $b_i^j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$, com $i, j = 1, 2$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = x^{10} + x^8y^2 &= a_1 \cdot \frac{(4x^{11} + 8x^7y^8)}{(x^4+y^8)^2} + a_2 \cdot \frac{(-8x^8y^7)}{(x^4+y^8)^2} \\
\Longrightarrow \quad a_1 &= \frac{(x^3+xy^2)(x^4+y^8)^2}{4x^4+8y^8} \Longrightarrow \quad a_1(0) = 0 \\
\Longrightarrow \quad a_2 &= 0 \Longrightarrow \quad a_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Observe que $a_j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$ com $j = 1, 2$. Portanto pelo (teorema Principal) segue-se que $f \overset{C^\ell \mathcal{R}_\pm}{\sim} q$.

Exemplo 5.4.2 Seja $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^4} + x^4(x^2+y^4)$ um germe tal que $f \overset{C^\ell - \mathcal{K}}{\sim} q$, onde $q(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^4}$. Mostraremos que $f \overset{C^\ell - \mathcal{R}_\pm}{\sim} q$. Vejamos,

f é semi quase homogêneo do tipo $(2,1;4)$ e de classe C^1. De fato, considere $f = q + \phi$, onde $q(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^4}$ é um germe quase homogêneo do tipo $(2,1;4)$ e ϕ satisfaz a condição $\mathrm{fil}(\phi) = 12 > 4 = \mathrm{fil}(f)$. Agora note que por hipótese $f \overset{C^\ell - \mathcal{K}}{\sim} q$

$$\Longrightarrow f = M \cdot (q \circ h),$$

onde M é dado por $M(x,y) = 1 + (x^2+y^4)^2 \Longrightarrow M(0) \neq 0$. Resta mostrar que q e ϕ satisfazem as condições do (Teorema Principal), ou seja, $J_\phi \subset \mathfrak{m}_2^{[\ell]} \cdot J_q$ e $\phi \subset \mathfrak{m}_2^{[\ell]} \cdot J_q$

$$\begin{aligned}
J_\phi &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle 6x^5 + 4x^3y^4, \quad 4x^4y^3 \right\rangle \\
J_q &= \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{2x^5+4x^3y^4}{(x^2+y^4)^2}, \quad \frac{-4x^4y^3}{(x^2+y^4)^2} \right\rangle \\
&\Longrightarrow b_1^1 \cdot \frac{(2x^5+4x^3y^4)}{(x^2+y^4)^2} + b_1^2 \cdot \frac{(-4x^4y^3)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&\Longrightarrow b_1^1 = \frac{(3x^2+2y^4)(x^2+y^4)^2}{x^2+2y^4} \Longrightarrow b_1^1(0) = 0 \\
&\Longrightarrow b_1^2 = 0 \Longrightarrow b_1^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& b_2^1 \cdot \frac{(2x^5+4x^3y^4)}{(x^2+y^4)^2} + b_2^2 \cdot \frac{(-4x^4y^3)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
& \Longrightarrow \quad b_2^1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b_2^1(0) = 0 \\
& b_2^2 = -(x^2+y^4)^2 \quad \Longrightarrow \quad b_2^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Portanto, existem $b_i^j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$, com $i, j = 1, 2$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = x^6 + x^4y^4 &= a_1 \cdot \frac{(2x^5 + 4x^3y^4)}{(x^2+y^4)^2} + a_2 \cdot \frac{(-4x^4y^3)}{(x^2+y^4)^2} \\
\Longrightarrow a_1 &= \frac{x^3(x^2+y^4)^2}{2x^2+4y^4} \\
\Longrightarrow a_1(0) &= 0 \\
\Longrightarrow \quad a_2 &= \frac{-y(x^2+y^4)^2}{4} \\
\Longrightarrow a_2(0) &= 0
\end{aligned}$$

Observe que os $a_j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$, $j = 1, 2$. Portanto, pelo (Teorema Principal) tem-se que $f \overset{C^\ell-\mathcal{R}_\pm}{\sim} q$.

Exemplo 5.4.3 Seja $f(x,y) = \frac{x^6}{x^4+y^6} + \frac{x^{14}y^3+2x^{10}y^9+x^6y^{15}}{(x^4+y^6)^2}$. Mostrar que $f \overset{C^5-\mathcal{R}_\pm}{\sim} q$, onde $q(x,y) = \frac{x^6}{x^4+y^6}$. De fato, temos que f é semi quase homogêneo do tipo $(3,2;6)$ e de classe C^1, pois escrevendo $f = q + \phi$ temos que q é quase homogêneo do tipo $(3,2;6)$ e $\mathtt{fil}(\phi) = 24 > 6 = \mathtt{fil}(f)$, note ainda que ϕ é de classe C^7.

Aqui $f = M \cdot q$, com $M(x,y) = 1 + \frac{x^8y^3+2x^4y^9+y^{15}}{x^4+y^6}$ de classe C^5 e $M(0) \neq 0$. Desde que as hipóteses do (Teorema Principal) são satisfeitas, tem-se $f \overset{C^5-\mathcal{R}_\pm}{\sim} q$. Vejamos, $J_\phi \subset \mathfrak{m}_n^{[\ell]} \cdot J_q$ e $\phi \subset \mathfrak{m}_n^{[\ell]} \cdot J_q$

$$\begin{aligned}
J_\phi &= \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle 6x^5y^3, \quad 3x^6y^2 \right\rangle \\
J_q &= \left\langle \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{2x^9+6x^5y^6}{(x^4+y^6)^2}, \quad \frac{-6x^6y^5}{(x^4+y^6)^2} \right\rangle \\
b_1^1 \cdot \frac{(2x^9+6x^5y^6)}{(x^4+y^6)^2} &+ b_1^2 \cdot \frac{(-6x^6y^5)}{(x^4+y^6)^2} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\
\Longrightarrow \quad b_1^1 &= \frac{3y^3(x^4+y^6)^2}{x^4+3y^6} \Longrightarrow b_1^1(0) = 0 \\
\Longrightarrow \quad b_1^2 &= 0 \Longrightarrow b_1^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
b_2^1 \cdot \frac{(2x^9+6x^5y^6)}{(x^4+y^6)^2} &+ b_2^2 \cdot \frac{(-6x^6y^5)}{(x^4+y^6)^2} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \\
\Longrightarrow \quad b_2^1 &= \frac{3xy^2(x^4+y^6)^2}{2x^4+6y^6} \Longrightarrow b_2^1(0) = 0 \\
\Longrightarrow \quad b_2^2 &= 0 \Longrightarrow b_2^2(0) = 0
\end{aligned}$$

Portanto, existem $b_i^j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$, com $i, j = 1, 2$. Agora note que,

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = x^6y^3 &= a_1 \cdot \frac{(2x^9 + 6x^5y^6)}{(x^4+y^6)^2} + a_2 \cdot \frac{(-6x^6y^5)}{(x^4+y^6)^2} \\
\Longrightarrow \quad a_1 &= \frac{xy^3(x^4+y^6)^2}{2x^4+6y^6} \Longrightarrow a_1(0) = 0 \\
\Longrightarrow \quad a_2 &= 0 \Longrightarrow a_2(0) = 0
\end{aligned}$$

Observe que os $a_j \in \mathfrak{m}_2^{[\ell]}$, $j = 1, 2$. Portanto, pelo (Teorema Principal) tem-se que $f \overset{C^5-\mathcal{R}_\pm}{\sim} q$.

Capítulo 6

Apêndice

Definição : Seja U um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Um Campo Vetorial em U de classe C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$ é uma aplicação

$$X : U \to \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto X(x)$$

de classe C^k. Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x) \qquad (1)$$

Essa equação diferencial tem solução única para cada condição inicial fixada. As soluções de (1) são aplicações diferenciáveis $\varphi : I \to U$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)) = X(\varphi(t)), \ \forall t \in I \qquad (2)$$

Essas aplicações são chamadas de "trajetórias"ou "curvas integrais"de X.

Fluxo Gerado por X : O conjunto $D = \{(t, x); x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde I_x é o intervalo máximo que parametriza a solução da equação $x' = X(x)$ que passa por x, para cada $x \in U$. A aplicação $\varphi : D \to U$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k, chama-se fluxo gerado por X.

Observação : i) Dado o fluxo $\varphi(t, x)$, uma vez fixado x, temos a curva integral $\varphi_x(t)$ que passa por x. Portanto, variando x temos uma família que parametriza todas as curvas integrais simultaneamente.

ii) Dado o fluxo $\varphi(t, x)$, uma vez fixado t, temos que para cada $t \in I_x$ $\varphi_t(x)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Portanto, variando t temos uma família de difeomorfismos.

Definição : Sejam $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ germes de aplicações de classe C^l. Dizemos que f e g são C^ℓ-$\mathcal{R}$-equivalentes se existir um germe de aplicação C^ℓ $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g(h(x)) = f(x)$.

Seja $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ e $t \in I$ (I intervalo de $\mathbb{R}$) uma família suave de germes de funções C^ℓ, i.e, existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^n$ e uma função suave $F : U \times I \to \mathbb{R}^p$ tal que $F(0, t) = 0$ e $f_t(x) = F(x, t)$, $\forall\, t \in I$, $\forall\, x \in U$.

Definição : Seja $F : (\mathbb{R}^n \times I, 0) \to \mathbb{R}^p$ uma deformação de $f(x) = F(x, 0)$. A família f_t é C^ℓ-$\mathcal{R}$-trivial se existir um germe de aplicação $H : (\mathbb{R}^n \times I, 0) \to \mathbb{R}^n$, H_t de classe C^ℓ ($H_t(x) = H(x, t)$), tal que

(a) $H(x, 0) = x$;

(b) $H(0, t) = 0$;

(c) $F(H(x, t), t) = f(x)$, ou seja, $f_t \circ H_t = f$, $\forall\, t \in I$.

Observe que derivando em relação à t a expressão dada em (c) obtemos :

$$(c') \quad \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0$$

Afirmação 1) Determinar H satisfazendo (a), (b) e (c') é equivalente a resolver o problema de valor inicial :

$$\begin{array}{ll} (d) & \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x,t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0 \\ (e) & \qquad \xi_i(0,t) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n \end{array}$$

De fato, seja $x' = \xi(x, t)$ em que $\xi(x, t) = (\xi_1(x, t), \ldots, \xi_n(x, t))$ é um campo com $\xi(0, t) = 0$. Em particular, ξ é contínua. Consideremos o fluxo associado

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longmapsto H(x, t)$$

tal que $H(x, s) = x$. Então,

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t) = \xi_i(H(x,t),t) \qquad (*)$$

Por (d), segue-se que

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i(H(x,t),t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0$$

$$\Longrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0$$

Portanto, vale (c') e note que fazendo $s = 0$ tem-se $H(x,0) = x$, assim vale (a). Agora verifiquemos (b), i.e, $H(0,t) = 0$. Com efeito, tome $x = 0$ em $(*)$ obtemos

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}(0,t) = \xi(H(0,t),t),\ \ H(0,s) = 0,$$

pois $H(x,s) = x$. Mas por outro lado, a aplicação nula $x(t) \equiv 0$ é solução do P.V.I

$$x' = \xi(x,t)$$

$$x(s) = 0$$

Logo, $H(0,t) = x(t) = 0$, por unicidade das soluções. Assim, temos que (d) e (e) são equivalentes à (a), (b) e (c').

Afirmação 2) (a), (b) e (c) são equivalentes à (a), (b) e (c')

$\Rightarrow$) Óbvio! pois (c) $\Longrightarrow$ (c')

$\Leftarrow$) Suponhamos que valem (a), (b) e (c'). Mostraremos que $(c') \Longrightarrow$ (c). Note que de (c') obtemos,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t)\cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t)\right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(F\circ H)(x,t) = 0\ (**)$$

Assim temos que integrando $(**)$ em relação à t obtemos,

$$(F\circ H)(x,t) = c(x) \Longrightarrow F(H(x,t),t) = c(x)$$

Em particular fazendo $t = s$ obtemos, $F(H(x,s),s) = c(x)$, mas por (a) tem-se $H(x,s) = x$. Logo temos que $c(x) = F(x,s)$, portanto $F(H(x,t),t) = F(x,s)$, ou seja, vale (c).

Conclusão :

(a), (b) e (c) $\Leftrightarrow$ (a), (b) e (c') $\Leftrightarrow$ (d) e (e). Portanto, resolver o P.V.I implica dizer que a família $f_t(x) = F(x,t)$ é C^{ℓ}-$\mathcal{R}$-Trivial.

Lema 2 [5] Seja $h(x)$ um polinômio quase homogêneo do tipo $(r_1,\dots,r_n;2k)$, com $r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n$, $\rho(x)$ controle padrão do mesmo tipo de $h(x)$ e $h_t(x)$ uma deformação de h tal que

$$\mathrm{fil}(h_t) \geqslant 2k + \ell\cdot r_n + 1,\ \ t\in[0,1],\ \ \ell \geqslant 1.$$

Então, a função $\nu(x) = \frac{h_t(x)}{\rho(x)}$ é diferenciálvel de classe C^{ℓ}.

Demonstração : [Ver 5]

Lema 2.7 [2] Para qualquer germe $h(x) = \sum a_\gamma x^\gamma$, com γ no interior de $\Gamma_+(\rho^d)$ para algum $a_\gamma \neq 0$, então $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{\rho^d(x)} = 0$.

Demonstração : [Ver 2]

Referências Bibliográficas

[1] A. Dimca, *Topics on Real and Complex Singularities*. Friedr Vieweg & Sohn, 1987.

[2] M.J. Saia, C.H. Soares Júnior, C^ℓ*-G-triviality of map germs and Newton Polyhedra* $G = \mathcal{R}, \mathcal{C}$ *and* $\mathcal{K}$, Hokkaido Math. Journal, Vol 37 (2008),p.331-348.

[3] J.C. Ferreira Costa, M.J. Saia, C.H. Soares Júnior , C^ℓ*-contact and* C^ℓ*-right equivalences of real semi quasihomogeneous* C^ℓ *function germs*, Hiroshima. Math. J., 44 (2014), 127-137.

[4] A.A. du Plessis, *On the determinacy of smooth map-germs*, Invent. Math., 58 n.2 (1980), 107-160.

[5] M.A.S. Ruas, M.J. Saia, C^ℓ*-determinacy of weighted homogeneous germs*, Hokkaido Math. Journal, 26 (1997), 89-99.

[6] K. Saito, *Quasihomogene isolierte Singularitaten von Hyperflachen*. Invent. Math. 14, (1971).

[7] M. Takahashi, *A sufficient condition that contact equivalence implies right equivalence for smooth function germs*, Houston J. Math., 35 n.3 (2009), 829-833.

[8] S. Bromberg, L. Medrano, C^r*-sufficiency of quasihomogeneous functions*. Real and Complex Singularities, Pitman Research Notes in Math. Series 333 (1995), 179-189.

[9] N. Kuiper, C^ℓ*-equivalence of functions near isolated critical points*, Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1967), Ann. of Math. Studies, n. 69, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., (1972), 199-2018.

[10] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps*. London Mathematical Society Lecture Notes Series(58).