



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas de  
Rotação em  $\mathbb{R}^3$**

**Cleidinaldo Aguiar Souza**

**Teresina - 2012**

**Cleidinaldo Aguiar Souza**

**Dissertação de Mestrado:**

**Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas de Rotação em  
 $\mathbb{R}^3$**

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Piauí, como  
requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

**Teresina - 2012**

Souza, C.A.

xxxx Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas de Rotação em  $\mathbb{R}^3$ .

Cleidinaldo Aguiar Souza – Teresina: 2012.

Orientador: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Geometria Diferencial

CDD 516.36

*Aos meus pais, Raimundo Leal e Ednalva Maria e  
aos meus irmãos Ligia Maria, João Paulo, Larisse e  
Antônio Raelson.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois me concedeu saúde e disposição para encarar este desafio.

Agradeço aos professores da Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Afonso Noberto, Alessandro e Laércio.

Agradeço aos professores da Universidade Federal do Piauí - UFPI, por terem me recebido nesta instituição.

Agradeço ao professor Juscelino que teve muita paciência comigo.

Agradeço aos meus colegas de estudo e lazer: Valdinês, Alex, Franciane, Yuri, Kelson, Edivaldo e Leandro.

Agradeço (a CAPES) pelo apoio financeiro.

*“Você não sabe o quanto eu caminhei pra chegar até aqui, percorrer milhas e milhas antes de dormir eu nem cochilei, os mais belos montes escalei nas noites escuras de frio chorei...”*

Cidade Negra.

# Resumo

Este trabalho foi baseado no artigo [1] de Rafael López. Neste artigo ele estudou *superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação em  $\mathbb{R}^3$* , ou seja, superfícies de rotação cuja curvatura média  $H$  e a curvatura Gaussiana  $K$  satisfazem uma relação linear da forma  $\mathbf{a}H + \mathbf{b}K = \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são constantes reais não todas nulas.

Tais superfícies são denominadas hiperbólicas quando vale a desigualdade  $\Delta := \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}\mathbf{c} < 0$ . Classificaremos, no caso em que  $\mathbf{a} \neq 0$ , as *superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação* e como consequência, obteremos uma família a um parâmetro de superfícies completas em  $\mathbb{R}^3$  constituída apenas pelas superfícies com auto-interseção cujas curvas geratrizes são periódicas.

# Abstract

This essay was based on article [1] by Rafael López. In this article he studied rotational hyperbolic linear Weingarten surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , or then, surface that the mean curvature  $H$  and the Gaussian curvature  $K$  satisfied a linear relationship of the way  $\mathbf{a}H + \mathbf{b}K = \mathbf{c}$ , where  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  are real constants at least one of them is different from zero.

These surfaces are considered hyperbolic when the discriminant  $\Delta := \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}\mathbf{c} < 0$ , we will obtain a classification in  $\mathbf{a} \neq 0$  of the rotational hyperbolic linear Weingarten surface. As consequence, we will obtain,  $\mathbf{a} \neq 0$ , a family of complete rotational hyperbolic linear Weingarten surface in  $\mathbb{R}^3$  that consist of the surfaces with self-intersections, where the curves that generate the surfaces are periodic.



# Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
<b>1</b> Noções Preliminares	<b>4</b>
1.1 Curvas . . . . .	4
1.2 Superfícies Regulares . . . . .	5
1.3 Superfícies de Weingarten . . . . .	6
1.4 Equações Diferenciais . . . . .	9
1.5 Superfícies de Revolução . . . . .	11
<b>2</b> O caso em que $0 < z_0 \leq \frac{a}{2}$	<b>18</b>
2.1 O caso em que $0 < z_0 < \frac{a}{2}$ . . . . .	18
2.2 O caso em que $z_0 = \frac{a}{2}$ . . . . .	24
<b>3</b> O caso em que $\frac{a}{2} < z_0 < \frac{-2b}{a}$	<b>25</b>
<b>4</b> O caso em que $z_0 > \frac{-2b}{a}$	<b>30</b>
<b>5</b> A nova família de LW - superfícies hiperbólica de rotação	<b>38</b>
Referências Bibliográficas	43

# Introdução

Uma superfície  $\mathcal{S}$  no espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  é chamada uma *superfície de Weingarten*, se existe uma relação entre suas duas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$ , isto é, se existe uma função suave de duas variáveis  $W$  tal que  $W(k_1, k_2) = 0$  implicando que  $\mathcal{U}(H, K) = 0$ , onde  $H$  e  $K$  são, respectivamente, as curvaturas média e Gaussiana de  $\mathcal{S}$ .

Neste trabalho, vamos abordar *superfícies de Weingarten* onde a função  $\mathcal{U}$  satisfaz uma relação linear do tipo:

$$0 = \mathcal{U}(H, K) = \mathbf{a}H + \mathbf{b}K - \mathbf{c},$$

onde  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são constantes reais não todas nulas. Chamamos  $\mathcal{S}$  de *superfície de Weingarten linear* e denotamos por *LW - superfície*. Os primeiros exemplos de *LW - superfícies* são superfícies com curvatura média constante ( $\mathbf{b} = 0$ ), e superfícies com curvatura Gaussiana constante ( $\mathbf{a} = 0$ ).

O comportamento de uma *LW - superfície* depende do sinal do discriminante  $\Delta := \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{a}\mathbf{b}$ , tais superfícies são ditas *hiperbólicas* se  $\Delta < 0$ , *elípticas* se  $\Delta > 0$  e quando  $\Delta = 0$  são ditas superfícies *tubulares*.

O foco deste trabalho é o estudo das *LW - superfícies hiperbólicas*. Exemplos destas superfícies são as superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa ( $\mathbf{a} = 0, \mathbf{b}\mathbf{c} < 0$ ). Uma expectativa, é encontrar nas *LW - superfícies hiperbólicas* propriedades semelhantes às encontradas nas superfícies que tem curvatura Gaussiana constante negativa. Note que  $\Delta = \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}\mathbf{c} < 0$ , implica que  $\mathbf{c} \neq 0$ . Além disso, entre todas as *LW - superfícies hiperbólicas*, as classes de superfícies de rotação são particularmente interessantes, pois neste caso, sem perda de generalidade, assumindo  $\mathbf{c} = 1$  em ( $\mathbf{a}H + \mathbf{b}K = \mathbf{c}$ ), a equação torna-se uma equação diferencial ordinária. O estudo de tais superfícies, se reduz em encontrar a curva perfil que define a superfície.

Classificaremos as *LW - superfícies hiperbólicas de rotação* atribuindo hipóteses a curva perfil. A seguir apresentaremos um resumo da classificação que faremos:

1. A curva perfil possui uma reta tangente paralela ao eixo de rotação. Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ , com  $\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b} < 0$  e  $\mathbf{a} \neq 0$ , as *LW - superfícies hiperbólicas de rotação* satisfazendo  $\mathbf{aH} + \mathbf{bK} = 1$ , podem ser parametrizadas a um parâmetro  $z_0$ , escrevemos  $\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z_0)$ , com  $\mathbf{a}, z_0 > 0$  e  $z_0 \neq -2\mathbf{b}/\mathbf{a}$  tal que:
  - (a) Se  $0 < z_0 < \mathbf{a}/2$ , então a superfície tem curvatura Gaussiana positiva e não é completa.
  - (b) Se  $z_0 = \mathbf{a}/2$ , então a superfície é um cilindro reto.
  - (c) Se  $\mathbf{a}/2 < z_0 < -2\mathbf{b}/\mathbf{a}$ , então a superfície tem curvatura Gaussiana negativa e não é completa.
  - (d) Se  $z_0 > -2\mathbf{b}/\mathbf{a}$  e  $z_0 > \mathbf{a}$ , então a superfície é periódica e completa.

Assim obteremos uma família a um parâmetro de *LW - superfícies hiperbólicas de rotação* completas em  $\mathbb{R}^3$ . Em contraste com o teorema de Hilbert, que diz:

Não existe superfície completa com curvatura Gaussiana constante negativa imersa em  $\mathbb{R}^3$ .

2. A curva perfil da *LW - superfície hiperbólica de rotação*, não tem reta tangente paralela ao eixo de rotação. Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ , com  $\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b} < 0$  e  $\mathbf{a} \neq 0$ , as *LW - superfícies hiperbólicas de rotação* satisfazendo  $\mathbf{aH} + \mathbf{bK} = 1$ , podem ser parametrizadas a um parâmetro  $z_0$ , escrevemos  $\mathcal{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z_0)$ , com  $z_0 > 0$  e  $z_0 \neq -2\mathbf{b}/\mathbf{a}$  temos:
  - (a) Se  $z_0 < \sqrt{-\mathbf{b}}$ , então a superfície  $\mathcal{S}$  intersecta transversalmente o eixo  $x$ .
  - (b) Se  $z_0 = \sqrt{-\mathbf{b}}$ , então a superfície  $\mathcal{S}$  intersecta tangencialmente o eixo  $x$ .
  - (c) Se  $z_0 > \sqrt{-\mathbf{b}}$ , então a superfície  $\mathcal{S}$  não intersecta o eixo  $x$ .

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1 introduzimos as notações e terminologias utilizadas no decorrer do trabalho, assim como os resultados básicos de geometria, equações diferenciais que são indispensáveis para a compreensão dos capítulos seguinte.

Do capítulo 2 ao capítulo 4, faremos a classificação das *LW - superfícies hiperbólicas de rotação* de acordo com o parâmetro  $z_0$ , onde a curva perfil possui reta tangente paralela ao eixo de rotação.

---

Finalmente no capítulo 5 estudaremos LW - *superfícies hiperbólica de rotação*, onde a curva perfil não possui reta tangente paralela ao eixo de rotação.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições e os resultados básicos que serão utilizados neste trabalho. Deixaremos de mencionar algumas demonstrações, no entanto, estas serão indicadas e poderão ser encontradas nas referências.

### 1.1 Curvas

**Definição 1.** *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta  $\mathbb{R}$ . Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \mapsto \mathbb{R}^3$  é chamada regular, se  $\alpha'(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ .*

**Definição 2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada, diferenciável e regular, a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:*

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(v)| dv$$

*é chamada função comprimento de arco da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$ , onde  $t_0 \in I$ .*

**Proposição 1.** *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ .*

A prova pode ser encontrada na referência [4].

**Definição 3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O número  $|\alpha''(s)| = k(s)$ , chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$ .*

**Definição 4.** Dizemos que uma curva plana regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é convexa se, para todo  $t \in [a, b]$ , o traço  $\alpha([a, b])$  de  $\alpha$  está totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente a  $\alpha$  em  $t$ . Dizemos que a curva  $\alpha$  é côncava, quando  $-\alpha$  é convexa.

**Proposição 2.** Todo ponto crítico de uma função convexa, (respectivamente côncava) é ponto de mínimo, (respectivamente de máximo) absoluto.

A prova pode ser encontrada na referência [7].

**Definição 5.** Um vértice de uma curva plana regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um ponto  $t \in [a, b]$  onde  $k'(t) = 0$ .

**Proposição 3** (Teorema dos Quatro Vértices). Uma curva simples, convexa e fechada tem pelo menos quatro vértices.

A prova pode ser encontrada na referência [4].

## 1.2 Superfícies Regulares

**Definição 6.** Um subconjunto  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular se, para cada  $p \in \mathcal{S}$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $x : U \rightarrow V \cap \mathcal{S}$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  tal que:

1.  $x$  é diferenciável.
2.  $x$  é um homeomorfismo.
3. Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Um ponto  $q \in U$  onde  $dx_q$  não é injetiva é chamado um ponto singular de  $x$ .

**Definição 7.** Uma superfície regular conexa  $\mathcal{S}$  é denominada completa quando para qualquer ponto  $p \in \mathcal{S}$ , qualquer geodésica parametrizada  $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{S}$ , começando em  $p = \gamma(0)$ , pode ser estendida a uma geodésica parametrizada  $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$ , definida sobre toda a reta  $\mathbb{R}$ .

**Proposição 4.** Uma superfície fechada  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  é completa.

A prova pode ser encontrada na referência [4].

**Definição 8.** Uma aplicação diferenciável  $X : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^3$  de uma superfície  $\mathcal{S}$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma imersão se a diferencial  $dX_q : T_q\mathcal{S} \mapsto T_p\mathbb{R}^3$  é injetiva.

Dada uma superfície  $\mathcal{S}$  e uma imersão  $X : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^3$ , daremos a  $\mathcal{S}$  uma métrica induzida por  $X$ , isto é, para todo  $q \in \mathcal{S}$  definimos:

$$\langle v, w \rangle_q = \langle dx_q(v), dx_q(w) \rangle_{x(q)},$$

para todo  $v, w \in T_q\mathcal{S}$ . Diremos que  $X$  é uma imersão isométrica.

### 1.3 Superfícies de Weingarten

**Definição 9.** Seja  $X : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^3$  uma imersão, dizemos que  $X$  é uma imersão de Weingarten, se as suas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem uma relação da forma:

$$W(k_1, k_2) = 0,$$

onde  $W : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  é uma função suave.

Sendo  $H$  e  $K$  as curvaturas média e Gaussiana, respectivamente de  $\mathcal{M}$  temos:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \text{ e } k_2 = H - \sqrt{H^2 - K},$$

assim,

$$W(k_1, k_2) = W(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}) = U(H, K) = 0.$$

Diz-se que  $X$  é de *Weingarten linear* se  $U$  satisfaz uma relação linear entre  $H$  e  $K$ , ou seja,

$$U(H, K) = aH + bK - c = 0,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais não todas nulas, ou ainda, quando

$$aH + bK = c.$$

Vamos estudar *superfícies de Weingarten* que satisfazem o caso em que  $U$  é do tipo linear.

**Exemplo.1:** As superfícies com curvatura média constante ( $b = 0$ ) e as superfícies com curvatura Gaussiana constante ( $a = 0$ ) são *LW - superfícies*.

Apesar desses dois tipos de superfícies, do exemplo anterior, serem bastantes estudados na literatura, a classificação das *LW - superfícies* está quase totalmente em aberto.

O comportamento de uma *LW - superfície* e suas propriedades qualitativas dependem do sinal de um *discriminante* que envolve as constantes reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Vejamos como se expressa esse *discriminante*.

Seja  $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de *Weingarten linear*, como toda superfície  $\mathcal{S} = X(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^3$  é localmente um gráfico, podemos expressar  $X$  em coordenadas locais  $(u, v)$  da seguinte forma:

$$X(u, v) = (u, v, z(u, v))$$

Denotemos:

$$p = z_u, \quad q = z_v, \quad r = z_{uu}, \quad s = z_{uv}, \quad t = z_{vv},$$

obtemos

$$X_u = (1, 0, p), \quad X_v = (0, 1, q), \quad X_{uu} = (0, 0, r), \quad X_{uv} = (0, 0, s), \quad X_{vv} = (0, 0, t)$$

e

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(-p, -q, 1).$$

Daí, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados por:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + p^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = pq, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + q^2$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Obtemos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}$$

e

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Assim a relação de *Weingarten* equivale a Equação Diferencial Parcial de segunda ordem em  $z$ , dada por:

$$\psi(p, q, r, s, t) = a \frac{r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + b \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} - c = 0 \quad (1.1)$$

Cujo o *discriminante* é calculado por:

$$\bar{\Delta} = \psi_r \psi_t - \frac{1}{4} \psi_s^2.$$

Vamos analisar como o *discriminante*  $\bar{\Delta}$  se relaciona com os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Seja  $y = 1 + p^2 + q^2$ , derivando (1.1) em relação a  $r$ ,  $s$  e  $t$  respectivamente, obtemos



$$\psi_r = a \frac{(1+q^2)}{2y^{3/2}} + b \frac{t}{y^2};$$

$$\psi_t = a \frac{(1+p^2)}{2y^{3/2}} + b \frac{r}{y^2};$$

$$\frac{1}{2}\psi_s = a \frac{-pq}{2y^{3/2}} + b \frac{-s}{y^2}.$$

Daí,  $\bar{\Delta}$  se expressa por

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \psi_r \psi_t - \left(\frac{1}{2}\psi_s\right)^2 \\ &= \left(a \frac{(1+q^2)}{2y^{3/2}} + b \frac{t}{y^2}\right) \left(a \frac{(1+p^2)}{2y^{3/2}} + b \frac{r}{y^2}\right) - \left(a \frac{-pq}{2y^{3/2}} + b \frac{-s}{y^2}\right)^2 \\ &= a^2 \frac{(1+q^2)(1+p^2)}{4y^3} + ab \frac{r(1+q^2)}{2y^2 y^{3/2}} + ab \frac{t(1+p^2)}{2y^2 y^{3/2}} + b^2 \frac{rt}{y^2 y^2} \\ &\quad - \left(a^2 \frac{p^2 q^2}{4y^3} + 2ab \frac{spq}{2y^2 y^{3/2}} + b^2 \frac{s^2}{y^2 y^2}\right) \\ &= \frac{1}{y^2} \left[ a^2 \frac{(1+q^2)(1+p^2) - p^2 q^2}{4y^3} + ab \frac{1}{2} \frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{y^{3/2}} + b^2 \frac{rts^2}{y^2} \right] \\ &= \frac{1}{y^2} \left[ \frac{a^2}{4} + b(aH + bK) \right] = \frac{1}{y^2} \left[ \frac{a^2 + 4bc}{4} \right]. \end{aligned}$$

Seguindo a mesma notação introduzida em [6] dizemos que uma solução  $z = z(u, v)$  de (1.1) é

- *Elíptica*, se  $\bar{\Delta} > 0$
- *Hiperbólica*, se  $\bar{\Delta} < 0$

Como consequência, segue-se a seguinte definição

**Definição 10.** *Uma imersão  $X : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^3$  de Weingarten linear satisfazendo  $aH + bK = c$  é dita hiperbólica, e escreve-se WLH - superfícies, se vale a desigualdade  $\Delta = a^2 + 4bc < 0$ .*

**Exemplo.2:** As superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa ( $a = 0$ ) são WLH - superfícies.

## 1.4 Equações Diferenciais

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq +\infty$  em  $\Omega$  é uma aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Ao campo vetorial  $f$  associamos a equação diferencial:

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}).$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \rightarrow \Omega$ , onde  $I$  é um intervalo da reta tais que:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t))$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* de  $f$ .

Um ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$  é dito um *ponto singular* de  $f$  se  $f(\mathbf{x}) = 0$  e *ponto regular* de  $f$  se  $f(\mathbf{x}) \neq 0$ .

**Teorema 1.** (*Teorema de Existência e Unicidade*) *Se o campo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , então dados  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  quaisquer, existe uma única solução para o problema de valor inicial (PVI):*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

*definida num intervalo aberto  $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ , para algum  $\alpha = \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}$ .*

A prova pode ser encontrada na referência [5].

**Definição 11.** *Dizemos que uma solução  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  do PVI (1.2) é solução maximal, quando para toda solução do PVI (1.2)  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem-se que  $J \subset I$  e  $\varphi(t) = \psi(t)$  para todo  $t \in J$ .*

*Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é solução maximal do PVI (1.2) dizemos que  $I$  é o intervalo maximal de definição da solução.*

**Teorema 2.** *Se o campo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , então dados  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  quaisquer, existe uma única solução para o problema de valor inicial PVI (1.2), definida num intervalo maximal necessariamente aberto  $I(t_0, \mathbf{x}_0)$  contendo  $t_0$ .*

A prova pode ser encontrada na referência [5].

**Teorema 3.** *Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(\Omega)$  e  $[t_0, \omega_+)$  o intervalo maximal a direita da solução de (1.2). Se  $\omega_+ < +\infty$ , então dado qualquer compacto  $K \subset \Omega$ , existe  $t \in (t_0, \omega_+)$  tal que  $\varphi(t) \notin K$ .*

A prova pode ser encontrada na referência [5].

**Corolário 1.** *Sob as hipóteses do teorema anterior se  $\omega_+ < +\infty$  e se existe  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t) = p$ , então  $p$  está na fronteira de  $\Omega$ .*

A prova pode ser encontrada na referência [5].

**Definição 12.** *Uma integral primeira da equação diferencial  $x' = f(x)$  de primeira ordem associada a um campo  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$  definido em um aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável  $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  que não é constante em conjuntos abertos, mas que é constante ao longo de cada solução da equação diferencial.*

**Proposição 5.** *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , se  $x(t)$  é uma trajetória de  $f$  definida no intervalo maximal  $(\omega_-, \omega_+)$  com  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t) = p \in \Omega$ , então  $\omega_+ = +\infty$  e  $p$  é uma singularidade de  $f$ .*

*Demonstração.* Se fosse  $\omega_+ < +\infty$ , então pelo Corolário 1 teríamos que  $p$  pertenceria a fronteira de  $\Omega$ , o que é absurdo, pois  $\Omega$  é aberto. Logo  $\omega_+ = +\infty$ .

Por outro lado, como  $\omega_+ = +\infty$  segue-se que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = p$ . Portanto  $p$  é uma singularidade do campo  $f$ . □

**Proposição 6.** *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $|f(x)| \leq c$  para todo  $x \in \Omega$ , então  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \Omega$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\omega_+(x) < +\infty$  para algum  $x \in \Omega$ . Como  $|x - \varphi_x(t)| = \left| \int_0^t (\varphi_x(s)) ds \right| \leq c \cdot t \leq c \cdot \omega_+(x)$ , resulta que para todo  $t \in [0, \omega_+(x))$ ,  $\varphi_x(t)$  está na bola fechada de centro  $x$  e raio  $c \cdot \omega_+(x)$ , o que contradiz o Teorema 3. Logo  $\omega_+(x) = +\infty$ , para todo  $x \in \Omega$ .

Do mesmo modo, prova-se que  $\omega_-(x) = -\infty$  para todo  $x \in \Omega$ . Portanto  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \Omega$ . □

**Definição 13.** *O conjunto  $\gamma_p = \{\varphi_p(t), t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral do campo  $f$  pelo ponto  $p$ , chama-se órbita de  $f$  pelo ponto  $p$ .*

Observe que  $q \in \gamma_p$  se, e somente se,  $\gamma_q = \gamma_p$ . Em outras palavras, duas órbitas de  $f$  coincide ou são disjuntas, isto é,  $\Omega$  fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis.

Prova-se em [5], se  $\varphi$  é solução máxima no intervalo maximal  $I$ , então  $\varphi$  é injetiva, ou  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante, ou  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica. Também prova-se em [5], se  $\gamma$  é órbita periódica, então  $\gamma$  é um conjunto fechado.

**Definição 14.** *O conjunto aberto  $\Omega$ , munido da decomposição em órbitas de  $f$ , chama-se retrato de fase de  $f$ . As órbitas de  $f$  são orientadas no sentido das curvas integrais do campo  $f$ ; os pontos singulares são munidos da orientação trivial.*

**Definição 15.** *Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  chama-se hiperbólico se todos autovalores de  $DX(p)$  têm parte real diferente de zero.*

## 1.5 Superfícies de Revolução

Seja  $\mathbb{R}^3$  o espaço tridimensional com coordenadas  $(x, y, z)$  e seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  a curva planar contida no plano  $(x, z)$ , com função coordenada  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  e  $z(s) > 0$  para todo  $s \in I$ . Assuma que  $s$  é o comprimento de arco ao longo de  $\alpha$ , considere  $\theta = \theta(s)$  o ângulo entre  $\alpha'(s)$  e o eixo  $x$ , temos que  $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), 0, \text{sen} \theta(s))$  e a curvatura de  $\alpha$  é dada por  $|\alpha''(s)| = \theta'(s)$ .

Seja  $\mathcal{S} = R_\phi \alpha(s)$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,  $s \in I$ , a *superfície de revolução* obtida pela rotação de  $\alpha$  em torno do eixo  $x$ , onde a matriz de rotação  $R_\phi$  é:

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen} \phi & \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \text{sen} \phi \end{bmatrix},$$

segue que  $\mathcal{S}$  é parametrizada por

$$X(s, \phi) = (x(s), z(s) \cos \phi, z(s) \text{sen} \phi).$$

Assim,  $X_s = (x', z' \cdot \cos \phi, z' \cdot \text{sen} \phi)$ ,  $X_\phi = (0, -z \cdot \text{sen} \phi, z \cdot \cos \phi)$ , daí o campo normal unitário é dado por  $N = (z', x' \cos \phi, x' \text{sen} \phi)$ , temos ainda que  $x_{ss} = (x'', z'' \cdot \cos \phi, z'' \cdot \text{sen} \phi)$ ,  $X_{s\phi} = (0, -z \cdot \text{sen} \phi, z \cdot \cos \phi)$ ,  $X_{\phi\phi} = (0, -z \cdot \cos \phi, -z \cdot \text{sen} \phi)$  e os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental são dados por:

$$E = \langle X_s, X_s \rangle = 1, \quad F = \langle X_s, X_\phi \rangle = 0, \quad G = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = z^2$$

$$e = \langle X_{ss}, N \rangle = x''z' - x'z'', \quad f = \langle X_{s\phi}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{\phi\phi}, N \rangle = x'z.$$

Vamos calcular as curvaturas  $k_1$  e  $k_2$  da superfície  $\mathcal{S}$ , utilizando o fato que:

$$-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1},$$

onde

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos que

$$-a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}$$

$$-a_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2}$$

$$-a_{21} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}$$

$$-a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}.$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= -a_{11} \\ &= e/E \\ &= x''z' - x'z'' \\ &= -\text{sen}\theta(s) \cdot \theta'(s) \text{sen}\theta(s) - \cos\theta(s) \cdot \cos\theta(s) \cdot \theta'(s) \\ &= -\theta'(s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 &= -a_{22} \\ &= g/G \\ &= x'/z \\ &= \cos\theta(s)/z(s). \end{aligned}$$

Logo,  $H$  e  $K$  são dados por

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\cos\theta(s) - z(s)\theta'(s)}{2z(s)} \quad \text{e} \quad K = k_1 \cdot k_2 = \frac{-\cos\theta(s) \cdot \theta'(s)}{z(s)}. \quad (1.3)$$

Substituindo H e K em  $aH + bK = 1$ , obtemos:

$$a \left( \frac{\cos \theta(s) - z(s)\theta'(s)}{2z(s)} \right) - b \left( \frac{-\cos \theta(s)\theta'(s)}{z(s)} \right) = 1. \quad (1.4)$$

Consequentemente, desde que  $az(s) + 2b \cos \theta(s) \neq 0$  tem - se:

$$\theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)}. \quad (1.5)$$

Neste trabalho, excluïremos o caso em que a superfície tenha curvatura Gaussiana constante negativa. Portanto, assumiremos que  $a \neq 0$ .

O estudo das LW - *superfície de rotação*, se reduz em conhecer as soluções da equação (1.5) para dada condição inicial. Assuma que em  $s = 0$  a reta tangente a  $\alpha$  é paralela ao eixo de revolução. Portanto  $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$ ,  $z_0 > 0$  e  $\alpha'(0) = (1, 0, 0)$ . Neste caso, a curva  $\alpha$  é governada pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \theta(s) \\ z'(s) = \text{sen} \theta(s) \\ \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \\ x(0) = 0, z(0) = z_0, \theta(0) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

e definida no domínio  $\Omega = \{(x, \theta, z); x, \theta, z \in \mathbb{R}, z \neq -2b \cos \theta(s)/a\}$ .

Ao trocarmos a curva  $\alpha = (x(s), 0, z(s))$  pela curva  $\bar{\alpha} = (x(s), 0, -z(s))$ , a superfície obtida pela rotação de  $\bar{\alpha}$  em torno do eixo x é a mesma obtida pela rotação da curva  $\alpha$ . Sendo assim, a curva  $\bar{\alpha}$  será solução do sistema (1.6) ao trocarmos o parâmetro  $(a, b, z_0)$  por  $(-a, b, -z_0)$ , logo podemos escolher os parâmetros  $a$  e  $z_0$  como tendo o mesmo sinal. Por conveniência, vamos assumir que  $a$  e  $z_0$  são números positivos.

**Teorema 4.** *Uma integral primeira para o sistema de equações diferenciais (1.6) é dado por:*

$$z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - (z_0^2 - az_0 - b) = 0. \quad (1.7)$$

*Demonstração.* Consideremos  $F(x, \theta, z) = z^2 - az \cos \theta - b \cos^2 \theta - (z_0^2 - az_0 - b)$ , seja  $\beta(s) = (x(s), \theta(s), z(s))$  solução de (1.6), então:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds}(\beta(s)) &= 2z(s)z'(s) - az'(s) \cos \theta(s) + az(s)\theta'(s)\text{sen} \theta(s) + 2b\theta'(s) \cos \theta(s)\text{sen} \theta(s) \\ &= (2z(s) - a \cos \theta(s))z'(s) + \theta'(s)(az(s)\text{sen} \theta(s) + 2b \cos \theta(s)\text{sen} \theta(s)) \\ &= (2z(s) - a \cos \theta(s))z'(s) + \left( \frac{a \cos \theta(s) - az(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \right) (az(s) + 2b \cos \theta(s))z'(s) \\ &= -(a \cos \theta(s) - 2z(s))z'(s) + (a \cos \theta(s) - 2z(s))z'(s) = 0 \end{aligned}$$

Isto significa que  $F$  é constante ao longo das soluções do sistema (1.6). Sempre que  $az + 2b \cos \theta \neq 0$ , tem-se  $dF(x, \theta, z) \neq 0$ . Logo  $F$  é uma integral primeira para o sistema. Agora como  $F(0, 0, z_0) = 0$ , segue-se o resultado (1.7).  $\square$

**Definição 16.** *Uma curva  $\alpha = (x(s), 0, z(s))$  é dita uma curva perfil de uma LW - superfície hiperbólica de rotação, se ela é a projeção no plano  $(x, z)$  de uma solução do sistema de equações diferenciais associado a expressão  $aH + bK = c$ , com  $z(s) > 0$ , para todo  $s$  no seu domínio.*

**Teorema 5** (Simetria). *Seja  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$  onde  $\alpha$  é solução de (1.6). Se para algum  $s_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sen}\theta(s_1) = 0$ , então  $\alpha$  é simétrica com a respectiva reta  $x = x(s_1)$ .*

*Demonstração.* Como  $z'(0) = 0$ , sem perda de generalidade podemos supor que  $x(s_1) = 0$ , sabemos que  $(x(s), \theta(s), z(s))$  é solução de (1.6), então consideramos as curvas definidas abaixo:

$$\gamma(s) := (\bar{x}(s), \bar{\theta}(s), \bar{z}(s)) = (-x(s + s_1), -\theta(s + s_1), z(s + s_1))$$

$$\beta(s) := (\hat{x}(s), \hat{\theta}(s), \hat{z}(s)) = (x(s_1 - s), \theta(s_1 - s), z(s_1 - s)).$$

Derivando ambas as curvas em relação a  $s$  obtemos:

$$\gamma'(s) = (-x'(s + s_1), -\theta'(s + s_1), z'(s + s_1)) \text{ e,}$$

$$\beta'(s) = (-x'(s_1 - s), -\theta'(s_1 - s), z'(s_1 - s)).$$

Daí,

$$-x'(s + s_1) = -\cos \theta(s + s_1) = -\cos \theta(-\theta(s + s_1)), \text{ implicando que } \bar{x}'(s) = -\cos \bar{\theta}(s)$$

e,

$$z'(s + s_1) = \text{sen}\theta(s + s_1) = -\text{sen}(-\theta(s + s_1)), \text{ implicando que } \bar{z}'(s) = -\text{sen}\bar{\theta}(s).$$

De modo análogo,

$$x'(s_1 - s) = -\cos \theta(s_1 - s), \text{ implicando que } \hat{x}'(s) = -\cos \hat{\theta}(s) \text{ e}$$

$$z'(s_1 - s) = -\text{sen}\theta(s_1 - s), \text{ implicando que } \hat{z}'(s) = -\text{sen}\hat{\theta}(s)$$

Temos ainda que

$$-\theta'(s_1 + s) = \frac{-a \cos \theta(s + s_1) + 2z(s + s_1)}{az(s + s_1) + 2b \cos \theta(s + s_1)},$$

donde

$$\bar{\theta}'(s) = \frac{-a \cos(-\bar{\theta}(s)) + 2\bar{z}(s)}{a\bar{z}(s) + 2b \cos \bar{\theta}(s)} = -\frac{a \cos(\bar{\theta}(s)) - 2\bar{z}(s)}{a\bar{z}(s) + 2b \cos \bar{\theta}(s)}.$$

Analogamente, obtemos

$$-\theta'(s_1 - s) = \frac{-a \cos \theta(s_1 - s) + 2z(s_1 - s)}{az(s_1) + 2b \cos \theta(s_1 - s)},$$

donde

$$\hat{\theta}'(s) = \frac{-\mathbf{a} \cos \hat{\theta}(s) + 2\hat{z}(s)}{\mathbf{a}\hat{z}(s) + 2\mathbf{b} \cos \hat{\theta}(s)} = \frac{\mathbf{a} \cos \hat{\theta}(s) - 2\hat{z}(s)}{\mathbf{a}\hat{z}(s) + 2\mathbf{b} \cos \hat{\theta}(s)}.$$

Segue-se que  $\gamma$  e  $\beta$  são soluções do mesmo sistema de equações diferencial, com condição inicial  $\gamma(0) = (0, 0, z(0)) = \beta(0)$ . Logo pelo Teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias segue-se que ambas a curvas são iguais, isto é:

$$\begin{cases} x(s_1 - s) = -x(s + s_1) \\ z(s_1 - s) = z(s + s_1) \\ \theta(s_1 - s) = -\theta(s + s_1). \end{cases}$$

□

**Corolário 2.** *Se  $(x(s), \theta(s), z(s))$  é solução de (1.6), definida no seu intervalo maximal  $I(z_0) = (\omega_-, \omega_+)$ , então  $-\omega_- = \omega_+ = r$ , com  $r > 0$ .*

*Demonstração.* De fato,  $z'(0) = \text{sen}\theta(0) = \text{sen}(0) = 0$ , daí pelo Teorema de Simetria, notando que  $x(0) = 0$  temos que  $z(-s) = z(s)$  para todo  $s \in I(z_0)$ . Logo  $-\omega_- = \omega_+ = r$ . □

Analizaremos o retrato de fase do sistema (1.6). Projetando o sistema (1.6) no plano  $(\theta, z)$ , obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \theta'(s) = \frac{\mathbf{a} \cos \theta(s) - 2z(s)}{\mathbf{a}z(s) + 2\mathbf{b} \cos \theta(s)} \\ z'(s) = \text{sen}\theta(s) \\ \theta(0) = 0, z(0) = z_0, \end{cases} \quad (1.8)$$

definido no conjunto aberto

$$\Omega_0 = \{(\theta, z); \theta, z \in \mathbb{R}, z \neq -(2\mathbf{b} \cos \theta)/\mathbf{a}\}.$$

Como as funções seno e coseno são periódicas, então é suficiente estudar (1.8) para  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Note que o sistema está associado ao campo:

$$V(\theta, z) = ((\mathbf{a} \cos \theta - 2z)/(\mathbf{a}z + 2\mathbf{b} \cos \theta), \text{sen}\theta),$$

definido em  $\Omega_0$ .



Considerando a região  $\{(\theta, z); \theta \in [0, 2\pi], z > 0, z \neq (-2b \cos \theta)/a\}$ , temos que  $V$  tem como singularidade apenas:

$$P_1 = (0, a/2) \text{ e } P_2 = (2\pi, a/2).$$

Pois, o campo  $V(\theta, z)$  se anula em  $\{(\theta, z); \theta \in [0, 2\pi], z > 0, z \neq -(2b \cos \theta)/a\}$  se, e somente se,

$$\frac{a \cos \theta - 2z}{az + 2b \cos \theta} = 0 \text{ e } \operatorname{sen} \theta = 0,$$

isto ocorre se, e somente se,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\theta = 2\pi$  e  $z = (a \cos \theta)/2$ .

Note que

- Se  $\theta = 0$ , então  $z = a/2$ .
- Se  $\theta = 2\pi$ , então,  $z = a/2$ .
- Porém, se  $\theta = \pi$ , então  $z = -a/2 < 0$  que é uma contradição.

Portanto as únicas singularidades do campo  $V$  são os pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Vamos agora classificar as singularidades utilizando a linearização do sistema, para isto vamos calcular a derivada  $DV(\theta, z)$  do campo  $V(\theta, z)$ , lembrando que

$$DV(\theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial \theta} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$DV(\theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{-a \operatorname{sen} \theta \cdot (az + 2b \cos \theta) + (a \cos \theta - 2z) \cdot 2b (\operatorname{sen} \theta)}{(az + 2b \cos \theta)^2} & \frac{-(a^2 + 4b) \cdot \cos \theta}{(az + 2b \cos \theta)^2} \\ \cos \theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que

$$DV(P_1) = DV(0, a/2) = \begin{bmatrix} 0 & -4/\Delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = DV(2\pi, a/2) = DV(P_2).$$

Conseqüentemente o polinômio característico da matriz  $DV(\pm P_1)$  é dado por  $q(\lambda) = \lambda^2 + (4/\Delta) = 0$ , donde os autovalores nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  são dados por  $\lambda_1 = 2/\sqrt{-\Delta}$  e  $\lambda_2 = -2/\sqrt{-\Delta}$ . Assim, as singularidades são pontos de sela, pois,  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , como a parte real de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são diferentes de zero as singularidades são do tipo hiperbólica.

Vamos calcular os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Se  $\vec{v}_1 = (\alpha, \beta)$  é um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$ , então:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4/\Delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha/\sqrt{-\Delta} \\ 2\beta/\sqrt{-\Delta} \end{bmatrix}$$

O que implica,

$$\begin{aligned} -4\beta/\Delta &= 2\alpha/\sqrt{-\Delta} \\ \alpha &= 2\beta/\sqrt{-\Delta}. \end{aligned}$$

Tomando  $\alpha = \pi/3$ , obtemos  $\beta = (\pi\sqrt{-\Delta})/6$ , daí  $\vec{v}_1 = (\pi/3, \pi\sqrt{-\Delta}/6)$ . De modo análogo, obtemos  $\vec{v}_2 = (-2\pi/3\sqrt{-\Delta}, \pi/3)$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2$ . Multiplicando  $\vec{v}_2$  por  $\lambda = \sqrt{-\Delta}/2$ , vemos que  $\vec{v}_1$  e  $\lambda\vec{v}_2$  são ortogonais. O mesmo procedimento é feito para a singularidade  $P_2$ .

Faremos uma análise detalhada das soluções do sistema (1.6) e no final do capítulo 4 esboçaremos o retrato de fase do sistema.

# Capítulo 2

## O caso em que $0 < z_0 \leq \frac{a}{2}$

Neste capítulo discutiremos o primeiro caso:  $0 < z_0 \leq a/2$ . Para isto dividiremos o capítulo em duas seções.

### 2.1 O caso em que $0 < z_0 < \frac{a}{2}$

Nesta seção veremos que uma LW - *superfície hiperbólica de rotação* tem curvatura Gaussiana positiva e não é completa.

**Lema 1.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8), com  $0 < z_0 < a/2$ , então existe  $\delta > 0$  tal que:*

(a)  $\theta'(s) < 0$  e  $z''(s) < 0$ , para todo  $s \in [0, \delta)$ .

(b)  $z'(s) < 0$ , para todo  $s \in (0, \delta)$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\theta'(0) = (a - 2z_0)/(az_0 + 2b)$ , e  $z_0 < a/2 < (-2b)/a$  temos que  $a - 2z_0 > 0$  e  $az_0 + 2b < 0$ . Daí  $\theta'(0) < 0$  e pela continuidade de  $\theta'$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta_1)$ .

Por outro lado,  $z'(s) = \sin\theta(s)$  implica que  $z''(s) = \theta'(s) \cos\theta(s)$ , daí tem-se que  $z''(0) = \theta'(0) \cos\theta(0) = \theta'(0) < 0$ , pela continuidade de  $z''$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $z''(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta_2)$  e, mais ainda,  $z''$  é decrescente no intervalo  $[0, \delta_2)$ , logo  $s > 0$  implica que  $z'(s) < z'(0) = 0$ .

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , segue que  $\theta'(s) < 0$  e  $z''(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ , pois  $\delta \leq \delta_1$ , e  $z' < 0$  para todo  $s \in (0, \delta)$ , pois  $\delta \leq \delta_2$ . Provando assim os itens (a) e (b).  $\square$

**Proposição 7.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8), onde  $0 < z_0 < a/2$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então desde que  $z(s) > 0$  vale:*

(a)  $z'(s) < 0$ , para todo  $s \in (0, r)$ .

(b)  $\theta'(s) < 0$ , para todo  $s \in [0, r)$ .

(c)  $z''(s) < 0$ , para todo  $s \in [0, r)$ .

*Demonstração.* (a) Suponhamos, por contradição, que exista  $0 < \hat{s} < r$  tal que  $z'(\hat{s}) \geq 0$ . Pelo lema anterior, existe  $\delta > 0$  com  $z'(s) < 0$  para todo  $s$  em  $(0, \delta)$  e pelo Teorema do Valor Intermediário existe  $s_1 \in (\delta, \hat{s}]$  tal que  $z'(s_1) = 0$ , seja  $s_1$  o primeiro valor onde  $z'$  se anula. Como consequência teremos que:

(i)  $z''(s_1) \geq 0$ .

Pois do contrário, se fosse  $z''(s_1) < 0$ , então para todo  $s$  suficientemente próximo de  $s_1$  teríamos que:  $s > s_1$  implicando que  $z'(s) < 0$  e  $s < s_1$  o que implica  $z'(s) > 0$ , pois  $z''(s) < 0$ . Contrariando o fato de  $z'(s) < 0$ , para todo  $s$  em  $(0, s_1)$ , logo  $z''(s_1) \geq 0$ .

(ii)  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, s_1]$ .

Suponhamos por contradição, que exista  $0 < s \leq s_1$  tal que  $\theta'(s) \geq 0$ . Pelo lema anterior, podemos supor que  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, podemos escolher  $0 < s_2 \leq s_1$  o primeiro ponto onde  $\theta'$  se anula. Onde,

$$0 = \theta'(s_2) = \frac{a \cos \theta(s_2) - 2z(s_2)}{az(s_2) + 2b \cos \theta(s_2)}, \text{ implicando que } \cos \theta(s_2) = 2z(s_2)/a.$$

Consideramos a função quadrática  $f(z) = z^2 - az - b$ , onde  $\Delta = a^2 + 4b$ , cuja o gráfico é uma parábola que não toca o eixo  $x$ .

Temos ainda que  $f'(z) = 2z - a$ , daí  $z = a/2$  é ponto crítico de  $f$ . Além disso,  $f''(a/2) = 2 > 0$ , assim  $a/2$  é ponto de mínimo absoluto de  $f$ . Como  $z_0 < a/2$ , então:

$$-f(z_0) < -f(a/2) = (a^2 + 4b)/4.$$

Note que  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b$ , daí

$$\begin{aligned} -z(s_2)^2 - (4bz(s_2)^2)/(a^2) &= z_0^2 - az_0 - b = f(z_0) \Rightarrow \\ -z(s_2)^2(1 + 4b/a^2) &= f(z_0) . \end{aligned}$$

Segue-se

$$\begin{aligned} z(s_2)^2(1 + 4b/a^2) &= -f(z_0) < -f(a/2) = (a^2 + 4b)/4 \Rightarrow \\ z(s_2)^2 &> a^2/4 > z_0^2 = z(0)^2 . \end{aligned}$$

Assim, obtemos uma contradição, pois sendo  $z'(s) \leq 0$  no intervalo  $(0, s_1]$  tem-se que  $z(s)$  é não crescente no intervalo  $[0, s_1]$ . Portanto  $\theta'(s) < 0 \in [0, s_1]$ .

Agora, como  $z'(s) = \text{sen} \theta(s)$  tem-se  $z'(s_1) = 0$  se, e só se,  $\cos \theta(s) = \pm 1$ , pelo fato

de  $z''(s_1) = \theta'(s_1) \cos \theta(s_1) \geq 0$  e  $\theta'(s_1) < 0$ , chegamos que  $\theta(s_1) = -\pi$ .

Por (1.7),  $z(s_1)^2 + \mathbf{a}z(s_1) - \mathbf{b} = z_0^2 - \mathbf{a}z_0 - \mathbf{b}$  implicando que  $z(s_1)^2 + \mathbf{a}z(s_1) + \mathbf{a}z_0 - z_0^2 = 0$ .

Consequentemente

$$z(s_1) = \frac{-\mathbf{a} \pm \sqrt{\mathbf{a}^2 - (4\mathbf{a}z_0 - z_0^2)}}{2} = \frac{-\mathbf{a} \pm \sqrt{(\mathbf{a} - 2z_0)^2}}{2}. \quad (2.1)$$

Donde  $z(s_1) = -z_0 < 0$  ou  $z(s_1) = -\mathbf{a} + z_0 < 0$ , contradição. Portanto  $z'(s) < 0$  para todo  $s \in (0, r)$ .

(b) Pelo lema anterior, existe  $\delta > 0$  tal que  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta]$ . Suponhamos por contradição, que exista  $0 < s_1 < r$  tal que  $\theta'(s_1) \geq 0$ . Seja  $0 < s_2 \leq r$  o primeiro ponto onde  $\theta'(s_2) = 0$ , temos que

$$0 = \theta'(s_2) = \frac{\mathbf{a} \cos \theta(s_2) - 2z(s_2)}{\mathbf{a}z(s_2) + 2\mathbf{b} \cos \theta(s_2)} \Rightarrow \cos \theta(s_2) = \frac{2z(s_2)}{\mathbf{a}}. \quad (2.2)$$

De  $z(s)^2 - \mathbf{a}z(s) \cos \theta(s) - \mathbf{b} \cos^2 \theta(s) = (z_0^2 - \mathbf{a}z_0 - \mathbf{b}) = f(z_0)$  obtemos

$$z(s_2)^2 \left( \frac{\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2} \right) = -f(z_0) < -f(\mathbf{a}/2) = \frac{\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}}{4}. \quad (2.3)$$

Assim  $z(s_2)^2 > \frac{\mathbf{a}^2}{4} > z_0^2 = z(0)^2$ .

Donde  $0 < s_2 < r$ , com  $z(0) < z(s_2)$ . Contradição, portanto  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

(c) Suponhamos, por contradição, que exista  $0 \leq s_0 < r$  tal que  $z''(s_0) = 0$ , temos que  $0 = z''(s_0) = \theta'(s_0) \cos \theta(s_0)$ , como  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, r)$ , segue - se que  $\cos \theta(s_0) = 0$ .

Pelo item (b)

$$\theta'(s) = \frac{\mathbf{a} \cos \theta(s) - 2z(s)}{\mathbf{a}z(s) + 2\mathbf{b} \cos \theta(s)} \neq 0, \quad (2.4)$$

daí  $\mathbf{a} \cos \theta(s) - 2z(s)$  não muda de sinal  $\in [0, r)$ , como  $\mathbf{a} \cos \theta(0) - 2z_0 = \mathbf{a} - 2z_0 > 0$ , pois  $z_0 < \mathbf{a}/2$ , segue-se que  $\mathbf{a} \cos \theta(s) - 2z(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ . Sendo  $\cos \theta(s_0) = 0$  obtemos que  $-2z(s_0) > 0$ , contradição.

Portanto,  $z''(s) < 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

□

**Corolário 3.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8), onde  $0 < z_0 < \mathbf{a}/2$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então desde que  $z(s) > 0$ :*

1.  $z'(s) > 0$ , para todo  $s \in (-r, 0)$ .

2.  $\theta'(s) < 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ .

3.  $z''(s) < 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ .

*Demonstração.* Note que  $z'(0) = \text{sen}(0) = 0$ , daí pelo Teorema de Simetria tem-se:

$$z(s) = z(-s), \text{ implicando que } z'(s) = -z'(-s) \text{ e } z''(s) = z''(-s);$$

$$\theta(s) = -\theta(-s), \text{ implicando que } \theta'(s) = \theta'(-s) \text{ e } \theta''(s) = -\theta''(-s).$$

Pela proposição anterior, temos  $-z'(-s) = z'(s) < 0$ , para todo  $s \in (0, r)$ . Daí  $z'(s) > 0$ , para todo  $s \in (-r, 0)$ , provando o item (a).

Pela proposição anterior, temos  $\theta'(s) = \theta'(-s) < 0$ , para todo  $s \in [0, r)$ , donde  $\theta'(s) < 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ , provando o item (b).

Novamente pela proposição anterior, temos  $z''(-s) = z''(s) < 0$ , para todo  $s \in [0, r)$ , logo  $z''(s) < 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ , provando o item (c).  $\square$

**Proposição 8.** *Se  $(x(s), \theta(s), z(s))$ , é solução de (1.6) com  $0 < z_0 < a/2$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então existe  $s_1 \in (0, r)$  tal que  $z(s_1) = 0$ .*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição, que  $z(s) > 0$  para todo  $s \in (0, r)$ . Pela proposição anterior,  $\theta'(s) < 0$ ,  $z'(s) < 0$  e  $z''(s) = \theta'(s) \cos \theta(s) < 0$  para todo  $s \in (0, r)$ . Assim as funções  $\theta(s)$  e  $z(s)$  são estritamente decrescente no intervalo  $(0, r)$ , com  $-\pi/2 < \theta(s) < 0$  e  $0 < z(s) < a/2$ , para todo  $s \in (0, r)$ . Logo existem  $\lim_{s \rightarrow r^-} \theta(s) = \theta_1$  e  $\lim_{s \rightarrow r^-} z(s) = z_1$ . Existem duas possibilidades para  $(\theta_1, z_1)$ :

1.  $(\theta_1, z_1)$  está em  $\Omega_0$ , ou

2.  $z_1 = (-2b \cos \theta_1)/a$ .

Se  $(\theta_1, z_1) \in \Omega_0$ , então pela Proposição 5 temos que  $r = +\infty$  e  $(\theta_1, z_1)$  é uma singularidade do campo  $V(\theta, z) = ((a \cos \theta - 2z)/(az + 2b \cos \theta), \text{sen} \theta)$ , mas as únicas singularidades do campo  $V$ , na região  $\{(\theta, z); z \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } z \neq (-2b \cos \theta)/a\}$ , são os pontos  $P_1 = (0, a/2)$  e  $P_2 = (2\pi, a/2)$ . Portanto 1. não pode ocorrer.

Suponhamos, agora que ocorra o item 2., isto é,  $z_1 = (-2b \cos \theta_1)/a$ . Pela equação (1.7) temos que  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b = f(z_0)$ .

Daí fazendo  $s$  tender para  $r$  pela esquerda, obtemos,

$$z_1^2 - az_1 \cos \theta_1 - b \cos^2 \theta_1 = f(z_0). \quad (2.5)$$

Como  $\cos \theta_1 = (-az_1)/2b$ , segue-se que  $z_1^2 - az_1(-az_1/2b) - b(a^2z_1^2/4b^2) = f(z_0)$ , implicando que  $(4bz_1^2 + a^2z_1^2)/4b = f(z_0)$ . Donde obtemos  $z_1^2 = \frac{4bf(z_0)}{a^2+4b} > \frac{4bf(\frac{a}{2})}{a^2+4b} = -b$ .

Pelo fato que a função  $z$  é decrescente no intervalo  $(0, r)$ , tem-se que  $-b < z_1^2 < z_0^2 < a^2/4$ , logo  $a/2 > (-2b)/a$  que é uma contradição. Logo a função  $z(s)$  se anula em algum ponto  $s \in (0, r)$ . Denotaremos por  $s_1$  o primeiro ponto onde  $z$  se anula.

□

**Teorema 6.** *Seja  $\alpha = \alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , onde  $\alpha$  é solução de (1.6). Assuma que a condição inicial  $z_0$  satisfaça  $0 < z_0 < a/2$ , então:*

1. *A curva  $\alpha$  é gráfico em algum intervalo limitado  $(-x_1, x_1)$  do eixo  $x$ . Em particular  $\alpha$  é mergulhada.*
2. *A curva  $\alpha$  intersecta o eixo de rotação em  $x = \pm x_1$ .*
3. *A curva  $\alpha$  é côncava com exatamente um ponto de máximo.*

*Demonstração.* Seja  $0 < s_1 < r$  o primeiro ponto, obtido pela proposição anterior, tal que  $z(s_1) = 0$ . Como  $\theta'(s) < 0$  e  $z''(s) = \theta'(s) \cos \theta(s) < 0$  para todo  $s \in (-s_1, s_1)$ , vemos que  $\cos \theta(s) > 0$  para todo  $s \in (-s_1, s_1)$ . Daí  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  para todo  $s \in (-s_1, s_1)$ , isto é, a função  $x(s)$  é estritamente crescente em  $(-s_1, s_1)$ .

Seja  $x_1 = x(s_1)$ , pelo Teorema de Simetria temos que  $-x_1 = x(-s_1)$ . Assim obtemos que  $x : (-s_1, s_1) \rightarrow (-x_1, x_1)$  é injetiva logo possui inversa,  $\varphi : (-x_1, x_1) \rightarrow (-s_1, s_1)$  tal que  $s = \varphi(x)$  para todo  $x \in (-x_1, x_1)$ . Segue-se que  $z = z(s) = z(\varphi(x)) := \psi(x)$ . Logo  $\alpha = (x, 0, z) = (x, 0, \psi(x))$  no intervalo  $(-x_1, x_1)$ . Portanto  $\alpha$  é gráfico, em particular é mergulhada, provando o item 1.

O item 2 segue-se diretamente pela proposição anterior, pois,  $z(s_1) = z(-s_1) = 0$ .

Quanto ao item 3, note que  $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\alpha'(0) = (1, 0, 0)$  e mais, como  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (-s_1, 0)$  e  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, s_1)$ , temos que:

$$\psi'(x) = \frac{dz}{ds}(\varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} > 0 \text{ no intervalo } (-x_1, 0) \text{ e } \psi'(x) < 0 \text{ no intervalo } (0, x_1),$$

isto significa que a função  $\psi$  tem um único ponto crítico em  $x = 0$ .

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= z''(\varphi(x)) \left[ \frac{1}{x'^2(\varphi(x))} \right] + \frac{\theta'(\varphi(x)) \operatorname{sen} \theta(\varphi(x)) \cdot z'(\varphi(x))}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} \\ &= z''(\varphi(x)) \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} \right] + \frac{\theta'(\varphi(x)) \operatorname{sen}^2 \theta(\varphi(x))}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} < 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

para todo  $x \in (-x_1, x_1)$ . Logo a função  $\psi$  é côncava, conseqüentemente  $\alpha$  é côncava.

Pelo fato de  $\psi$  ter um único ponto crítico, segue-se que tal ponto crítico é ponto de máximo da curva  $\alpha = (x(s), 0, z(s))$ .  $\square$

**Teorema 7.** *Seja  $\mathcal{S}$  uma LW - superfície hiperbólica de rotação, onde sua curva perfil  $\alpha$  definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$  com  $0 < z_0 < \alpha/2$  é solução de (1.6). Então  $\mathcal{S}$  tem as seguintes propriedades:*

1. *A superfície é mergulhada.*
2. *A curvatura Gaussiana de  $\mathcal{S}$  é positiva.*
3. *A superfície não é completa. Além disso,  $\mathcal{S}$  tem exatamente dois pontos singulares que coincidem com a interseção de  $\mathcal{S}$  com o eixo de rotação.*

*Demonstração.* O item (1) segue-se pelo teorema anterior, pois se a curva perfil é mergulhada então a superfície de rotação é mergulhada.

Quanto ao item (2), note que  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  e  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in (-s_1, s_1)$ , onde  $s_1$  é o primeiro ponto obtido pela proposição anterior tal que  $z(s_1) = 0$ . Daí temos que:

$$k(s) = \frac{-\theta'(s) \cos \theta(s)}{z(s)} > 0,$$

para todo  $s \in (s_1, s_1)$ .

Agora para o item (3), consideremos  $X(s, \phi) = (x(s), z(s) \cos \phi, z(s) \operatorname{sen} \phi)$ , uma superfície parametrizada, temos que  $P = (s, \phi)$  é ponto singular de  $X$  se, e só se,  $\frac{\partial X}{\partial s} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} = \vec{0}$ .

Notemos que

$$\frac{\partial X}{\partial s} = (x'(s), z'(s) \cos \phi, z'(s) \operatorname{sen} \phi) \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial \phi} = (0, -z(s) \operatorname{sen} \phi, z(s) \cos \phi). \quad (2.7)$$

Daí  $\frac{\partial X}{\partial s} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} = (z(s) \operatorname{sen} \theta, -z(s) \cos \theta \cos \phi, -z(s) \cos \theta \operatorname{sen} \phi)$ , assim  $\frac{\partial X}{\partial s} \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi} = \vec{0}$  se, e só se,  $z(s) = 0$  para algum  $s \in I(z_0)$ . Logo os únicos pontos singulares são onde  $\mathcal{S}$  toca o



eixo  $x$ .

Assim  $\mathcal{S}$  não pode ser completa, pois, a curva  $\alpha$  que é uma geodésica toca o eixo  $x$  em  $s = \pm s_1$ .

Outra maneira de vermos que  $\mathcal{S}$  não é completa é a seguinte:

Suponhamos, por contradição, que  $\mathcal{S}$  seja completa então  $\mathcal{S}$  toca o eixo de rotação em  $s = \pm s_1$ , com  $\theta(\pm s_1) = \pm\pi/2$ .

Por (1.7), temos:

$$z(\pm s_1)^2 - az(\pm s_1) \cos \theta(\pm s_1) - b \cos^2 \theta(\pm s_1) = z_0^2 - az_0 - b.$$

Como  $z(\pm s_1) = 0$  e  $\cos(\theta(\pm s_1)) = 0$  obtemos,  $z_0^2 - az_0 - b = 0$ , o que é uma contradição, pois  $a^2 + 4b < 0$ .

Portanto, a superfície  $\mathcal{S}$  não pode ser completa. □

## 2.2 O caso em que $z_0 = \frac{a}{2}$

Nesta seção veremos que a LW - superfície hiperbólica de rotação é um cilindro reto.

**Teorema 8.** *Seja  $\alpha = \alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , onde  $\alpha$  é solução de (1.6). Assuma que a condição inicial em  $z_0$  satisfaz  $z_0 = a/2$ , então  $\alpha$  é um segmento de reta horizontal e  $\mathcal{S}$  é um cilindro reto.*

*Demonstração.* Consideramos  $\beta(s) = (\hat{x}(s), \hat{\theta}(s), \hat{z}(s)) = (s, 0, a/2)$ , temos que  $\beta(0) = (0, 0, \frac{a}{2})$  e  $\beta'(s) = (1, 0, 0) = (\cos \hat{\theta}(s), 0, \text{sen} \hat{\theta}(s))$ .

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, concluímos que  $\alpha = \beta$ .

Assim, a curva perfil  $\alpha$  é um segmento de reta horizontal, logo  $\mathcal{S}$  é um cilindro reto. □

## Capítulo 3

### O caso em que $\frac{a}{2} < z_0 < \frac{-2b}{a}$

Veremos neste capítulo que a LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$  tem curvatura Gaussiana negativa e não é completa.

**Lema 2.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8), com  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então existe  $\delta > 0$  tal que:*

1.  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ .
2.  $z''(s) > 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ .
3.  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, \delta)$ .

*Demonstração.* De fato,  $\theta'(0) = (a - 2z_0)/(az_0 + 2b)$ , como  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$  temos que  $a - 2z_0 < 0$  e  $az_0 + 2b < 0$ , daí  $\theta'(0) > 0$ . Agora pela continuidade de  $\theta'$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, \delta_1)$ .

Por outro lado,  $z'(s) = \text{sen}\theta(s)$  implicando que  $z''(s) = \theta'(s) \cos\theta(s)$  o que implica  $z''(0) = \theta'(0) > 0$ , pela continuidade de  $z''$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $z''(s) > 0$  para todo  $s \in [0, \delta_2)$ .

Sendo  $z''(s) > 0$  no intervalo  $[0, \delta_2)$ , temos que  $z'(s)$  é crescente em  $[0, \delta_2)$ . Logo  $z'(s) > z'(0) = 0$  para todo  $s \in [0, \delta_2)$ . Tomamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  segue-se os itens 1, 2 e 3.

□

**Proposição 9.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8) com  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então:*

1.  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, r)$ .

2.  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

3.  $z''(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que exista  $s_1 \in (0, r)$  tal que  $z'(s_1) \leq 0$ . Pelo Lema anterior existe  $\delta > 0$  tal que  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, \delta)$ , daí pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos um  $s_2 \in [\delta, s_1]$  tal que  $z'(s_2) = 0$ . Consideramos  $s_2$  o primeiro número que satisfaz esta propriedade, como consequência obtemos.

(i)  $z''(s_2) \leq 0$ .

Pois, se  $z''(s_2) > 0$ , então pela continuidade de  $z''$ , em uma vizinhança de  $s_2$  teríamos:  $z''(s) > 0$ , daí  $s > s_2$  implica  $z'(s) > 0$  e  $\delta < s < s_2$  implica  $z'(s) < 0$ . Contradição, pois até  $s < s_2$  tem - se  $z'(s) > 0$ . Portanto  $z''(s_2) \leq 0$ .

(ii)  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, s_2]$ .

Suponhamos, por contradição, que exista  $s_3 \in (0, s_2]$  tal que  $\theta'(s_3) \leq 0$ . Pelo lema anterior temos que  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ . Assim, seja  $s_4 \in (\delta, s_2)$  o primeiro número onde  $\theta'(s) = 0$ , obtemos  $\theta'(s_4) = \frac{a \cos \theta(s_4) - 2z(s_4)}{az(s_4) + 2b \cos \theta(s_4)} = 0$  implicando que  $\cos \theta(s_4) = 2z(s_4)/a \leq 1$  o que implica  $z(s_4) \leq \frac{a}{2} < z_0 = z(0)$ .

Contradizendo o fato de  $z$  não decrescer no intervalo  $[0, s_2]$ . Portanto,  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, s_2]$ .

(iii)  $x'(s) = \cos \theta(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, s_2]$ .

Pois, se  $x'(s) = \cos \theta(s) = 0$  para algum  $s \in [0, s_2]$ , então  $\theta'(s) = (-2z(s))/(az(s)) < 0$ , contrazendo o item ii. Logo  $x'(s) = \cos \theta(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, s_2]$ .

Finalmente, notando que  $x'(0) = 1$ , temos que  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  no intervalo  $[0, s_2]$ . Daí  $z''(s_2) = \theta'(s_2) \cos \theta(s_2) > 0$ , contradizendo o item (i). Portanto  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, r)$ , provando o item 1.

Para provarmos o item 2, inicialmente mostraremos que  $\theta'(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

Suponhamos, por contradição, que  $\theta'(\hat{s}) = 0$  para algum  $\hat{s} \in [0, r)$ , temos:

$$0 = \theta'(\hat{s}) = \frac{a \cos \theta(\hat{s}) - 2z(\hat{s})}{az(\hat{s}) + 2b \cos \theta(\hat{s})} \Rightarrow \cos \theta(\hat{s}) = 2z(\hat{s})/a < 1 \Rightarrow z(\hat{s}) < a/2 < z(0). \quad (3.1)$$

Contradição, pois  $z(s)$  é crescente no intervalo  $[0, r)$ . Portanto,  $\theta'(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, r)$ . Como  $\theta'(0) > 0$ , segue-se que  $\theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

Quanto ao item 3, inicialmente provaremos que  $x'(s) = \cos \theta(s) \neq 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .

Suponhamos, por contradição, que  $x'(s) = \cos \theta(s) = 0$  para algum  $s \in [0, r)$ , então  $\theta'(s) = (-2z(s))/az(s) < 0$ . Contradizendo o item (2), portanto  $x'$  não muda de sinal em  $[0, r)$ .

Como  $x'(0) = 1 > 0$ , por continuidade temos que  $x'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ . Logo  $z''(s) = \theta'(s) \cos \theta(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ .  $\square$

**Corolário 4.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8) com  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então:*

1.  $z'(s) < 0$ , para todo  $s \in (-r, 0)$ .
2.  $\theta'(s) > 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ .
3.  $z''(s) > 0$ , para todo  $s \in (-r, 0]$ .

*Demonstração.* De fato, sendo  $z'(0) = 0$  e  $x(0) = 0$  segue pelo Teorema de Simetria que:

$z(-s) = z(s)$  o que implica  $-z'(-s) = z'(s)$ , donde obtemos que  $z''(-s) = z''(s)$  para todo  $s \in I(z_0)$ .

$\theta(-s) = -\theta(s)$  o que implica  $-\theta'(-s) = -\theta'(s)$ . Consequentemente,  $\theta''(-s) = -\theta''(s)$  para todo  $s \in I(z_0)$ .

Pela proposição anterior tem-se:

- $-z'(-s) = z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, r)$ , o que implica  $z'(-s) < 0$  para todo  $s \in (0, r)$ . Logo  $z'(s) < 0$  para todo  $s \in (-r, 0)$ , provando o item 1.
- $-\theta'(-s) = \theta'(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ , o que implica  $\theta'(-s) < 0$  para todo  $s \in [0, r)$ . Logo  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in (-r, 0]$ , provando o item 2.

Quanto ao item 3, como  $z''(-s) = z''(s) > 0$  para todo  $s \in [0, r)$ , segue-se que  $z''(s) > 0$  para todo  $s \in (-r, 0]$ .  $\square$

**Proposição 10.** *Se  $(\theta(s), z(s))$  é solução de (1.8) onde  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$ , definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$ , então  $r < +\infty$ .*

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que  $r = +\infty$ . Como  $z(s)$  é crescente em  $(0, +\infty)$ , temos que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = +\infty$ . Por outro lado,  $az_0 + 2b < 0$ , pois,  $z_0 < (-2b)/a$ , mas  $\lim_{s \rightarrow +\infty} [az(s) + 2b \cos \theta(s)] = +\infty$ , implica que existe  $\hat{s} \in (0, +\infty)$

tal que  $az(\hat{s}) + 2b \cos \theta(\hat{s}) = 0$ . Contradição, pois  $az(s) + 2b \cos \theta(s) \neq 0$  para todo  $s \in I(z_0)$ . Portanto  $r < +\infty$ .  $\square$

**Teorema 9.** *Seja  $\alpha = \alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , onde  $\alpha$  é solução de (1.6). Se  $a/2 < z_0 < (-2b)/a$ , então:*

1. *A curva  $\alpha$  é gráfico em algum intervalo limitado  $(-x_1, x_1)$  do eixo  $x$ . Em particular  $\alpha$  é mergulhada.*
2. *A curva  $\alpha$  é convexa, com exatamente um ponto de mínimo.*

*Demonstração.* Inicialmente, notemos que  $x'(s) = \cos \theta(s) \neq 0$  para todo  $s \in (-r, r)$ , pois se  $x'(s) = \cos \theta(s) = 0$  para algum  $s \in (-r, r)$ . Então  $\theta'(s) = (-2z(s))/(az(s)) < 0$ . Contradizendo o item 2 da Proposição 9 e o item 2 do Corolário 4. Portanto  $x'(s) \neq 0$  em  $(-r, r)$ .

Em particular,  $x'(0) = \cos(0) = 1 > 0$ . Pela continuidade da função  $x'$  segue-se que  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  para todo  $s \in (-r, r)$ . Logo a função  $x(s)$  é estritamente crescente em  $(-r, r)$  e mais,  $|x(s)| = |\int_0^s x'(t) dt| < r < +\infty$  para todo  $s \in (-r, r)$ . Daí existem  $x_1 = \lim_{s \rightarrow r^-} x(s)$  e  $-x_1 = \lim_{s \rightarrow -r^+} x(s) = \lim_{s \rightarrow -r^-} x(-s) = \lim_{s \rightarrow -r^+} x(s)$  e a função  $x : (-r, r) \rightarrow (-x_1, x_1)$  é injetiva, logo possui inversa  $\varphi : (-x_1, x_1) \rightarrow (-r, r)$  tal que  $s = \varphi(x)$  e  $z = z(s) = z(\varphi(x)) =: \psi(x)$ .

Portanto  $\alpha = (x, 0, \psi(x))$  é gráfico no intervalo limitado  $(-x_1, x_1)$ , conseqüentemente  $\alpha$  é mergulhada e o item 1 está provado.

Quanto ao item 2, note que  $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\alpha'(0) = (1, 0, 0)$  e mais, como  $z'(s) < 0$  para todo  $s \in (-s_1, 0)$  e  $z'(s) > 0$  para todo  $s \in (0, s_1)$ , temos que:

$$\psi'(x) = \frac{dz}{ds}(\varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} < 0 \text{ no intervalo } (-x_1, 0) \text{ e } \psi'(x) > 0 \text{ no intervalo } (0, x_1),$$

isto significa que a função  $\psi$  tem um único ponto crítico em  $x = 0$ .

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= z''(\varphi(x)) \left[ \frac{1}{x'^2(\varphi(x))} \right] + \frac{\theta'(\varphi(x)) \text{sen} \theta(\varphi(x)) \cdot z'(\varphi(x))}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} \\ &= z''(\varphi(x)) \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} \right] + \frac{\theta'(\varphi(x)) \text{sen}^2 \theta(\varphi(x))}{\cos^2 \theta(\varphi(x))} > 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

para todo  $x \in (-x_1, x_1)$ . Logo a função  $\psi$  é convexa, conseqüentemente  $\alpha$  é convexa.

Pelo fato de  $\psi$  ter um único ponto crítico, segue-se que tal ponto crítico é ponto de mínimo da curva  $\alpha = (x(s), 0, z(s))$ .  $\square$

**Teorema 10.** *Seja  $\mathcal{S}$  uma LW - superfície hiperbólica de rotação onde a curva perfil  $\alpha$  definida em seu intervalo maximal  $I(z_0) = (-r, r)$  satisfaz as hipótese do teorema anterior. Então  $\mathcal{S}$  satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *A superfície  $\mathcal{S}$  é mergulhada.*
2. *A curvatura Gaussiana de  $\mathcal{S}$  é negativa.*
3. *A superfície  $\mathcal{S}$  não é completa.*

*Demonstração.* O item 1 segue-se do teorema anterior, pois a curva perfil  $\alpha$  sendo mergulhada, implica que a superfície de rotação é mergulhada.

Pela Proposição 10 temos que  $z''(s) = \theta'(s) \cos \theta(s) > 0$ , para todo  $s \in I(z_0)$ , sendo  $z(s) > 0$  para todo  $s \in I(z_0)$  segue-se que

$$K(s) = -\frac{\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)} = (-z''(s))/z(s) < 0,$$

para todo  $s \in I(z_0)$ , provando assim o item 2.

Quanto ao item 3, sejam  $x_1 = \lim_{s \rightarrow r^-} x(s)$  e  $z_1 = \lim_{s \rightarrow r^-} z(s)$ . Temos que o ponto  $P_1 = (x_1, 0, z_1)$  não está na superfície  $\mathcal{S}$ . Suponhamos, por contradição, que  $\mathcal{S}$  seja completa, então estendendo suficientemente a curva  $\alpha$  que é uma geodésica atingimos o ponto  $P_1$ , o que é uma contradição.

Portanto a superfície  $\mathcal{S}$  não é completa. □

# Capítulo 4

## O caso em que $z_0 > \frac{-2b}{a}$

Veremos neste capítulo que a LW - *superfície hiperbólica de rotação*  $\mathcal{S}$  é periódica e completa.

Por (1.7) considerando,

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right) \quad (4.1)$$

temos que:

$$\varphi(0) = z_0 \text{ e } \varphi(s)^2 - a\varphi(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - (z_0^2 - az_0 - b) = 0.$$

Logo pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias,

$$z(s) = \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right). \quad (4.2)$$

**Lema 3.** *O intervalo maximal da solução  $(x(s), z(s), \theta(s))$  de (1.6) é toda reta  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Como  $x'(s) = \cos \theta(s)$  e  $z'(s) = \sin \theta(s)$  são funções limitadas, basta provarmos que  $\theta'(s)$  é limitada.

Note que  $\theta'(0) = (a - 2z_0)/(az_0 + 2b) < 0$ , pois  $z_0 > (-2b)/a > a/2$  implicando que  $a - 2z_0 < 0$  e  $az_0 + 2b > 0$ . Considerando a função  $f(z) = z^2 - az - b$ , temos que  $f$  é crescente para  $z > a/2$ .

Como

$$z_0 > (-2b)/a > a/2 \quad (4.3)$$

e

$$f((-2b)/a) = b(a^2 + 4b)/a^2, \quad (4.4)$$

obtemos que  $z_0^2 - az_0 - b = f(z_0) = f(-2b/a) + \epsilon = \frac{b(a^2+4b)}{a^2} + \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$ .

Por (4.2), segue-se

$$\begin{aligned}
 z(s) &= \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f((-2b)/a) + 4\epsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + \frac{4b(a^2 + 4b)}{a^2} + 4\epsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b)(\cos^2 \theta(s) - 1) + \frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} + 4\epsilon} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) + \sqrt{\frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} + 4\epsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( a \cos \theta(s) - \frac{(a^2 + 4b)}{a} + \epsilon' \right), \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

para algum  $\epsilon' > 0$  tal que

$$\sqrt{\frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} + 4\epsilon} = \frac{-(a^2 + 4b)}{a} + \epsilon'. \tag{4.6}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
 az(s) + 2b \cos \theta(s) &\geq \frac{1}{2} (a^2 \cos \theta(s) - (a^2 + 4b) + a\epsilon') + 2b \cos \theta(s) \\
 &= \frac{(a^2 + 4b)}{2} \cos \theta(s) - \frac{(a^2 + 4b)}{2} + \frac{a}{2} \epsilon' \\
 &= \frac{(a^2 + 4b)}{2} (\cos \theta(s) - 1) + \frac{a}{2} \epsilon'. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Pelo fato de  $\Delta = a^2 + 4b < 0$  e  $\cos \theta(s) - 1 < 0$ , obtemos

$$az(s) + 2b \cos \theta(s) \geq -\frac{a^2+4b}{2} (\cos \theta(s) - 1) + a/2\epsilon' := \delta_1 > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 a \cos \theta(s) - 2z(s) &= a \cos \theta(s) - (a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)}) \\
 &= -\sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \geq -\sqrt{4f(z_0)} \\
 &= -2\sqrt{f(z_0)} := \eta_1 < 0. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
 az(s) + 2b \cos \theta(s) &= \frac{1}{2} \left( a^2 \cos \theta(s) + a\sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right) \\
 &\quad + 2b \cos \theta(s) \\
 &= \frac{(a^2+4b)}{2} \cos \theta(s) + \frac{a}{2} \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)}
 \end{aligned}$$



$$\leq -\frac{(a^2+4b)}{2} + a\sqrt{f(z_0)} := \delta_2 > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a \cos \theta(s) - 2z(s) &= a \cos \theta(s) - a \cos \theta(s) - \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \\ &= -\sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \\ &\leq -\sqrt{(a^2 + 4b) + 4f((-2b)/a)} := \eta_2 < 0. \end{aligned}$$

Logo  $\eta_1 \leq a \cos \theta(s) - 2z(s) \leq \eta_2$  e  $\delta_2 < az(s) + 2b \cos \theta(s) \leq \delta_1$ . Portanto  $m = \eta_1/\delta_1 \leq \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \leq \eta_2/\delta_2 = M$ .

Pela Proposição 6, segue-se que  $(x(s), \theta(s), z(s))$  tem como intervalo maximal toda reta  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Obtemos pelo lema anterior que  $m \leq \theta'(s) \leq M$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , daí  $m \cdot s \leq \theta(s) \leq M \cdot s$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Isto significa que o gráfico de  $\theta$  está entre duas retas.

Como a derivada  $\theta' < 0$ , temos que  $\theta(s)$  é decrescente. Logo  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s) = -\infty$ .

Seja  $T > 0$  o primeiro número tal que  $\theta(T) = -2\pi$ , vamos provar que  $\alpha$  é uma curva periódica.

**Lema 4.** *Seja  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , com  $z(0) = z_0 > (-2b)/a$  e  $\alpha$  definida em  $\mathbb{R}$ . Seja  $T > 0$  o primeiro número tal que  $\theta(T) = -2\pi$ , então:*

$$\begin{aligned} x(s+T) &= x(s) + x(T); & x(s-T) &= x(s) - x(T); \\ z(s+T) &= z(s); & e \quad z(s-T) &= z(s); \\ \theta(s+T) &= \theta(s) - 2\pi; & \theta(s-T) &= \theta(s) + 2\pi. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Por (4.2), temos que

$$z(T) = 1/2 \left( a \cos(-2\pi) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2(-2\pi) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right) = z(0) = z_0.$$

Note que,

$$\begin{cases} x'(s+T) = \cos \theta(s+T) \\ z'(s+T) = \text{sen} \theta(s+T) \\ \theta'(s+T) = \frac{a \cos \theta(s+T) - 2z(s+T)}{az(s+T) + 2b \cos \theta(s+T)}, \end{cases} \quad (4.9)$$

com condição inicial  $x(0+T) = x(T)$ ,  $\theta(0+T) = -2\pi$  e  $z(0+T) = z(T)$ .

Por outro lado,

$$\begin{cases} (x(s) + x(T))' = x'(s) = \cos \theta(s) = \cos(\theta(s) - 2\pi) \\ z'(s) = \text{sen} \theta(s) = \text{sen}(\theta(s) - 2\pi) \\ (\theta(s) - 2\pi)' = \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} = \frac{a \cos(\theta(s) - 2\pi) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos(\theta(s) - 2\pi)}, \end{cases} \quad (4.10)$$

com condição inicial  $(x(0) + x(T), \theta(0) - 2\pi, z(0)) = (x(T), -2\pi, z(0)) = (x(T), -2\pi, z(T))$ .

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, segue-se que:

$$x(s + T) = x(s) + x(T)$$

$$z(s + T) = z(s)$$

$$\theta(s + T) = \theta(s) - 2\pi.$$

Como consequência temos,

$$x(s) = x(s - T + T) = x(s - T) + x(T), \text{ implicando que } x(s - T) = x(s) - x(T)$$

$$z(s) = z(s - T + T) = z(s - T), \text{ implicando que } z(s - T) = z(s)$$

$$\theta(s) = \theta(s - T + T) = \theta(s - T) - 2\pi, \text{ implicando que } \theta(s - T) = \theta(s) + 2\pi. \quad \square$$

**Teorema 11.** *Seja  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , onde  $\alpha$  é solução de (1.6), com  $z_0 > (-2b)/a$ , então:*

1. *A curva  $\alpha$  é invariante por um grupo de translações na direção do eixo  $x$ .*
2. *A função altura de  $\alpha$ , isto é, a função  $z = z(s)$  é periódica de período  $T$ .*
3. *Em cada período de  $z$ , a curva  $\alpha$  tem um máximo em  $s = 0$  e um mínimo em  $s = T_2$ . Além disso,  $\alpha$  é simétrica com as respectivas retas vertical  $x = 0$  e  $x = x(T_2)$ .*
4. *A curva  $\alpha$  tem auto-interseção e a curvatura tem sinal constante.*
5. *A parte de  $\alpha$  entre o máximo e o mínimo satisfaz que a função  $z(s)$  é estritamente decrescente com exatamente um ponto de tangente vertical. Entre o mínimo e o próximo máximo,  $z = z(s)$  é estritamente crescente com exatamente um ponto de tangente vertical.*
6. *A velocidade  $\alpha'$  gira em torno da origem.*

*Demonstração.* Seja  $G = \{g_n(x, z) = (x + nx(T), z); n \in \mathbb{Z}\}$ , onde  $T > 0$  é o primeiro número tal que  $\theta(T) = -2\pi$ , e  $g_0 = \text{id}$  e  $g_{n_1} \circ g_{n_2} = g_{n_1+n_2}$ . Com a operação de composição  $G$  é um grupo, pois,  $g_n \circ g_m(x, z) = g_{n+m}(x, z) = (x + (n + m)x(T), z) \in G$  para todo  $n, m$  inteiro. Além disso:

- $(g_n \circ g_m) \circ g_k = g_{n+m} \circ g_k = g_{n+m+k} = g_n \circ g_{m+k} = g_n \circ (g_m \circ g_k)$ , para todo  $m, n$  e  $k$  inteiros.

- $g_0 \circ g_n = g_n = g_n \circ g_0$ , para todo  $n$  inteiro.
- $g_n \circ g_{-n} = g_0 = g_{-n} \circ g_n$ , para todo  $n$  inteiro.

Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  temos que

$$\begin{aligned} (g_n \circ \alpha)(s) &= g_n(x(s), z(s)) = (x(s) + nx(T), z(s)) = (x(s + nT), z(s)) \\ &= (x(s + nT), z(s + nT)) = \alpha(s + nT). \end{aligned}$$

Portanto  $\alpha$  é invariante por  $G$  na direção do eixo  $x$  e isto prova o item 1.

O item 2 segue-se diretamente pelo lema anterior, pois  $z(s + T) = z(s) = z(s - T)$ .

Agora como  $\theta$  é estritamente decrescente em  $\mathbb{R}$ , então sejam  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < T$  tais que  $\theta(T_1) = -\pi/2$ ,  $\theta(T_2) = -\pi$  e  $\theta(T_3) = -3\pi/2$ . Sendo  $x'(s) = \cos \theta(s)$  e  $z'(s) = \sin \theta(s)$ , o comportamento da curva  $\alpha$  é dado na tabela:

$s$	$\theta$	$x(s)$	$z(s)$
$[0, T_1]$	$[0, -\pi/2]$	crescente	decrecente
$[T_1, T_2]$	$[-\pi/2, -\pi]$	decrecente	decrecente
$[T_2, T_3]$	$[-\pi, -3\pi/2]$	decrecente	crescente
$[T_3, T]$	$[-3\pi/2, -2\pi]$	crescente	crescente

Notemos que  $z'(T_2) = \sin(-\pi) = 0$  e  $z$  decresce em  $[0, T_2]$  e cresce em  $[T_2, T]$ , logo  $s = T_2$  é ponto de mínimo absoluto. Como  $z'(0) = \sin(0) = 0$  e  $z(s)$  decresce em  $[0, T_2]$  e cresce em  $[T_2, T]$ , então  $s = 0$  é ponto de máximo absoluto.

Pelo Teorema de Simetria, sendo  $z'(0) = z'(T_2) = 0$  e  $x(0) = 0$  segue-se que a curva perfil  $\alpha$  é simétrica com relação aos respectivos eixos  $x = 0$  e  $x = x(T_2)$ , provando o item 3.

Para que a curva  $\alpha$  tenha auto-interseções basta que  $x(T) \neq 0$  para toda condição inicial  $z_0 > (-2b)/a$ . Suponhamos, por contradição, que  $x(T) = 0$  temos que  $\alpha$  é uma curva fechada e convexa. Daí pelo Teorema dos Quatro Vértices, existem pelo menos quatro pontos no intervalo  $[0, T)$  tal que  $k'(s) = \theta''(s) = 0$ .

Notemos que

$$\theta''(s) = -\frac{2\sin^2\theta(s)(a^2 + 4b)(az(s)\cos\theta(s) + b\cos^2\theta(s) - z^2(s))}{(az(s) + 2b\cos\theta(s))^3} = 0 \quad (4.11)$$

se, e somente se,  $s = 0$  e  $s = T_2$  ou  $b\cos^2\theta(s) + az(s)\cos\theta(s) - z^2(s) = 0$ .

Olhando a equação acima como uma equação do segundo grau na variável  $\cos\theta(s)$ ,

seu discriminante é dado por:

$$\hat{\Delta} = z(s)^2(a^2 + 4b), \quad (4.12)$$

Como  $a^2 + 4b < 0$ , a equação não tem solução real o que é uma contradição. Portanto  $x(T) \neq 0$  para toda condição inicial  $z_0 > -(2b)/a$ , segue-se que a curva  $\alpha$  tem auto-interseções.

Para ver que a curvatura tem sinal constante, basta notar que  $k(s) = \theta'(s) < 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , assim provamos o item 4.

Temos que  $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), 0, \sin \theta(s))$  e mais,  $\cos \theta(s) = 0 \Leftrightarrow \theta(s) = (-3\pi)/2 \Leftrightarrow s = T_1$  em  $[0, T_2]$  e  $\cos \theta(s) = 0$  se, e somente se,  $\theta(s) = (-3\pi)/2$  se, e somente se,  $s = T_3$  em  $[T_2, T]$ .

Logo  $(0, -1)$  é o único ponto de tangente vertical em  $[0, T_2]$  e  $(0, 1)$  é o único ponto de tangente vertical em  $[T_2, T]$ , assim o item 5 está provado.

Como  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s) = -\infty$  e  $\theta(0) = 0$ , segue-se que  $\theta([0, +\infty)) = (-\infty, 0]$ . Logo  $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), 0, \sin \theta(s))$  gira em torno da origem, provando o item 6.  $\square$

**Teorema 12.** *Seja  $\mathcal{S}$  uma LW - superfície hiperbólica de rotação, onde sua curva perfil  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  é solução de (1.6) com  $z_0 > -(2b)/a$ , então:*

1. *A superfície  $\mathcal{S}$  tem auto-interseções.*
2. *A superfície  $\mathcal{S}$  é periódica e possui uma infinidade de simetrias verticais.*
3. *A superfície  $\mathcal{S}$  é completa.*
4. *A parte de  $\alpha$  entre dois pontos de tangente vertical consecutivos e contendo o máximo correspondente de  $z = z(s)$  com pontos de  $\mathcal{S}$  a curvatura Gaussiana é positiva; por outro lado, a parte que contém o mínimo a curvatura Gaussiana é negativa.*

*Demonstração.* O item 1 segue-se pelo fato de a curva perfil  $\alpha$  ter auto-interseções. Logo a superfície  $\mathcal{S}$  obtida pela rotação de  $\alpha$  em torno do eixo  $x$  tem auto-interseções.

Agora como a superfície é invariante por um grupo de isometrias, segue-se que  $\mathcal{S}$  é periódica. Pelo item 3 do teorema anterior, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\alpha$  tem simetrias vertical em  $[(n-1)T, nT]$ . Logo a superfície  $\mathcal{S}$  tem uma infinidade de simetrias verticais, provando o item 2.

Quanto ao item 3, a superfícies  $\mathcal{S}$  é completa, pois  $\mathcal{S}$  é fechada em  $\mathbb{R}^3$ . Sabemos que

$$K(s) = -\frac{\theta'(s) \cos \theta(s)}{z(s)} \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Como na parte de  $\alpha$  entre dois pontos verticais consecutivos, que contém o ponto de máximo de  $z = z(s)$ , tem-se  $\theta'(s) < 0$  e  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  para todo  $s \in [0, T_1]$  e  $[T_3, T]$ , segue que  $K(s) > 0$ .

Quanto a parte que contém o mínimo, isto é,  $[T_1, T_3]$  temos que  $x'(s) = \cos \theta(s) < 0$ ,  $\theta'(s) < 0$ , logo  $K(s) < 0$ . Assim o item 4 está provado.  $\square$

**Corolário 5.** *Seja  $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , assumamos que  $\alpha$  é solução de (1.6), onde  $z_0 > -(2b)/a$ , então o gráfico de  $\alpha$  fica entre duas retas  $z = z_0 - a$  e  $z = z_0$ , isto é,  $z_0 - a \leq z(s) \leq z_0$ , onde  $z(s)$  atinge o mínimo e o máximo em um conjunto de pontos discretos.*

*Demonstração.* Com efeito, a função  $z = z(s)$  é periódica de período  $T > 0$  e atinge o máximo em  $s = 0$  e  $s = T$  e o mínimo em  $s = T_2$ , com  $\theta(T_2) = -\pi$ .

Por (4.2), temos que:

$$\begin{aligned} z(T_2) &= 1/2 \left( a \cos(-\pi) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2(-\pi) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right) \\ &= 1/2 \left( -a + \sqrt{(a^2 + 4b) + 4(z_0^2 - az_0 - b)} \right) \\ &= 1/2 \left( -a + \sqrt{(2z_0 - a)^2} \right) \\ &= 1/2 (-a + (2z_0 - a)) \\ &= z_0 - a. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Como a função  $z(s)$  é periódica, segue-se que  $z_0 - a \leq z(s) \leq z_0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Pelo fato de o máximo e o mínimo serem atingidos em  $[(n-1)T, nT]$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , concluímos que são atingidos num conjunto de pontos discretos.  $\square$

Como anunciado na introdução e com objetivo de distinguir das superfícies com curvatura Gaussiana negativa constante em  $\mathbb{R}^3$ , obtemos o seguinte Corolário.

**Corolário 6.** *Existe uma família a um parâmetro de LW - superfícies hiperbólicas de rotação, que são completas e com auto-interseção em  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, as curvas que geram as superfícies são periódicas.*

*Demonstração.* Considere a família  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{L}}$  de curvas perfil, onde cada curva  $\alpha_i$  é solução de (1.6), com condição inicial  $z_0 > -(2b)/a$ . O resultado segue pelo teorema anterior.  $\square$

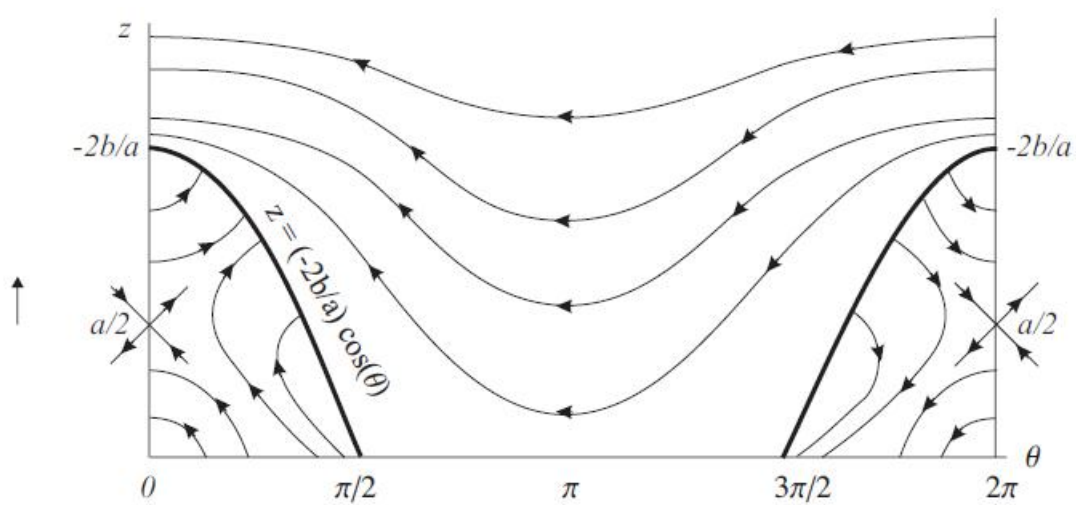


Figura 4.1: retrato de fase do sistema (1.6)

## Capítulo 5

# A nova família de LW - superfícies hiperbólica de rotação

Nas seções anteriores, consideramos a condição inicial  $\theta(0) = 0$ , como sendo o ângulo inicial da curva perfil  $\alpha$ .

Nesta seção, consideraremos  $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$  o ângulo inicial e  $(x(s), \theta(s), z(s))$  a solução da equação diferencial :

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \theta(s) \\ z'(s) = \operatorname{sen} \theta(s) \\ \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \\ x(0) = 0, z(0) = z_0, \theta(0) = -\pi/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

**Teorema 13.** *Uma integral primeira para o sistema (5.1) é dada por:*

$$z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = 0 \quad (5.2)$$

*Demonstração.* Sabemos que  $G(x, \theta, z) = z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s)$  é uma integral primeira para o sistema :

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \theta(s) \\ \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \\ z'(s) = \operatorname{sen} \theta(s) \end{cases}$$

Como a mesma é constante ao longo das soluções do sistema de equações diferenciais correspondente, tomamos a solução  $(x(s), \theta(s), z(s))$  de (5.1). Temos que,  $G(x(0), \theta(0), z(0)) = z_0^2$ , logo  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = 0$  é uma integral primeira para o sistema (5.1)

□

**Lema 5.** *Se  $(x(s), \theta(s), z(s))$  é solução de (5.1), então existe  $\delta > 0$  tal que:*

1.  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ .
2.  $z'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta)$ .
3.  $x'(s) < 0$  para todo  $s \in (0, \delta)$ .

*Demonstração.* De fato,  $\theta'(0) = -2/a < 0$ , daí pela continuidade de  $\theta'$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $\theta'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta_1)$ .

Como  $z'(0) = \text{sen}(-\pi/2) = -1 < 0$  e  $z'(s) = \text{sen}\theta(s)$  é contínua existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $z'(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta_2)$ .

Por outro lado,  $x''(0) = -\theta'(0)\text{sen}\theta(0) = \theta'(0) < 0$  e pela continuidade da função  $x'(s)$ , existe  $\delta_3 > 0$  tal que  $x''(s) < 0$  para todo  $s \in [0, \delta_3)$ . Assim a função  $x'(s)$  é estritamente decrescente no intervalo  $[0, \delta_3)$ , daí  $x'(s) < x'(0) = \cos\theta(0) < 0$  para todo  $s \in (0, \delta_3)$ .

Tomando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , segue-se 1 e 2 e 3. □

Vemos que para  $s > 0$  em uma vizinhança de  $s = 0$ , o numerador e o denominador de  $\theta'(s)$  são negativos e positivos respectivamente, pois  $a \cos\theta(0) - 2z(0) = -2z_0 < 0$  e  $az(0) + 2b \cos\theta(s) = az_0 > 0$ .

Temos ainda que para todo  $s$ ,  $az(s) + 2b \cos\theta(s)$  não se anula, pois do contrário se  $az(s) + 2b \cos\theta(s) = 0$  para algum  $s$ , então

$$0 = az(s) + 2b \cos\theta(s) \tag{5.3}$$

$$= \theta'(s)(a \cos\theta(s) - 2z(s)). \tag{5.4}$$

Assim,  $\cos\theta(s) = 2z(s)/a$  e  $\cos\theta(s) = (-az(s))/2b$ . Como  $\Delta = a^2 + 4b < 0$ , concluímos que  $(-az(s))/2b < 2z(s)/a$ , obtendo uma contradição.

Portanto,  $az(s) + 2b \cos\theta(s) \neq 0$  para todo  $s$ .

**Proposição 11.** *Seja  $(x(s), \theta(s), z(s))$  solução de (5.1) definida em seu intervalo maximal*

I. *Se  $z(s) > 0$  e  $z'(s) = \text{sen}\theta(s) < 0$  para todo  $s \in I$ , então*

$$0 > \theta'(s) > \frac{-(a + 2z_0)}{az_0} > -\infty, \tag{5.5}$$

para todo  $s \in I$ . Em particular  $I = \mathbb{R}$ .



*Demonstração.* Inicialmente, vamos provar que  $az(s) + 2b \cos \theta(s)$  é crescente no intervalo I. De fato,

$$\begin{aligned}
 [az(s) + 2b \cos \theta(s)]' &= az'(s) - 2b\theta'(s)\text{sen}\theta(s) \\
 &= a\text{sen}\theta(s) - 2b\theta'(s)\text{sen}\theta(s) \\
 &= a\text{sen}\theta(s) - 2b\text{sen}\theta(s) \left( \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \right) \\
 &= \frac{a^2 z(s)\text{sen}\theta(s) + 2ab\text{sen}\theta(s) \cos \theta(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \\
 &\quad - \frac{2ab\text{sen}\theta(s) - 4bz(s)\text{sen}\theta(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \\
 &= \frac{(a^2 + 4b)\text{sen}\theta(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} z(s) > 0.
 \end{aligned}$$

Logo  $[az(s) + 2b \cos \theta(s)]$  é crescente no intervalo I, assim  $(az(s) + 2b \cos \theta(s)) \geq az(0) + 2b \cos \theta(0) = az_0$ . Como  $z(s)$  é decrescente, temos que  $(a \cos \theta(s) - 2z(s)) \geq (-a - 2z_0)$ , obtendo  $0 > \theta'(s) > -\frac{(a+2z_0)}{az_0} > -\infty$ .

Como  $x'(s) = \cos \theta(s)$  e  $z'(s) = \text{sen}\theta(s)$  são funções limitadas, segue - se que  $(x'(s), \theta'(s), z'(s))$  é limitada, portanto pela Proposição 6, o intervalo maximal  $I = \mathbb{R}$ .  $\square$

É claro que, se  $-1 \leq z'(s) = \text{sen}\theta(s) < 0$  para todo  $s \in I$ , então a função  $x(s)$  é estritamente decrescente para todo  $s > 0$   $s \in I$ . De fato, sendo  $\theta(s) \in (-\pi/2, -\pi)$  para todo  $s > 0$   $s \in I$ , obtemos  $x'(s) < 0$  para todo  $s > 0$   $s \in I$ .

**Teorema 14.** *Seja  $\alpha = \alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  a curva perfil da LW - superfície hiperbólica de rotação  $\mathcal{S}$ , onde  $\alpha$  é solução de (5.1).*

1. *Se  $z_0 < \sqrt{-b}$ , então a curva  $\alpha$  intersecta transversalmente o eixo  $x$ . O intervalo maximal é limitado.*
2. *Se  $z_0 = \sqrt{-b}$ , então a curva  $\alpha$  intersecta tangencialmente o eixo  $x$ .*
3. *Se  $z_0 > \sqrt{-b}$ , então a curva  $\alpha$  não intersecta o eixo  $x$ . Neste caso, a curva  $\alpha$  é uma solução obtida no Teorema 12.*

*Demonstração.* Começamos com o caso  $z_0 < \sqrt{-b}$ . Suponhamos, por absurdo, que a curva  $\alpha$  não intersecta o eixo  $x$ . Isto é,  $z(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ . Como  $z(0) = z_0 > 0$ , temos que  $z(s) > 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I. Existem duas possibilidades para a função contínua  $z'(s)$ :

(i)  $z'(s) = 0$  para algum  $s > 0$  no intervalo I.

(ii)  $z'(s) \neq 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I.

Se ocorre (i), então  $z'(s) = \text{sen}\theta(s) = 0$  o que implica  $\theta(s) = -\pi$ . Da igualdade  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = 0$ , obtemos que  $z(s)^2 - az(s) = b + z_0^2 < 0$ . Donde  $z(s) < 0$  que é uma contradição, portanto (i) é impossível.

Se ocorre (ii), então  $\text{sen}\theta(s) < 0$  e  $z(s) > 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I. Daí pela Proposição 11, segue-se que:

$$0 > \theta'(s) > -(a + 2z_0)/z_0 \text{ para todo } s > 0 \text{ no intervalo I.}$$

Em particular a curva  $\alpha$  está definida para todo  $s > 0$ , conseqüentemente existem os limites:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = z_1 \geq 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} \theta'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0.$$

Agora, fazendo  $s$  tender ao infinito na expressão  $\theta'(s) = (a \cos \theta(s) - 2z(s))/(az(s) + 2b \cos \theta(s))$ , obtemos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta'(s) = (-a - 2z_1)/(az_1 - 2b) \neq 0.$$

Contradição, logo (ii) também é impossível. Portanto,  $z(s) = 0$  para algum  $s > 0$  no intervalo I. Seja  $\hat{s}$  tal que  $z(\hat{s}) = 0$ . Para ver que a interseção é transversal, note que para  $\hat{s}$  em (5.2) obtemos  $0 = z(\hat{s})^2 - az(\hat{s}) \cos \theta(\hat{s}) - b \cos^2 \theta(\hat{s}) - z_0^2 = -b \cos^2 \theta(\hat{s}) - z_0^2$ , implicando que  $\cos^2 \theta(\hat{s}) = z_0^2 / -b < 1$ .

Logo  $\theta(s) \neq -\pi$ , concluímos que a interseção é transversal.

Agora, sejam  $I(z_0) = (\omega_-, \omega_+)$  o intervalo máximo e  $s_0 \in [0, \omega_+)$  tal que  $z(s_0) = 0$ . Suponhamos, por contradição, que  $\omega_+ = +\infty$ . Como  $\theta(s) \in (-\pi/2, -\pi]$ , para todo  $s \in [0, \omega_+)$ , temos que  $-1 \leq z'(s) = \text{sen}\theta(s) < 0$ . Isto é, a função  $z(s)$  é estritamente decrescente no intervalo  $[0, \omega_+)$ , daí segue-se que  $z(s) < z(s_0) = 0$ .

Obtemos assim uma contradição, portanto  $\omega_+ < +\infty$  provando o item 1.

Para o caso em que  $z_0^2 = -b$ . Suponhamos, por absurdo, que a curva  $\alpha$  não intersecta o eixo-x, isto é,  $z(s) \neq 0$  para todo  $s$  no intervalo maximal I. Como  $z(0) = z_0 > 0$ , temos que  $z(s) > 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I. Existem duas possibilidades para a função contínua  $z'(s)$ :

(i)  $z'(s) = 0$  para algum  $s > 0$  no intervalo I;

(ii)  $z'(s) \neq 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I;

Se ocorre (i), então  $\theta(s) = -\pi$ , para algum  $s > 0$  no intervalo I. Donde  $z(s)^2 + az(s) - b - z_0^2 = 0$ , sendo  $(-b - z_0^2) = 0$  tem-se que  $z(s)^2 + az(s) = 0$ , implicando que

$z(s) = 0$  ou  $z(s) = -a < 0$ .

Obtemos assim uma contradição, portanto (i) é impossível.

Se ocorre (ii), então  $z(s) > 0$  e  $\sin\theta(s) < 0$  para todo  $s > 0$  no intervalo I. Daí pela Proposição 11 temos que  $0 > \theta'(s) > -(a + 2z_0)/az_0$ , para todo  $s > 0$   $s \in I$ . Em particular a curva  $\alpha$  está definida para todo  $s > 0$ , conseqüentemente existem os limites:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = z_1 \geq 0 \text{ e } \lim_{s \rightarrow +\infty} \theta'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} k(s) = 0.$$

Fazendo  $s$  tender a  $+\infty$  na expressão  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = 0$ , obtemos  $z_1^2 + az_1 - b - z_0^2 = 0$ , implicando que  $z_1 = 0$ .

Agora, fazendo  $s$  tender  $+\infty$  na expressão  $\theta'(s) = (a \cos \theta(s) - 2z(s))/(az(s) + 2b \cos \theta(s))$ , segue-se que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta'(s) = a/2b \neq 0$ .

Contradição, logo (ii) também é impossível. Portanto  $z(s) = 0$  para algum  $s \in I$ . Conseqüentemente, para tal  $s$  temos  $0 = z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = b \cos^2 \theta(s) - z_0^2$ , donde  $\cos \theta(s) = \pm 1$ .

Portanto a curva  $\alpha$  intersecta tangencialmente o eixo  $x$ , assim fica provado o item 2.

Finalmente o caso em que  $z_0 > \sqrt{-b}$ . Suponhamos, por absurdo, que a curva  $\alpha$  intersecta o eixo  $x$ , isto é, existe  $s \in I$  tal que  $z(s) = 0$ .

Por  $z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) - z_0^2 = 0$ , obtemos que  $(-b \cos^2 \theta(s) - z_0^2) = 0$ , implicando  $z_0^2 = -b \cos^2 \theta(s)$ . Donde  $z_0^2 \leq -b$ , contradizendo o fato  $z_0 > \sqrt{-b}$ .

Portanto, concluímos que a curva  $\alpha = \alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$  não intersecta o eixo  $x$ . Assim, o item 3 está provado. □

# Referências Bibliográficas

- [1] López, R. - *Rotational linear Weingarten surfaces of hiperbolic type*. Israel Journal of Mathematics, (167) 283-301, 2008.
- [2] Aledo, J.A.S.; Espinar, J.M. - *Hyperbolic linear Weingarten surface in  $\mathbb{R}^3$* . Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, (382) 291-300, 2007.
- [3] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.
- [4] do Carmo, M.P. - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática - IMPA, 2009.
- [5] Doering, I.C; Lopes, O.A. - *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2007.
- [6] Hopf, H. - *Differential Geometry, in the Large Lecture Notes in Math, Vol 1000* . Springer-Verlag, 1983.
- [7] Lima, E.L - *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2007.