Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza
Programa Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Nota

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 02/06/2016

Nome:____ Inscrição:____________

Cidade :________________Resp. pela Aplicação:____________________________

1. Prove que existe uma sequência de números reais (a_n) cujo conjunto dos pontos de acumulação contém o conjunto dos números naturais.

2. Decida se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, onde $a_k = (1/9)^k$ se k é par e $a_k = (1/4)^k$ se k é ímpar.

3. Seja $C \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \in C$ e $x - y \in C$ sempre que $x, y \in C$. Suponha $C \neq \{0\}$ e denote $\tau = \inf C^+$, onde $C^+ = \{x \in C \ : \ x > 0\}$.
   (a) Prove que $-x$ e $x + y$ pertencem a C, sempre que $x, y \in C$.
   (b) Se $\tau > 0$, prove que $\tau \in C^+$ e, para todo $x \in C^+$, existe único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \tau n$. Conclua que, se $\tau > 0$, dado $x \in C$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \tau m$.
   (c) Se $\tau = 0$, prove que C é denso em $\mathbb{R}$.
   (d) Conclua que se $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional, os números da forma $m + n\alpha$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, formam um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

4. Seja $\mathrm{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio não-constante. Dado $b \in \mathbb{R}$, suponha que existe uma sequência (x_n), tal que o $\lim \mathrm{p}(x_n) = b$.
   (a) Prove que (x_n) é limitada e o conjunto dos seus valores de aderência é não-vazio, contido em $\mathrm{p}^{-1}(b)$.
   (b) Mostre que, se existe uma sequência (x_n), tal que $\lim \mathrm{p}(x_n) = 0$, então p tem alguma raiz real.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)$, para qualquer número racional r e inteiro positivo n. Prove que f é constante.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Prove que f é uma função injetiva.
   (b) Prove que f é uma função sobrejetiva.

7. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua e derivável em (a, b). Suponha $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k \cdot f(c)$.

8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num intervalo. Uma raiz de f é um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.
   (a) Prove que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.
   (b) Mostre que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente uma raiz no intervalo $(1, 3)$.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada.
   (a) Defina soma superior $S(f, P)$ e soma inferior $s(f, P)$ de f referentes a uma partição P de $[a, b]$.
   (b) Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que dado $\epsilon > 0$ existe um partição P de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $\int_a^b f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que
    (a) $\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x = 0$
    (b) Deduza que $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$.

    Sugestões: Use que toda função contínua em um intervalo compacto $[a, b]$ é limite uniforme de polinômios.