Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estudo de um Sistema Acoplado

Diego Prudêncio Soares

Teresina - 2013

Diego Prudêncio Soares

Dissertação de Mestrado:

Estudo de um Sistema Acoplado

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark
Co-Orientador:
Prof. Dr. Alexandro de Oliveira Marinho

Teresina - 2013

S676e Soares, Diego Prudêncio.

Estudo de um Sistema Acoplado / Diego Prudêncio Soares - 2013.

62f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciência da Natureza, 2013.

"Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark".

"Co-Orientador: Prof. Dr. Alexandro de Oliveira Marinho".

1. Análise funcional. 2. Equações Diferenciais. 3. Teoria das Distribuições. I. Título.

CDD 515.7

Ao meu pai Edmo, à minha mãe Ivone, meus irmãos Daniel, Nayara, Ednara, Maria Antônia, Raissa e à minha namorada Luziane.

Agradecimentos

Agradeço aos meus professores de graduação, especialmente ao professor Roberto Ramos que logo no início do curso teve uma conversa comigo que mudou o rumo de minha jornada, e ao professor Alexandro Marinho pelo incentivo e orientação na graduação e mestrado. Sem o apoio deles com certeza não teria conseguido conquistar esta vitória.

Agradeço ao professor Marcondes Clark pela orientação e paciência. Com muito trabalho e zelo, concedeu-me todo o suporte para que pudesse terminar com êxito este trabalho.

Agradeço aos meus professores de mestrado Humberto, Jurandir, Barnabé e Marcos Vinícius pela dedicação e suporte nas aulas. Vocês também fazem parte desta conquista.

Agradeço aos professores Aldo Trajano e Roger Peres por terem aceito o convite para participar da minha banca e pelas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos, especialmente o Bernardo Cardoso, Israel Evangelista e Mykael de Araújo, que me acompanham desde a graduação e com a nossa união enfrentamos o verão e entramos no mestrado. Sem o apoio deles, não conseguiria ir tão longe. Não poderia deixar de citar também os amigos que fiz no mestrado, que muito me apoiaram e incentivaram. Não irei citá-los pois são muitos e não quero arriscar esquecer de algum.

Agradeço a minha família em especial meu pai, minha mãe, irmãos e namorada que estiveram me acompanhando em todos os momentos desta minha caminhada.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Deixando o melhor para o final, agradeço à Deus pela minha vida, por ter me dado força e sabedoria para enfrentar os obstáculos que apareceram no decorrer de minha existência, pelas vitórias e derrotas, pelas pessoas maravilhosas que fizeram e fazem parte de minha história e por todo Amor.

"Se eu tivesse o dom da profecia, se conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, se tivesse toda a fé, a ponto de remover montanhas, mas não tivesse amor, eu nada seria".

1 Coríntios 13,2

Resumo

Neste trabalho iremos estudar a existência de solução fraca para o sistema termoelástico não-linear

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + |u(x,t)|^{\sigma} u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,\infty[; \\ \theta'(x,t) - \Delta \theta(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,\infty[; \\ u(x,t) = 0, \quad \theta(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times]0,\infty[; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + h(x, u'(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0,\infty[; \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu}(x,t) + h(x, \theta(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0,\infty[; \\ u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right.$$

aplicando o método de Faedo-Galerkin com uma base especial de $V \cap H^2(\Omega)$, como feito em [14] e aproximação de Strauss para funções reais contínuas.

Em um segundo momento estudamos a existência de solução do mesmo sistema porém com condições iniciais mais gerais e trocando a função $h(x,s)$ pela função $\alpha(x)h(s)$ nas condições de fronteira. Para esta solução dedicamos o último capítulo para o estudo do decaimento exponencial da energia associada ao sistema, usando o funcional de Lyapunov e técnicas multiplicativas.

Abstract

In this work we study the existence of weak solutions to the nonlinear thermoelastic system

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + |u(x,t)|^{\sigma} u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,\infty[\\ \theta'(x,t) - \Delta \theta(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,\infty[\\ u(x,t) = 0, \qquad \theta(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times]0,\infty[\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + h(x, u'(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0,\infty[\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu}(x,t) + h(x, \theta(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0,\infty[\\ u(x,0) = u^0(x), \qquad u'(x,0) = u^1(x), \qquad \theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right.$$

applying the Faedo-Galerkin method with a special base of $V \cap H^2(\Omega)$ as done in [14] and Strauss approximations to continuous real functions.

In a second step we study the existence of solution of the same system but with more general initial conditions and changing the function $h(x,s)$ by the function $\alpha(x)h(s)$ at the boundary conditions. For this solution we devote the last chapter to study the exponential decay of the energy associated with the system, using the Lyapunov functional and multiplicative technical.

Sumário

Introdução

Neste trabalho faremos um estudo sobre a existência de solução e o comportamento assintótico da energia associadas ao sistema acoplado:

$$
\left|\begin{array}{l}
u''(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + |u(x,t)|^{\sigma} u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[; \\
\theta'(x,t) - \Delta \theta(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[; \\
u(x,t) = 0, \qquad \theta(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0\times]0,\infty[; \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + h(x,u'(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[; \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial \nu}(x,t) + h(x,\theta(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[; \\
u(x,0) = u^0(x), \qquad u'(x,0) = u^1(x), \qquad \theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{array}\right. \tag{1}
$$

onde Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e Γ é a sua fronteira, que por sua vez, está dividida em 2 partes disjuntas Γ_0 e Γ_1. Por $\nu(x)$ representamos o vetor normal unitário à Γ_1 no ponto x. O estudo do sistema (1) é fundamentado no artigo [3] o qual é base deste trabalho.

Este trabalho está dividido em 3 capítulos da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentaremos os resultados preliminares a serem utilizados no decorrer do capítulos 2 e 3. São resultados de análise funcional, equações diferenciais, distribuições escalares, distribuições vetoriais e espaços de Sobolev.

No capítulo 2 apresentamos o teorema que garante a existência de solução para o sistema acima. Para isso utilizamos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial de $V \cap H^2(\Omega)$ que foi construída por L.A. Medeiros e Milla Miranda em [14]. Usaremos também a aproximação de Strauss para funções reais contínuas. Ainda no capítulo 2, mostraremos a existência de solução para um problema análogo ao proposto acima, porém com uma mudança nas hipóteses dos dados iniciais e nas condições de fronteira.

No capítulo 3 nos dedicamos em mostrar o decaimento exponencial da energia associada a solução do segundo problema proposto no capítulo 2. Este decaimento segue da pertubação da energia utilizando o funcional de Liapunov e técnicas multiplicativas.

Capítulo 1

Terminologia e Resultados Preliminares

Este capítulo tem por objetivo apresentar as definições, notações básicas da teoria de Equações Diferenciais Parciais e os resultados preliminares fundamentais para o desenvolvimento da teoria que nele consta. Neste capítulo não nos preocupemos com as demonstrações dos resultados enunciamos, pois as mesmas poderão ser encontradas nas referências bibliográficas especificadas.

1.1 Alguns resultados de análise

Definição 1.1. *(Condições de Carathéodory) Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f satisfaz as Condições de Carathéodory sobre D se*

(i) *f(t,x) é mensurável em t para cada x fixo;*

(ii) *f(t,x) é contínua em x para cada t fixo;*

(iii) *para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que*

$$|f(t,x)| \leq m_U(t), \ \forall (t,x) \in U.$$

Teorema 1.1. *(Carathéodory) Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ onde $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, \ a > 0, \ b > 0\}$, satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então existe uma solução $x(t)$ de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $(t_0, x_0) \in R$, *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$.

Demonstração: Veja Medeiros [15], pág. 156. ∎

Corolário 1.1. *Sejam* D *aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* D, *então o problema (1.1) tem solução para qualquer* $(t_0, x_0) \in D$.

Demonstração: Veja Medeiros [15], pág. 159. ∎

Definição 1.2. *Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de (1.1) sobre um intervalo* I *e* $I \subset I_1$. *Diz-se que* $\varphi(t)$ *tem um* ***prolongamento*** *até* I_1 *se existe um* $\varphi_1(t)$ *é uma solução de (1.1) sobre* I_1 *e* $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ *para todo* $t \in I$.

Corolário 1.2. *Sejam* $D = [0, T] \times B$, $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ *e* f *nas condições do Teorema de Carathéodory. Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$x' = f(t, x)$$
$$x(0) = x_0,\ |x_0| \leq b.$$

Suponhamos que em qualquer intervalo de I *onde* $\varphi(t)$ *está definida, se tenha* $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall t \in M$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* φ *tem um prologamento até* $[0,T]$.

Demonstração: Veja Medeiros [15], pág. 164. ∎

Definição 1.3. *Seja* X *um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência* (x_n) *em* X *é fortemente limitada quando é limitada na norma do seu espaço, isto é, quando existe uma constante* $C > 0$ *real tal que*

$$\|x_n\|_X \leq C,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.4. *(Convergência forte) Uma sequência* (x_n) *pertencente num espaço de Banach* X *é dita fortemente convergente para vetor* x *se*

$$\|x_n\|_X \longrightarrow \|x\|_X.$$

Representaremos a convergência forte em X:

$$x_n \longrightarrow x \text{ em } X.$$

Definição 1.5. *(Convergência fraca) Seja* (x_n) *uma sequência no espaço de Banach* X. *Ela é dita ser fracamente convergente para* x *em* X, *se*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x),\ \forall\, f \in X',$$

onde X' *é o espaço dual de* X. *A notação convencional par a convergência fraca é:*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Obs 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X fortemente convergente para $x \in X$. Então $x_n \rightharpoonup x$. Com efeito a convergência forte nos diz que $\|x_n - x\|_X \to 0$ em $\mathbb{R}$, assim dado um funcional linear $f \in X'$ temos que*

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|_X \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x).$$

Logo x_n é fracamente convergente à $x \in X$.

Proposição 1.1. *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência, em X, fracamente convergente à $x \in X$. Então x é único.*

Demonstração: Veja Castro [2], pág. 64. ∎

Teorema 1.2. *Suponha X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência (x_{nk}) de (x_n) que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 69. ∎

Definição 1.6. *(Convergência fraca-$*$) Seja X' dual do espaço de Banach X, diz-se que (f_n) uma sequência de X' é fraco-$*$ convergente a f, em X', se*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x),\ \forall\, x \in X.$$

Nesse caso escreve-se,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Teorema 1.3. *(Banach-Alaoglu-Boubarki): Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_n$ uma sequência fortemente limitada em X' (dual de X). Então $(f_n)_n$ tem uma subsequência (f_{nk}) que converge fraco-$*$, isto é, $f_{nk} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em X'.*

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 66. ∎

Proposição 1.2. *Seja (f_n) uma sequência em X', dual de X. Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, então $||f_n||$ é limitada e $||f|| \leq \liminf ||f_n||$.*

Demonstração: Veja Brezis [1], pág 58. ∎

Teorema 1.4. *(Strauss) Sejam Ω um aberto com medida de Lebesgue finita, X e Y espaços de Banach. Sejam (u_n) uma sequência de funções fortemente mensuráveis de Ω em X e (F_n) uma sequência de funções de $\Omega \times X$ em Y tal que*

i) $F_n(x, u_n(x))$ é uniformemente limitada de Y em $\Omega \times B$, para qualquer conjunto B limitado de X;

ii) $F_n(x, u_n(x))$ *é fortemente mensurável e* $\displaystyle\int_\Omega |u_n(x)|_X |F_n(x, u_n(x))|_Y dx \leq C \leq \infty$;

iii) $|F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y \to 0$ *quase sempre em* Ω

Então $v \in L^1(\Omega; Y)$ *e* $\displaystyle\int_\Omega |F_n(x, u_n(x)) - v(x)|_Y dx \to 0.$

Demonstração: Veja Strauss [20]. ■

Definição 1.7. *(Imersão) Diz-se que* X *é imerso continuamente ou apenas imerso em* Y *se a aplicação inclusão*

$$i : X \longrightarrow Y,\ i(x) = x,\ \forall\, x \in X,$$

é contínua. Este fato equivale a

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X,\ \forall\, x \in X.$$

Simbolizamos este fato por: $X \hookrightarrow Y$.

Se $X \hookrightarrow Y$ *e* X *é denso em* Y, *diz-se que* X *é imerso, contínua e densamente, em* Y.

Se ocorre que a aplicação $i : X \longrightarrow Y$, *é contínua e compacta, diz-se que* X *é imerso compactamente em* Y. *A imersão compacta de* X *em* Y *é denotada por* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Proposição 1.3. *(Desigualdade de Young) Sejam* $p,q > 1$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,\ \ \forall a \geq 0\ \ e\ \forall b \geq 0$$

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 92. ■

Proposição 1.4. *(Desigualdade de Gronwall) Suponhamos que* $u, \beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$ *e seja* C *uma constante não negativa. A desigualdade*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds,\ \ \forall t \geq t_0$$

implica que

$$u(t) \leq C \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\right\}\ \ \forall t \geq t_0.$$

Demonstração: Veja Lizana [6], pág. 11. ■

1.2 Espaços das Distribuições Escalares

Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte da função u como sendo o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Denotaremos o suporte da função u por $supp(u)$ e se este conjunto for compacto, diremos que a função u possui suporte compacto.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, chamado multi-índice, definimos a ordem de α como sendo o número $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Representaremos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, definido por:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e quando $0 = \alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ definimos $D^0 u = u$.

Para $p \in \mathbb{R}$ com $0 \leq p < \infty$, representa-se por $L^p(\Omega)$, o conjunto das funções numérica $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, cuja potência $|u|^p$ é integrável em Ω. Este conjunto é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ representaremos o espaço de Banach das funções numéricas $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis em Ω e que são essencialmente limitadas em Ω, equipada com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω, com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Definição 1.8. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma sucessão (φ_n) de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

i) Existe um compacto K de Ω tal que supp(φ), supp(φ_n) $\subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}^n$.

ii) Para todo multi-índice α, tem-se $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente em K.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da convergência definida acima será chamado de Espaço das Funções Testes sobre Ω e o denotaremos por $D(\Omega)$.

Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é contínuo no sentido da convergência em $D(\Omega)$, isto é, se $\varphi_n \to \varphi$ em $D(\Omega)$ então $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$. Para denotar o valor de T aplicado em φ usaremos a notação $\langle T, \varphi \rangle$ e por $D'(\Omega)$ representa-se o conjunto de todas as distribuições sobre Ω. Dizemos que a sucessão (T_n) de vetores de $D'(\Omega)$ converge para T em $D'(\Omega)$ se $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

Exemplo 1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. A forma linear T_u definida em $D(\Omega)$ por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

é uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1. *(Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Veja Medeiros [12] ■

Considere uma distribuição T sobre Ω e α um multi-índice. A derivada de ordem α de T é, por definição, a forma linear $D^\alpha T$ definida em $D(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \, , \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Segue da equação acima e da noção de convergência em $D(\Omega)$ que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Proposição 1.5. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 92. ■

Teorema 1.5. *(Representação de Riesz): Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então, existe uma única $u \in L^{p'}(\Omega)$, tal que*

$$(\varphi, f) = \int_\Omega uf\,dx, \ \ \forall f \in L^p(\Omega),$$

e $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 97. ■

Lema 1.2. *(de Fatou) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições:*

i) Para todo n, $f_n(x) \geq 0$ quase sempre em Ω;

ii) $\sup_n \int_\Omega f_n dx < \infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, considere $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \infty$. Então

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega f\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração: Veja Brezis [1], pág. 90. ■

1.3 Espaços das Distribuições Vetoriais

Sejam $T > 0$, X um espaço de Banach e considere $1 \leq p \leq \infty$. Representaremos por $L^p(0,T,X)$ o espaço vetorial das funções à valores vetoriais, $u : (0,T) \to X$, mensuráveis, tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$.

Para $1 \leq p < \infty$, temos que o espaço $L^p(0,T,X)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Em $L^\infty(0,T,X)$ define-se a norma por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess\|u(t)\|_X.$$

E por sinal, com esta norma, $L^\infty(0,T,X)$ é um espaço de Banach.

Um caso particular interessante é quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert. Segue que o espaço $L^2(0,T,X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt, \quad \forall u,v \in L^2(0,T,X).$$

Lema 1.3. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq r \leq s \leq \infty$, então:*

$$L^s(0,T,X) \hookrightarrow L^r(0,T,Y).$$

Demonstração: Veja Matos [9], pág. 136. ∎

Considere agora Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e seja Q o cilindro $\Omega \times (0,T)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos, via Teorema de Fubini, identificar o espaço $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ com o espaço $L^p(Q)$. Com efeito dada uma função $u \in L^p(0,T,L^p(\Omega))$ então para cada $t \in (0,T)$, $u(t) \in L^p(\Omega)$ e $u(t)$ é uma função de Ω em $\mathbb{R}$ cujo valor em x será denotado por $u(x,t)$. Portanto:

$$\int_0^T \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega)} dt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^p dx dt = \int_Q |u(x,t)|^p dQ = \|u\|^p_{L^p(Q)}$$

e assim estabelecemos uma isometria entre $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ e $L^p(Q)$.

Definição 1.9. *Seja X um espaço de Banach e u uma função com valores em X, definida quase sempre em $[0,T]$. Dizemos que a função u é de variação p-limitada se, para toda* *partição* $\{t_\nu\}$ *com* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$*, as somas*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\|u(t_\nu) - u(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{p-1}}$$

são finitas. Se $p = 1$ *dizemos apenas que a função* u *é de variação limitada.*

Se X é um espaço de Banach tal que o seu dual X' satisfaz a condição de toda função de variação limitada tem derivada quase sempre, então obtemos uma caracterização para o dual de espaços $L^p(0,T,X)$ com $1 < p < \infty$, a saber:

$$[L^p(0,T,X)]' = L^q(0,T,X'),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. No caso $p = 1$ temos a identidade:

$$\left[L^1(0,T,X)\right]' = L^\infty(0,T,X').$$

Para saber mais detalhes sobre o dual de espaços $L^p(0,T,X)$, consulte Ribeiro [19].

Obs 1.2. *Se* X *é reflexivo, então* X' *satisfaz a propriedade de toda função de variação limitada ter derivada quase sempre e portanto vale a caracterização do dual de espaços* $L^p(0,T,X)$ *visto acima.*

Teorema 1.6. *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Se* $u \in L^q(0,T,X')$ *e* $v \in L^p(0,T,X)$ *então a dualidade entre esses espaços pode ser dada por:*

$$\langle u, v\rangle_{L^q(0,T,X') \times L^p(0,T,X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X}\, dt.$$

Demonstração: Veja Medeiros [10]. ■

Teorema 1.7. *Sejam* X, Y *espaços de Hilbert tal que* $X \hookrightarrow Y$*,* $u \in L^p(0,T,X)$*,* $u' \in L^p(0,T,Y)$ *e* $1 \leq p \leq \infty$*, então* $u \in C^0([0,T];Y)$*.*

Demonstração: Veja Medeiros [10]. ■

Proposição 1.6. *Seja* X *um espaço de Banach com dual* X'*. Suponha* $u, v \in L^p(0,T,X)$*. São equivalentes:*

(i) $u(t) = \xi + \displaystyle\int_0^T v(s)ds$*, onde* ξ *é constante em* X*.*

(ii) $\dfrac{d}{dt}\langle u(t), w\rangle = \langle v(t), w\rangle$, $\forall\, w \in X'$*, no sentido das distribuições sobre* $(0,T)$.

(iii) $\displaystyle\int_0^T u(s)\Phi(s)ds = -\int_0^T v(s)\Phi(s)ds,\ \forall\Phi \in D(0,T).$

Demonstração: Veja Castro [2], pág. 33. ∎

Teorema 1.8. *(Aubin-Lions): Sejam X, B, Y espaços de Banach, X é reflexivo e* $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$*. Suponha que* (u_n) *seja uma sequência uniformemente limitada em* $L^p(0,T:X)$ *tal que* $(\frac{d}{dt}u_n) = (u_n')$ *seja limitada em* $L^p(0,T;Y)$ *para algum* $p > 1$*. Então existe uma subsequência de* (u_n) *que converge fortemente em* $L^2(0,T;B)$*.*

Demonstração: Veja Castro [2], pág. 70. ∎

Proposição 1.7. *Sejam* X' *o dual de um espaço de Banach reflexivo* X *e* $1 \leq p \leq \infty$*. Se* (F_n) *é uma sequência em* $L^p_{loc}(0,\infty,X')$*, então existe uma subsequência de* (f_k) *que converge fraco para uma função de* $L^p_{loc}(0,\infty,X')$ *(fraco estrela no caso de* $p = \infty$*).*

Demonstração: Veja Paz [17]. ∎

1.4 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$. Sabemos que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, assim dada $u \in L^p(\Omega)$ temos, pelo exemplo 1, que u define uma distribuição e portanto possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Porém, em geral, $D^\alpha u$ não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Esta é a principal motivação para definirmos um novo espaço, chamado Espaço de Sobolev. Representaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $\forall|\alpha| \leq m$, ou seja:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall|\alpha| \leq m\}.$$

Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$ temos que a norma

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} ess|D^\alpha u(x)|$$

faz de $W^{m,\infty}$ um espaço de Banach.

Sabemos que $D(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, (veja L.A. Medeiros e M. Miranda [12], pág. 9). Porém nem sempre temos $D(\Omega)$ denso em $W^{m,p}(\Omega)$, com $m \geq 1$. Motivados por este fato, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Por fim, suponha $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Quando $p = 2$ os Espaços de Sobolev recebem notações especiais, a saber, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ e $(H_0^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega)$. Os espaços $H^m(\Omega)$ possuem uma estrutura Hilbertiana, quando equipados com o produto interno definido por:

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(,)_{L^2(\Omega)}$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

Proposição 1.8. *(Regra da Cadeia) Sejam $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e $\|g'(s)\| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e para alguma constante M. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$g \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ u) = (g' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Demonstração: Veja Brezis [1]. ∎

Teorema 1.9. *(Rellich-Kondrachov)Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ *se* $p < n$;

(ii) $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$ *se* $p = n$;

(iii) $W^{1,p} \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ *se* $p > n$.

Demonstração: Veja Medeiros [12], pág.79. ∎

Capítulo 2

Demonstração do Resultado Principal

Neste capítulo iremos apresentar o resultado principal desta dissertação, que é o teorema 2.1 a seguir. Iremos prová-lo, mas antes, precisamos exibir alguns resultados e notações.

2.1 Apresentação do Problema

Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira Γ de classe C^2 é constituída de duas partes, digamos Γ_0 e Γ_1, as quais são conjuntos fechados e disjuntos. Denotamos por $\nu(x)$ o vetor normal unitário exterior de Γ no ponto x. Considere uma função real $h(x,s)$ definida em $\Gamma_1 \times (0,\infty)$ e um número real $\sigma > 0$. Nestas condições apresentamos o seguinte problema misto para um sistema termoelástico não linear:

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x,t) + |u(x,t)|^{\sigma} u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[; \\ \theta'(x,t) - \Delta \theta(x,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[; \\ u(x,t) = 0, \qquad \theta(x,t) = 0 \;\; em \;\; \Gamma_0 \times]0,\infty[; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + h(x, u'(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma = \Gamma_1 \times]0,\infty[; \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu}(x,t) + h(x, \theta(x,t)) = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma = \Gamma_1 \times]0,\infty[; \\ u(x,0) = u^0(x), \quad u'(x,0) = u^1(x), \quad \theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Denotamos por $H^m(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem m e por $L^2(\Omega)$ a classe das funções reais de quadrado integráveis a Lebesgue. Será utilizada a notação (u, v) e $|u|$

para o produto interno e a norma em $L^2(\Omega)$. Representaremos por V o espaço:

$$V = \{v \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 v = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0\},$$

onde γ_0 denota o operador traço de ordem zero sobre Γ. O espaço V é Hilbert com o produto interno:

$$((u,v)) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Consideremos o operador $A = -\Delta$ definido pela tripla $\{V, L^2(\Omega), ((u,v))\}$. Assim o domínio de $-\Delta$ é dado por:

$$D(-\Delta) = \{u \in V \cap H^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1\}.$$

Temos que $D(-\Delta)$ é denso em V. Veja Lions [5].

Vamos introduzir algumas hipóteses sobre a função h e sobre o número σ afim de fundamentarmos nosso primeiro resultado. São elas:

$$\left| \begin{array}{l} h \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1)) \text{ tal que } h(x,0) = 0 \ \ q.\ s. \text{ em } \Gamma_1; \\ (h(x,s) - h(x,r))(s-r) \geq d_0(s-r)^2 \ \ q.\ s. \text{ em } \Gamma_1 \\ \forall\ s, r \in \ \mathbb{R} \ \text{ e } \ d_0 > 0 \text{ (constante),} \end{array} \right. \tag{2.2}$$

$$2d_0^2 \geq n^2, \tag{2.3}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{n} < \sigma \leq \dfrac{2}{n-2}, \quad \text{se } n \geq 3 \\ \sigma > \dfrac{1}{n} \quad se \quad n = 1 \quad ou \quad n = 2 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Se as condições iniciais u^0, u^1 e θ^0, são como em (2.21) no teorema 2.1, então valem:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + h(.,u^1) = 0 \ \ e \ \ \frac{\partial \theta^0}{\partial \nu} + h(.,\theta^0) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1. \tag{2.5}$$

Notemos que a hipótese (2.4) sobre σ implica que $q^* = \dfrac{2n}{n-2} \geq 2\sigma + 2$ e $q^* \geq \sigma n$. Assim, do teorema 1.9, resulta que:

$$\left| \begin{array}{ll} V \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{2\sigma+2}(\Omega), & \text{se } n \geq 3 \\ V \hookrightarrow L^{2\sigma+2}(\Omega), & \text{se } n = 1, 2 \\ V \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma n}(\Omega), & \text{se } n \geq 3 \\ V \hookrightarrow L^{\sigma n}(\Omega), & \text{se } n = 1, 2. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Para demonstrarmos o teorema de existência de solução para o sistema (2.1), iremos utilizar o seguinte resultado, que demonstraremos logo a seguir:

Proposição 2.1. *Assuma que a função h satisfaça a hipótese (2.2); então existe uma sequência (h_l) de funções de $C^0(\mathbb{R}, L^\infty(\Gamma_1))$ satisfazendo, para cada $l \in \mathbb{N}$:*

(i) $h_l(x,0)=0$ *q. s. em* Γ_1*;*

(ii) $[h_l(x,s)-h_l(x,r)](s-r)\geq d_0(s-r)^2,\ \forall\ s,r\ \in\ \mathbb{R};$ *q. s. em* Γ_1*;*

(iii) *Existe uma função* $c_l\ \in\ L^\infty(\Gamma_1)$ *tal que*

$$|h_l(x,s)-h_l(x,r)|\leq C_l|s-r|,\ \forall\ r,s\ \in\ \mathbb{R},\ e\ q.s.\ em\ \Gamma_1;$$

(iv) (h_l) *converge uniformemente para* h *em conjuntos limitados de* $\mathbb{R}$ *e q.s. em* Γ_1*.*

Demonstração: Para cada $l\in\mathbb{N}$, definamos:

$$h_l(x,s)=\left|\begin{array}{l} C_{1l}(x)s,\quad se\ 0\leq s\leq \dfrac{1}{l},\\ l\displaystyle\int_s^{s+\frac{1}{l}}h(x,\tau)d\tau,\quad se\ \dfrac{1}{l}\leq s\leq l,\\ C_{2l}(x)s,\quad se\ s>l,\\ C_{3l}(x)s,\quad se\ -\dfrac{1}{l}\leq s\leq 0,\\ l\displaystyle\int_{s-\frac{1}{l}}^{s}h(x,\tau)d\tau,\quad se\ -l\leq s\leq -\dfrac{1}{l},\\ C_{4l}(x)s,\quad se\ s<-l,\end{array}\right.$$

onde

$$\left|\begin{array}{l} C_{1l}(x)=l^2\displaystyle\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}}h(x,\tau)d\tau,\\ C_{2l}(x)=\displaystyle\int_{l}^{l+\frac{1}{l}}h(x,\tau)d\tau,\\ C_{3l}(x)=-l^2\displaystyle\int_{-\frac{2}{l}}^{-\frac{1}{l}}h(x,\tau)d\tau,\\ C_{4l}(x)=-\displaystyle\int_{-l-\frac{1}{l}}^{-l}h(x,\tau)d\tau,\end{array}\right.$$

(i) $h_l(x,0)=C_{1l}(x)0=0,\ q.\ s.$ em Γ_1.

Considere $s\in I_j$ onde $I_1=(-\infty,-l]$, $I_2=[-l,-\frac{1}{l}]$, $I_3=[-\frac{1}{l},0]$, $I_4=[0,\frac{1}{l}]$, $I_5=[\frac{1}{l},l]$, $I_6=[l,\infty)$.

Note que

$$[\ h(x,s)-h(x,r)]\,(s-r)\geq d_0(s-r)^2,\ \forall\ s,r\in\mathbb{R},\ q.s.\ \text{em}\ \Gamma_1$$

é o mesmo que

$$h(x,s)-h(x,r)\geq d_0(s-r),\ \forall\ s>r\in\mathbb{R},\ q.s.\ \text{em}\ \Gamma_1.$$

Observe também que se $\tau<0$ então

$$h(x,0)-h(x,\tau)\geq d_0(0-\tau)\Rightarrow -h(x,\tau)\geq -d_0\tau$$

e que se $\tau > 0$, temos

$$h(x,\tau) - h(x,0) \geq d_0(\tau - 0) \Rightarrow h(x,\tau) \geq d_0\tau.$$

Para mostrarmos (ii), dividiremos o problema em 7 casos de acordo com os possíveis intervalos em que s e r possam estar.

1º caso: $-\infty < r < s \leq -l$.

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) = C_{4l}(x)(s-r) &= \left[-\int_{-l-\frac{1}{l}}^{-l} h(x,\tau)d\tau\right](s-r) \\
\geq \left[\int_{-l-\frac{1}{l}}^{-l} -d_0\tau d\tau\right](s-r) &= -\frac{d_0}{2}\left[\tau^2\Big|_{-l-\frac{1}{l}}^{-l}\right](s-r) \\
= -\frac{d_0}{2}\left[(-l)^2 - \left(-l-\frac{1}{l}\right)^2\right](s-r) &- \frac{d_0}{2}\left[(-l)^2 - (-l)^2 + 2(-l)\frac{1}{l} - \frac{1}{l^2}\right](s-r) \\
= -\frac{d_0}{2}\left[-2 - \frac{1}{l^2}\right](s-r) &= d_0\left[1 + \frac{1}{2l^2}\right](s-r) \geq d_0(s-r),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.7}$$

2º caso: $-l \leq r < s \leq -\dfrac{1}{l}$.

Pelo teorema do valor médio temos que, existe $t^* \in (r,s)$ tal que

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) &= \frac{\partial h_l}{\partial t}(x,t^*)(s-r) = l\left[h(x,t^*) - h\left(x, t^* - \frac{1}{l}\right)\right](s-r) \\
&\geq l d_0(t^* - (t^* - \frac{1}{l}))(s-r) = l d_0\frac{1}{l}(s-r) = d_0(s-r),
\end{aligned}$$

portanto,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.8}$$

3º caso: $-\dfrac{1}{l} \leq r < s \leq 0$.

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) = C_{3l}(x)(s-r) &= \left[-l^2\int_{-\frac{2}{l}}^{-\frac{1}{l}} h(x,\tau)d\tau\right](s-r) \\
&\geq \left[l^2\int_{-\frac{2}{l}}^{-\frac{1}{l}} -d_0\tau d\tau\right](s-r) = -l^2\frac{d_0}{2}\left[\tau^2\Big|_{-\frac{2}{l}}^{-\frac{1}{l}}\right](s-r) \\
&= -l^2\frac{d_0}{2}\left[\frac{l}{l^2} - \frac{4}{l^2}\right](s-r) = -l^2\frac{d_0}{2}\frac{(-3)}{l^2}(s-r) \\
&= \frac{3}{2}d_0(s-r) \geq d_0(s-r),
\end{aligned}$$

por conseguinte,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.9}$$

4º caso: $0 \leq r < s \leq \dfrac{1}{l}$.

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) = C_{1l}(x)(s-r) &= \left[l^2 \int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} h(x,\tau)d\tau \right](s-r)\\
&\geq l^2 \left[\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} d_0 \tau d\tau \right](s-r) = l^2 \frac{d_0}{2}\left[\tau^2 \Big|_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} \right](s-r)\\
&= l^2 \frac{d_0}{2}\left[\frac{4}{l^2} - \frac{1}{l^2} \right](s-r) = l^2 \frac{d_0}{2}\frac{3}{l^2}(s-r) = \frac{3}{2} d_0 (s-r) \geq d_0(s-r),
\end{aligned}$$

logo,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.10}$$

5º caso: $\dfrac{1}{l} \leq r < s \leq l$.

Pelo teorema do valor médio temos que, existe $t^* \in (r,s)$ tal que

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) &= \frac{\partial h_l}{\partial t}(x,t^*)(s-r) = l\left[h\left(x, t^* + \frac{1}{l} \right) - h(x,t^*) \right](s-r)\\
&\geq l d_0 (t^* + \frac{1}{l} - t^*)(s-r) = l d_0 \frac{1}{l}(s-r) = d_0(s-r),
\end{aligned}$$

assim,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.11}$$

6º caso: $l \leq r < s < \infty$.

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) = C_{2l}(x)(s-r) &= \left[\int_{l}^{l+\frac{1}{l}} h(x,\tau)d\tau \right](s-r) \geq \left[\int_{l}^{l+\frac{1}{l}} d_0 \tau d\tau \right](s-r)\\
&= \frac{d_0}{2}\left[\tau^2 \Big|_{l}^{l+\frac{1}{l}} \right](s-r) = \frac{d_0}{2}\left[\left(l + \frac{1}{l} \right)^2 - l^2 \right](s-r)\\
&= \frac{d_0}{2}\left[l^2 + 2l\frac{1}{l} + \frac{1}{l^2} - l^2 \right](s-r) = \frac{d_0}{2}\left[2 + \frac{1}{l^2} \right](s-r)\\
&= d_0 \left[1 + \frac{1}{2l^2} \right](s-r) \geq d_0(s-r),
\end{aligned}$$

portanto,

$$h_l(x,s) - h_l(x,r) \geq d_0(s-r). \tag{2.12}$$

Agora escrevendo

$$I_1 = (-\infty, a_2],\ I_2 = (a_2, a_3],\ \cdots,\ I_6 = [a_6, \infty). \tag{2.13}$$

7º caso: se $r \in I_i$ e $s \in I_j$ com $i < j$ então de (2.7)-(2.12), vem:

$$\begin{aligned}
h_l(x,s) - h_l(x,r) &= [h_l(x,s) - h_l(x,a_j)] + [h_l(x,a_j) - h_l(x,a_{j-1})] + \cdots\\
&\quad + [h_l(x,a_{i+1}) - h_l(x,r)]\\
&\geq d_0(s-a_j) + d_0(a_j - a_{j-1}) + \cdots + d_0(a_{i+1} - r) = d_0(s-r)
\end{aligned}$$

e (ii) está demonstrada.

Para demonstrarmos o próximo item, observemos que, por hipótese $h \in C^0(\mathbb{R}, L^\infty(\Gamma_1))$, portanto, para cada $x \in \Gamma_1$, se restringirmos h ao intervalo fechado $[-l-1, l+1]$, então esta será limitada. Assim temos que:

$$h \in L^\infty([-l-1, l+1]; L^\infty(\Gamma_1)) = L^\infty(\Gamma_1 \times [-l-1, l+1])$$

.

Denotemos por:

$$C_l = \sup_{\substack{x\in\Gamma_1 \\ -l-1\leq s\leq l+1}} |h(x,s)| < \infty$$

.

Assim como no item (ii), para demonstrarmos (iii), verifiquemos os 7 casos relativos aos possíveis intervalos em que s e r possam estar.

1º caso: $-\infty < r < s \leq -l$.

$$\begin{aligned}|h_l(x,s) - h_l(x,r)| = |C_{4l}(x)||s-r| &\leq \left[\int_{-l-\frac{1}{l}}^{-l} |h(x,\tau)|d\tau\right]|s-r| \\ &\leq C_l\left[-l-(-l-\frac{1}{l})\right]|s-r| = \frac{1}{l}C_l|s-r| \leq 2lC_l|s-r|,\end{aligned}$$

portanto temos:

$$|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.14}$$

2º caso: $-l \leq r < s \leq -\dfrac{1}{l}$.

$$\begin{aligned}|h_l(x,s) - h_l(x,r)| &= \left|\frac{\partial h_l}{\partial t}(x,t^*)\right||s-r| = \left|h(x,t^*) - h(x,t^*-\frac{1}{l})\right||s-r| \\ &\leq l\left[|h(x,t^*)| + |h(x,t^*-\frac{1}{l})|\right]|s-r| \leq 2lC_l|s-r|,\end{aligned}$$

logo:

$$|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.15}$$

3º caso: $-\dfrac{1}{l} \leq r < s \leq 0$.

$$\begin{aligned}|h_l(x,s) - h_l(x,r)| = |C_{3l}(x)||s-r| &\leq l^2\left[\int_{-\frac{2}{l}}^{-\frac{1}{l}} |h(x,\tau)|d\tau\right]|s-r| \\ &\leq l^2C_l\left[-\frac{1}{l}-(-\frac{2}{l})\right]|s-r| = l^2C_l\frac{1}{l}|s-r| \leq lC_l|s-r| \leq 2lC_l|s-r|,\end{aligned}$$

consequentemente:

$$|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.16}$$

4º caso: $0 \leq r < s \leq \dfrac{1}{l}$.

$$
\begin{aligned}
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| &= |C_{1l}(x)||s-r| \leq l^2 \left[\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} |h(x,\tau)| d\tau \right] |s-r| \\
&\leq l^2 C_l \left[\frac{2}{l} - \frac{1}{l} \right] |s-r| = l^2 \frac{1}{l} C_l |s-r| \leq l C_l |s-r| \leq 2l C_l |s-r|,
\end{aligned}
$$

donde:

$$
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.17}
$$

5º caso: $\dfrac{1}{l} \leq r < s \leq l$.

$$
\begin{aligned}
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| &= \left| \frac{\partial h_l}{\partial t}(x,t^*) \right| |s-r| = l \left| h(x, t^* + \frac{1}{l}) - h(x,t^*) \right| |s-r| \\
&\leq l \left[|h(x,t^* + \frac{1}{l})| + |h(x,t^*)| \right] |s-r| \leq 2lC_l|s-r|,
\end{aligned}
$$

logo:

$$
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.18}
$$

6º caso: $l \leq r < s < \infty$.

$$
\begin{aligned}
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| &= |C_{2l}(x)||s-r| \leq \left[\int_{l}^{l+\frac{1}{l}} |h(x,\tau)| d\tau \right] |s-r| \\
&\leq C_l \left[l + \frac{1}{l} - l \right] |s-r| = \frac{1}{l} C_l |s-r| \leq 2lC_l|s-r|,
\end{aligned}
$$

portanto:

$$
|h_l(x,s) - h_l(x,r)| \leq 2lC_l|s-r|. \tag{2.19}
$$

7º caso: Usando a mesma notação de 2.13, então $a_j - a_{j-1} > 0$ o que implica em $|a_j - a_{j-1}| = a_j - a_{j-1}$, donde se $r \in I_i$ e $s \in I_j$, com $i < j$ teremos por (2.14)-(2.19):

$$
\begin{aligned}
&|h_l(x,s) - h_l(x,r)| = |h_l(x,s) - h_l(x,a_j) + h_l(x,a_j) - h_l(x,a_{j-1}) + \cdots \\
&\quad + h_l(x,a_{i+1}) - h_l(x,r)| \\
&\quad \leq |h_l(x,s) - h_l(x,a_j)| + |h_l(x,a_j) - h_l(x,a_{j-1})| + \cdots + |h_l(x,a_{i+1}) - h_l(x,r)| \\
&\quad \leq 2lC_l|s-a_j| + 2lC_l|a_j - a_{j-1}| + \cdots + 2lC_l|a_{i+1} - r| \\
&\quad = 2lC_l[s - a_j + a_j - a_{j-1} + \cdots + a_{i+1} - r] = 2lC_l|s-r|
\end{aligned}
$$

e (iii) está demonstrada.

Provaremos agora que (h_l) converge uniformemente para h em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$. De $h \in C^0(\mathbb{R}; L^\infty(\Gamma_1))$ temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|s - r| < \delta$ então $||h(.,s) - h(.,t)||_{L^\infty(\Gamma_1)} < \varepsilon$, isto é:

$$\sup_{x \in \Gamma_1} ess|h(x,s) - h(x,r)| < \varepsilon. \tag{2.20}$$

Seja S um conjunto limitado de $\mathbb{R}$, então $\exists\ l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s| \leq l_0,\ \forall\ s \in S$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta > 0$ tal que seja satisfeita (2.20). Escolha $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{l_1}{2} > \dfrac{1}{\delta}$ e seja $l = \max\{l_0, l_1\}$.

1º caso: Se $\dfrac{1}{l} \leq s \leq l_0$, então $\dfrac{1}{l} \leq s \leq l$. Pelo teorema do valor médio para integrais temos que $\exists\ t^* \in \left[s, s + \dfrac{1}{l}\right]$ tal que:

$$\int_s^{s+\frac{1}{l}} h(x,\tau)d\tau = h(x,t^*)\left[s + \frac{1}{l} - s\right] = \frac{1}{l}h(x,t^*),$$

daí:

$$h_l(x,s) - h(x,s) = l\int_s^{s+\frac{1}{l}} h(x,\tau)d\tau - h(x,s) = l\frac{1}{l}h(x,t^*) - h(x,s) = h(x,t^*) - h(x,s).$$

De $s \leq t^* \leq s + \dfrac{1}{l}$, segue que $t^* - s \leq \dfrac{1}{l} \leq \dfrac{1}{l_1} < \dfrac{2}{l_1} < \delta$. Logo por (2.20) vem que:

$$\sup_{x \in \Gamma_1} ess|h_l(x,s) - h(x,s)| = \sup_{x \in \Gamma_1} ess|h(x,t^*) - h(x,s)| < \varepsilon$$

e neste caso $h_l \to h$ uniformemente.

2º caso: Se $0 \leq s \leq \dfrac{1}{l}$ temos que:

$$\begin{aligned} h_l(x,s) - h(x,s) &= l^2\left[\int_{\frac{1}{l}}^{\frac{2}{l}} h(x,\tau)d\tau\right]s - h(x,s) = l^2 h(x,t^*)\left[\frac{2}{l} - \frac{1}{l}\right]s - h(x,s) \\ &= lh(x,t^*)s - h(x,s), \end{aligned}$$

com $\dfrac{1}{l} \leq t^* \leq \dfrac{2}{l}$. Daí:

$$\begin{aligned} |h_l(x,s) - h(x,s)| &= |lh(x,t^*)s - h(x,s)| \leq l|h(x,t^*)|s + |h(x,s)| \\ &\leq l|h(x,t^*)|\frac{1}{l} + |h(x,s)| = |h(x,t^*)| + |h(x,s)|. \end{aligned}$$

Notemos que $0 \leq \dfrac{1}{l} \leq t^* \leq \dfrac{2}{l} \leq \dfrac{2}{l_1} < \delta$ e $0 \leq s \leq \dfrac{1}{l} < \dfrac{2}{l} < \dfrac{2}{l_1} < \delta$ e por (2.20) obtemos:

$$\sup_{x \in \Gamma_1} ess|h(x,t^*)| = \sup_{x \in \Gamma_1} ess|h(x,t^*) - h(x,0)| < \varepsilon$$

e

$$\sup_{x\in\Gamma_1} ess|h(x,s)| = \sup_{x\in\Gamma_1} ess|h(x,s)-h(x,0)| < \varepsilon.$$

Com mais razão:

$$\sup_{x\in\Gamma_1} ess|h_l(x,s)-h(x,s)| \leq \sup_{x\in\Gamma_1} ess|h(x,t^*)| + \sup_{x\in\Gamma_1} ess|h(x,s)| < 2\varepsilon$$

e por conseguinte $h_l \to h$ uniformemente em t, para quase todo x em $L^2(\Gamma_1)$.

A demonstração dos casos $-\dfrac{1}{l} \leq s \leq 0$ e $-l \leq s \leq -\dfrac{1}{l}$ é feita de modo análogo. Concluímos aqui a demonstração do item (iv). ■

2.2 Resultado Principal

Nesta seção apresentaremos o principal resultado deste trabalho e faremos a sua demonstração. Nele veremos que o problema (2.1) possui solução. Vejamos:

Teorema 2.1. *Assumamos as hipóteses* (2.2)-(2.4)*. Considere*

$$u^0 \in D(-\Delta),\ u^1 \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \theta^0 \in H_0^1(\Omega)\cap D(-\Delta). \tag{2.21}$$

Então existe um par de funções $\{u,\theta\}$ *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty(0,\infty;V) \\ u' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \\ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ \theta \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;V) \\ \theta' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,\infty;V), \end{array} \right. \tag{2.22}$$

satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta}{\partial x_i} + |u|^\sigma u = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ \theta' - \Delta\theta + \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial u'}{\partial x_i} = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \end{array} \right. \tag{2.23}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial\nu} + h(.,u') = 0 \text{ em } L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} + h(,\theta) = 0 \text{ em } L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)) \end{array} \right. \tag{2.24}$$

$$u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1, \qquad \theta(0) = \theta^0. \tag{2.25}$$

Faremos a demonstração deste resultado nas etapas que seguem.

2.2.1 O Problema Aproximado

Objetivamos empregar o **Método de Faedo-Galerkin** para solucionar o problema (2.1), e para isso precisamos encontrar um espaço de dimensão finita V_m, de modo que para u_m e θ_m em V_m tenhamos um problema aproximado, associado ao sistema (2.1), que por sinal, é o objetivo desta seção.

Por hipótese $u^1 \in H_0^1(\Omega)$, logo existe uma sequência $(u_l^1) \in D(\Omega)$ tal que

$$u_l^1 \to u^1 \ em \ H_0^1(\Omega) \tag{2.26}$$

Como h satisfaz a hipótese (2.2), pela proposição 2.1, temos que existe uma sucessão de funções (h_l) satisfazendo as hipóteses (i),(ii),(iii) e (iv). Por (2.5) temos que:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + h_l(.,u_l^1) = 0 \ \ e \ \ \frac{\partial \theta^0}{\partial \nu} + h_l(.,\theta^0) = 0 \text{ em } \Gamma_1, \ \forall\, l \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Fixe $l \in \mathbb{N}$. Tomemos base especial $\beta = \{w_1^l, w_2^l, w_3^l, ...\}$ de $V \cap H^2(\Omega)$, como feito em Medeiros [14], que pode ser tomada ortonormal usando o processo de Gram-Schmidt. Tomemos a base β de forma que u^0, u_l^1, θ^0 pertençam ao subespaço gerado por w_1^l, w_2^l, w_3^l, que será denotado por $[w_1^l, w_2^l, w_3^l]$. Seja $V_m^l = [w_1^l, w_2^l, ..., w_m^l]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base β. Considere as soluções:

$$u_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jlm}(t) w_j^l \ \ e \ \ \theta_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jlm}(t) w_j^l$$

do problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} (u_{lm}'', v) - \displaystyle\int_\Omega \Delta u_{lm} v dx + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_{lm}}{\partial x_i}, v \right) + (|u_{lm}|^\sigma u_{lm}, v) = 0, \\ (\theta_{lm}', w) - \displaystyle\int_\Omega \Delta \theta_{lm} w dx + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{lm}'}{\partial x_i}, w \right) = 0. \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Façamos algumas manipulações no sistema acima. Pela identidade de Green, temos que:

$$-\int_\Omega \Delta u_{lm} v = \int_\Omega \nabla u_{lm} \nabla v - \int_\Gamma \frac{\partial u_{lm}}{\partial \nu} v d\Gamma = \int_\Omega \nabla u_{lm} \nabla v - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{lm}}{\partial \nu} v d\Gamma,$$

pois $-\displaystyle\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_{lm}}{\partial \nu} v d\Gamma = 0$, já que, $v \in V_m^l \Rightarrow v \in V \Rightarrow \gamma_0 v = 0$ em Γ_0. Temos também que $\dfrac{\partial u_{lm}}{\partial \nu} + h_l(.,u_{lm}') = 0$, donde $-\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{lm}}{\partial \nu} v = \int_{\Gamma_1} h_l(.,u_{lm}') v d\Gamma$. Assim a equação acima fica:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u_{lm} v &= \int_\Omega \nabla u_{lm} \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} h_l(.,u_{lm}') v d\Gamma \\ &= ((u_{lm}, v)) + \int_{\Gamma_1} h_l(.,u_{lm}') v d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Analogamente:

$$-\int_{\Omega} \Delta\theta_{lm} w = ((\theta_{lm}, w)) + \int_{\Gamma_1} h_l(.,\theta_{lm}) w d\Gamma. \tag{2.30}$$

Substituindo (2.29), (2.30) em (2.28), e denotando $u_{lm}(0) = u^0,\ u'_{lm}(0) = u_l^1$ e $\theta_{lm}(0) = \theta^0$, podemos escrever o mesmo sistema aproximado na forma:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{lm}(t), v) + ((u_{lm}(t), v)) + \displaystyle\int_{\Gamma_1} h_l(., u'_{lm}(t)) v d\Gamma + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_{lm}}{\partial x_i}(t), v \right) + \\ +(|u_{lm}(t)|^{\sigma} u_{lm}(t), v) = 0,\ \forall\ v \in V_m^l; \\ (\theta'_{lm}(t), w) + ((\theta_{lm}(t), w)) + \displaystyle\int_{\Gamma_1} h_l(., \theta_{lm}(t)) w d\Gamma + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u'_{lm}}{\partial x_i}(t), w \right) = 0\ \forall\ w \in V_m^l; \\ u_{lm}(0) = u^0, \quad u'_{lm}(0) = u_l^1, \quad \theta_{lm}(0) = \theta^0. \end{array} \right. \tag{2.31}$$

2.2.2 Existência de Solução Local para o Sistema Aproximado

Nesta seção mostraremos que o problema aproximado (2.31) possui solução local. Como $u_{lm},\ \theta_{lm} \in V_m^l$, temos que:

$$u_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jlm}(t) w_j^l \quad e \quad \theta_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jlm}(t) w_j^l,$$

$$u^0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j^l; \quad u_l^1 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j^l; \quad \theta^0 = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j w_j^l.$$

Fazendo $v = w_k^l$ em $(2.31)_1$ e $w = w_k^l$ em $(2.31)_2$, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g''_{jlm}(t)(w_j^l, w_k^l) + \sum_{j=1}^{m} g_{jlm}(t)((w_j^l, w_k^l)) + \int_{\Gamma_1} h_l(., u'_{lm}(t)) w_k^l d\Gamma + \\ + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_{jlm}}{\partial x_i}(t) \right] (w_j^l, w_k^l) + (|u_{lm}|^{\sigma} u_{lm}, w_k^l) = 0, \quad \forall\ k = 1, 2, \cdots, m; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} h'_{jlm}(t)(w_j^l, w_k^l) + \sum_{j=1}^{m} h_{jlm}(t)((w_j^l, w_k^l)) + \int_{\Gamma_1} h_l(., \theta_{lm}(t)) w_k^l d\Gamma + \\ + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g'_{jlm}}{\partial x_i}(t) \right] (w_j^l, w_k^l) = 0, \quad \forall\ k = 1, 2, \cdots, m; \\ \alpha_j = g_{jlm}(0), \quad \beta_j = g'_{jlm}(0), \quad \gamma_j = h_{jlm}(0), \quad j = 1, 2, \cdots, m. \end{array} \right. \tag{2.32}$$

Notemos que o somatório duplo em $(2.32)_1$ se justifica como segue:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{m} h_{jlm}(t) w_j^l, w_k^l \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h_{jlm}}{\partial x_i}(t)(w_j^l, w_k^l) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_{jlm}}{\partial x_i}(t)(w_j^l, w_k^l) = \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_{jlm}}{\partial x_i}(t) \right] (w_j^l, w_k^l).$$

Da mesma forma, para o somatório duplo em $(2.32)_2$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jlm}(t)w_j^l, w_k^l\right)\right] = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g'_{jlm}}{\partial x_i}(t)\right](w_j^l, w_k^l).$$

As igualdades em $(2.32)_3$ seguem do fato de a base β ser ortonormal.

Façamos:

$$A = \left[(w_j^l, w_k^l)\right]_{m\times m}; \quad B = \left[((w_j^l, w_k^l))\right]_{m\times m}; \quad C = \left[\int_{\Gamma_1} h_l(., u'_{lm}(t))w_k^l d\Gamma\right]_{m\times 1};$$

$$C_1 = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_{jlm}}{\partial x_i}(t)\right]_{m\times 1}; \quad C_2 = \left[(|u_{lm}|^{\sigma}u_{lm}, w_k^l)\right]_{m\times 1};$$

$$D = \left[\int_{\Gamma_1} h_l(., \theta_{lm}(t))w_k^l d\Gamma\right]_{m\times 1}; \quad D_1 = \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g'_{jlm}}{\partial x_i}(t)\right]_{m\times 1};$$

$$Y = [g_{jlm}(t)]_{m\times 1}; \quad H = [h_{jlm}(t)]_{m\times 1}; \quad Y(0) = [g_{jlm}(0)]_{m\times 1} = [\alpha_j]_{m\times 1} = Y_0;$$

$$Y'(0) = [g'_{jlm}(0)]_{m\times 1} = [\beta_j]_{m\times 1} = Y_1; \quad H(0) = [h_{jlm}(0)]_{m\times 1} = [\gamma_j]_{m\times 1} = H_0.$$

Dessa forma o sistema (2.32) fica em sua forma matricial:

$$\left|\begin{array}{l} AY'' + BY = -C - AC_1 - C_2 \\ AH' + BH = -D - AD_1 \\ Y(0) = Y_0; \quad Y'(0) = Y_1; \quad H(0) = H_0. \end{array}\right. \tag{2.33}$$

Mostremos que a matriz A é invertível. Com efeito, da simetria do pruduto interno real, segue que a matriz A é real e simétrica, portanto diagonalizável. Assim existe uma matriz M invertível e uma matriz D diagonal, tal que:

$$D = M^{-1}AM.$$

Para mostrarmos que a matriz A é invertível, basta verificarmos que o determinante de D é diferente de zero, o que equivale a mostrar que zero não é autovalor de D. Suponha por absurdo que zero seja autovalor de D. Então existe um vetor não nulo

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

satisfazendo $Dv = 0$. Note que $AMv = MM^{-1}AMv = MDv = M0 = 0$, assim, denotando

$$Mv = \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$0 = A\varphi = \left[\sum_{k=1}^{m} \left(w_j^l, w_k^l\right) \varphi_k \right]_{m\times 1} \Rightarrow \left(w_j^l, \sum_{k=1}^{m} \varphi_k w_k^l \right) = 0,\ \forall\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

Dessa forma o vetor $\alpha = \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_k w_k^l\right)_{m\times 1}$ é ortogonal ao conjunto V_m^l. Em particular o vetor $\alpha \in V_m^l$, logo $(\alpha, \alpha) = 0$, donde $\alpha = 0$. Portanto, $\forall\ k = 1, 2, \cdots, m$:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k w_k^l = 0 \Rightarrow \varphi_k = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \text{ isto é }, Mv = 0.$$

Como M é invertível, temos que a transformação linear definida por ela é invertível. Portanto $Mv = 0 \Rightarrow v = 0$, contrariando o fato de v ser um autovetor. Concluímos então que a matriz A é invertível e o sistema (2.33) fica:

$$\left| \begin{array}{l} Y'' + A^{-1}BY = -A^{-1}C - C_1 - A^{-1}C_2 \\ H' + A^{-1}BH = -A^{-1}D - D_1 \\ Y(0) = Y_0; \quad Y'(0) = Y_1; \quad H(0) = H_0. \end{array} \right. \tag{2.34}$$

Tomando $Z = \begin{bmatrix} Y \\ Y' \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ -A^{-1}B & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$; $E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -A^{-1}C - C_1 - A^{-1}C_2 \end{bmatrix}$; $Z_0 = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}$; $W = \begin{bmatrix} H \\ 0_{m\times 1} \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} -A^{-1}B & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$ e $F_1 = \begin{bmatrix} -A^{-1}D - D_1 \\ 0_{m\times 1} \end{bmatrix}$; $W_0 = \begin{bmatrix} H_0 \\ 0_{m\times 1} \end{bmatrix}$, temos que o sistema (2.34) assume a forma:

$$\left| \begin{array}{l} Z' = EZ + E_1 \\ W' = FW + F_1 \\ Z(0) = Z_0; \quad W(0) = W_0. \end{array} \right.$$

Por fim, fazendo $X = \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}$; $G = \begin{bmatrix} E & 0_{2m\times 2m} \\ 0_{2m\times 2m} & F \end{bmatrix}$; $G_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ W_0 \end{bmatrix}$, obtemos:

$$X' = GX + G_1 = \Phi(t, X).$$

Mostremos que a função $\Phi(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

(i) Fixado X, temos que a função Φ não depende de t, logo $\Phi(t, X)$ é mensurável.

(ii) Para cada t fixo, $\Phi(t, X)$ é contínua pois, G_1 é constante e a aplicação

$$N : \mathbb{R}^{4m} \to \mathbb{R}^{4m}$$

$$X \mapsto GX$$

é linear e limitada, donde contínua.

(iii) Seja K um compacto de $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{4m}$. Então

$$||\Phi(t, X)||_{\mathbb{R}^{4m}} \leq ||G_1||_{\mathbb{R}^{4m}} + ||N(X)||_{\mathbb{R}^{4m}}.$$

Como G_1 e N são contínuas então elas são limitadas em qualquer compacto do $\mathbb{R}^{4m}$, o que garante, pela desigualdade acima, que $\Phi(t, X)$ é limitada por uma função constante $\forall (t, X) \in K$.

Logo a função $\Phi(t, X)$ satisfaz as condições de Carathéodory e portanto o sistema (2.31) possui solução local, isto é, possui solução em $[0, t_{lm})$, para algum t_{lm} real.

2.2.3 Prolongamento de Soluções

O objetivo desta seção é obter estimativas que nos permitam estender a solução para o intervalo $[0, \infty)$, bem como a passagem do limite quando $m \to \infty$.

Estimativa I: Escolha $v = u'_{lm}(t)$ em $(2.31)_1$, assim:

$$(u''_{lm}(t), u'_{lm}(t)) + ((u_{lm}(t), u'_{lm}(t))) + \int_{\Gamma_1} h_l(., u'_{lm}(t)) u'_{lm}(t) d\Gamma$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_{lm}}{\partial x_i}(t), u'_{lm}(t) \right) + (|u_{lm}(t)|^{\sigma} u_{lm}(t), u'_{lm}(t)) = 0,$$

ou melhor:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u'_{lm}(t), u'_{lm}(t)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}((u_{lm}(t), u_{lm}(t))) + \int_{\Gamma_1} h_l(., u'_{lm}(t)) u'_{lm}(t) d\Gamma$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_{lm}}{\partial x_i}(t), u'_{lm}(t) \right) + \int_{\Omega} |u_{lm}(t)|^{\sigma} u_{lm}(t), u'_{lm}(t) = 0. \tag{2.35}$$

Pela regra de Leibniz de derivação sobre o sinal de integral e pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sigma + 2} \int_{\Omega} |u_{lm}(t)|^{\sigma+2} dx \right] = \frac{1}{\sigma + 2} \int_{\Omega} (\sigma + 2) |u_{lm}(t)|^{\sigma+1} \frac{u_{lm}(t) u'_{lm}(t)}{|u_{lm}(t)|} dx$$
$$= \int_{\Omega} |u_{lm}(t)|^{\sigma} u_{lm}(t) u'_{lm}(t) dx,$$

assim (2.35) fica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_{lm}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{lm}(t)||^2 + \int_{\Gamma_1} h_l(.,u'_{lm}(t))u'_{lm}(t)d\Gamma$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta_{lm}}{\partial x_i}(t), u'_{lm}(t)\right) + \frac{1}{\sigma+2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega |u_{lm}(t)|^{\sigma+2}dx\right] = 0. \tag{2.36}$$

Da mesma forma escolhendo $w = \theta_{lm}(t)$ em $(2.31)_2$, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta_{lm}(t)|^2 + ||\theta_{lm}(t)||^2 + \int_{\Gamma_1} h_l(.,\theta_{lm}(t))\theta_{lm}(t)d\Gamma + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u'_{lm}}{\partial x_i}(t), \theta_{lm}(t)\right) = 0. \tag{2.37}$$

Pela fórmula de Green-Gauss, temos:

$$\int_\Omega \frac{\partial u'_{lm}}{\partial x_i}(t)\theta_{lm}(t)dx = -\int_\Omega u'_{lm}(t)\frac{\partial\theta_{lm}}{\partial x_i}(t)dx + \int_\Gamma u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma.$$

Como o traço de ordem zero de $\theta_{lm}(t)$ é igual a zero em Γ_0, a equação acima reduz-se a

$$\left(\frac{\partial u'_{lm}}{\partial x_i}(t), \theta_{lm}(t)\right) = -\left(u'_{lm}(t), \frac{\partial\theta_{lm}}{\partial x_i}(t)\right) + \int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma,$$

donde:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u'_{lm}}{\partial x_i}(t), \theta_{lm}(t)\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(u'_{lm}(t), \frac{\partial\theta_{lm}}{\partial x_i}(t)\right) + \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma. \tag{2.38}$$

Usando o fato de h_l satisfazer a hipótese (ii) da proposição 2.1, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} h_l(.,u'_{lm}(t))u'_{lm}(t)d\Gamma \geq d_0\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma$$

e

$$\int_{\Gamma_1} h_l(.,\theta_{lm}(t))\theta_{lm}(t)d\Gamma \geq d_0\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma.$$

Fazendo-se

$$E_{1lm}(t) = \frac{1}{2}\left[|u'_{lm}(t)|^2 + ||u_{lm}(t)||^2 + |\theta_{lm}(t)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_{lm}(t)|^{\sigma+2}dx\right] \tag{2.39}$$

e usando (2.38), obtemos, após somarmos (2.36) com (2.37), a desigualdade:

$$\frac{d}{dt}E_{1lm}(t) + ||\theta_{lm}(t)||^2 + d_0\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + d_0\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma \leq 0. \tag{2.40}$$

Para estimar o último termo do lado esquerdo da inequação acima, usaremos a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young com p e q iguais a 2. Assim teremos que,

$\forall\ \varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma \right| &\leq \\
&\leq \int_{\Gamma_1} |u'_{lm}(t)||\theta_{lm}(t)||\nu_i| d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{n}}|u'_{lm}(t)|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\varepsilon}}|\theta_{lm}(t)||\nu_i|d\Gamma \\
&\leq \left(\int_{\Gamma_1}\frac{\varepsilon}{n}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma_1}\frac{n}{\varepsilon}|\theta_{lm}(t)|^2|\nu_i|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2n}\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2\nu_i^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2n}\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + \frac{n}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma,
\end{aligned}
$$

daí, segue que

$$
\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + \frac{n^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma.
$$

Portanto

$$
-\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma - \frac{n^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1} u'_{lm}(t)\theta_{lm}(t)\nu_i d\Gamma.
$$

Usando a equação acima, com $\varepsilon = d_0$ em (2.40) obteremos:

$$
\frac{d}{dt}E_{1lm}(t) + ||\theta_{lm}(t)||^2 + \frac{d_0}{2}\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + d_1\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma \leq 0, \tag{2.41}
$$

onde $d_1 = d_0 - \dfrac{n^2}{2d_0}$. Decorre da hipótese (2.3) que $d_1 \geq 0$, pois

$$
2d_0^2 \geq n^2 \Rightarrow d_0 \geq \frac{n^2}{2d_0} \Rightarrow d_0 - \frac{n^2}{2d_0} \geq 0.
$$

Integrando (2.41) sobre $[0,t]$ com $t \leq t_{lm}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
E_{1lm}(t) + \int_0^t ||\theta_{lm}(s)||^2 ds + \frac{d_0}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}|u'_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds \\
+ d_1\int_0^t\int_{\Gamma_1}|\theta_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds \leq E_{1lm}(0),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
E_{1lm}(0) &= \frac{1}{2}\left[|u'_{lm}(0)|^2 + ||u_{lm}(0)||^2 + |\theta_{lm}(0)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_{lm}(0)|^{\sigma+2}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[|u_l^1|^2 + ||u^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2}{\sigma+2}||u^0||^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)}\right].
\end{aligned}
$$

Pela imersão (2.6) temos que $V \hookrightarrow L^{\sigma+2}(\Omega)$, donde existe constante c_1 tal que $||u^0||^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)} \leq c_2||u^0||$. Temos também que $u_l^1 \to u^1$ em $H_0^1(\Omega)$ que por sua vez está continuamente imerso em $L^2(\Omega)$. A imersão nos garante que existe uma constante $c_2 > 0$ tal que $|u_l^1|^2 \leq c_2||u_l^1||^2$

e a convergência nos diz que, dado $\varepsilon > 0, \exists l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|||u_l^1||^2 - ||u^1||^2| < \varepsilon, \forall l \geq l_0$, isto é, $||u_l^1||^2 < \varepsilon + ||u^1||^2$, assim, tomando $\eta = c_2\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
E_{1lm}(t) + \int_0^t ||\theta_{lm}(s)||^2 ds + \frac{d_0}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} |u'_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds + d_1\int_0^t\int_{\Gamma_1} |\theta_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds \\
\leq \frac{1}{2}\left[|u_l^1|^2 + ||u^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2}{\sigma+2}||u^0||^{\sigma+2}_{L^{\sigma+2}(\Omega)}\right] \\
\leq \frac{1}{2}\left[(c_2||u^1||^2 + \eta) + ||u^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2c_1}{\sigma+2}||u^0||^{\sigma+2}\right],
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[|u'_{lm}(t)|^2 + ||u_{lm}(t)||^2 + |\theta_{lm}(t)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_{lm}(t)|^{\sigma+2}\right] + \int_0^t ||\theta_{lm}(s)||^2 ds \\
+\frac{d_0}{2}\int_0^t ||u'{}_{lm}(s)||^2_{L^2(\Gamma_1)} ds + d_1\int_0^t ||\theta_{lm}(s)||^2_{L^2(\Gamma_1)} ds \leq C. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Daqui em diante usaremos C para denotar várias constantes.

De (2.42) obtemos limitações para $u_{lm}(t)$ e $\theta_{lm}(t)$, $\forall\ l, m$. Daí podemos via corolário do Teorema de Carathéodory estender a solução (u_{lm}, θ_{lm}) para o intervalo $[0, \infty)$.

Ainda por (2.42), temos

a) $||u_{lm}(t)|| \leq C, \ \ |u'_{lm}(t)| \leq C$ e $|\theta_{lm}(t)| \leq C\ \forall\ t \in [0, \infty)$ e $\forall\ l, m$.

b) $\left(\int_0^\infty ||u'_{lm}(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$ e $\left(\int_0^\infty ||\theta_{lm}(t)||^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\ \forall\ t \in [0, \infty)$ e $\forall\ l, m$

Tomando-se o supremo essencial em a) obtemos

$$||u_{lm}||_{L^\infty(0,\infty;V)} \leq C, \ ||u'_{lm}||_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))} \leq C \text{ e } ||\theta_{lm}||_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))} \leq C. \qquad (2.43)$$

Do item b), vem que

$$||u'_{lm}||_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))} \leq C \text{ e } ||\theta_{lm}||_{L^2(0,\infty;V)} \leq C. \qquad (2.44)$$

As inequações (2.43) e (2.44) nos diz essencialmente que

$$\left|\begin{array}{l}
(u_{lm}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty;V) \\
(u'_{lm}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \\
(u'_{lm}) \text{ é limitada em } L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \\
(\theta_{lm}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \\
(\theta_{lm}) \text{ é limitada em } L^2(0,\infty;V).
\end{array}\right. \qquad (2.45)$$

Estimativa II: Notemos que pela regra de Leibniz e regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_1} h_l(.,u'_{lm}(t))vd\Gamma\right) = \int_{\Gamma_1} h'_l(.,u'_{lm}(t))u''_{lm}(t)vd\Gamma, \quad \forall\ v \in V^l_m.$$

Da linearidade da derivada e pelo Teorema de Schwarz, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta_{lm}}{\partial x_i}(t),v\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\theta_{lm}}{\partial t\partial x_i}(t),v\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta'_{lm}}{\partial x_i}(t),v\right), \quad \forall v \in V^l_m.$$

Temos também que

$$\frac{d}{dt}\left(|u_{lm}(t)|^{\sigma}u_{lm}(t),v\right) = \left(\sigma|u_{lm}(t)|^{\sigma-1}\frac{u_{lm}(t)u'_{lm}(t)}{|u_{lm}(t)|}u_{lm}(t) + |u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),v\right)$$

$$= \left(\sigma|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t) + |u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),v\right) = \left((\sigma+1)|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),v\right), \quad \forall v \in V^l_m.$$

Diferenciando a equação $(2.31)_1$ em relação a t, e observando as derivadas anteriores obteremos

$$\begin{aligned}(u'''_{lm}(t),v) + ((u'_{lm}(t),v)) &+ \int_{\Gamma_1} h'_l(.,u'_{lm}(t))u''_{lm}(t)vd\Gamma \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta'_{lm}}{\partial x_i}(t),v\right) + ((\sigma+1)|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),v) = 0.\end{aligned}$$

Escolhendo $v = u''_{lm}(t)$ na equação acima, vem que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u''_{lm}(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{lm}(t)||^2 &+ \int_{\Gamma_1} h'_l(.,u'_{lm}(t))|u''_{lm}(t)|^2 d\Gamma \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\theta'_{lm}}{\partial x_i}(t),u''_{lm}(t)\right) + (\sigma+1)\left(|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),u''_{lm}(t)\right) = 0. \qquad (2.46)\end{aligned}$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, diferenciando a equação $(2.31)_2$ com relação a t e fazendo $w = \theta'_{lm}(t)$ na equação resultante, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta'_{lm}(t)|^2 + ||\theta'_{lm}(t)||^2 + \int_{\Gamma_1} h'_l(.,\theta_{lm}(t))|\theta'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u''_{lm}}{\partial x_i}(t),\theta'_{lm}(t)\right) = 0. \qquad (2.47)$$

Novamente pela fórmula de Green-Gauss

$$\int_{\Omega}\frac{\partial u''_{lm}}{\partial x_i}(t)\theta'_{lm}(t)dx = -\int_{\Omega} u''_{lm}(t)\frac{\partial\theta'_{lm}}{\partial x_i}(t)dx + \int_{\Gamma} u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma,$$

ou seja

$$\left(\frac{\partial u''_{lm}}{\partial x_i}(t),\theta'_{lm}(t)\right) = -\left(u''_{lm}(t),\frac{\partial\theta'_{lm}}{\partial x_i}(t)\right) + \int_{\Gamma_1} u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma.$$

Da igualdade acima, deduz-se que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u''_{lm}}{\partial x_i}(t),\theta'_{lm}(t)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\left(u''_{lm}(t),\frac{\partial \theta'_{lm}}{\partial x_i}(t)\right)+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma. \tag{2.48}$$

Usando a igualdade (2.48) na equação (2.47) e em seguida, adicionando a equação resultante com a equação (2.46), obteremos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u''_{lm}(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{lm}(t)||^2+\int_{\Gamma_1}h'_l(.,u'_{lm}(t))|u''_{lm}(t)|^2d\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta'_{lm}(t)|^2\\&+||\theta'_{lm}(t)||^2+\int_{\Gamma_1}h'_l(.,\theta_{lm}(t))|\theta'_{lm}(t)|^2d\Gamma+(\sigma+1)\left(|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),u''_{lm}(t)\right)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma=0.\end{aligned}$$

Usando a hipótese (ii) da proposição (2.1) obtemos

$$\frac{h_l(x,s)-h_l(x,r)}{s-r}\geq d_0.$$

Tomando o limite quando $s\rightarrow r$, conclui-se que $h'_l(x,s)\geq d_0$. Usando a desigualdade acima para h'_l e escrevendo

$$E_{2lm}(t)=\frac{1}{2}\left[\,|u''_{lm}(t)|^2+||u'_{lm}(t)||^2+|\theta'_{lm}(t)|^2\right] \tag{2.49}$$

vem que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_{2lm}(t)+||\theta'_{lm}(t)||^2+d_0\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(t)|^2d\Gamma+d_0\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(t)|^2d\Gamma\\&\quad+(\sigma+1)\left(|u_{lm}(t)|^{\sigma}u'_{lm}(t),u''_{lm}(t)\right)+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma\leq 0.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como anteriormente, usando as desigualdades de Hölder e a de Young temos que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(t)|^2d\Gamma+\frac{n^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(t)|^2d\Gamma.$$

Assim

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(t)|^2d\Gamma-\frac{n^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(t)|^2d\Gamma\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_1}u''_{lm}(t)\theta'_{lm}(t)\nu_i d\Gamma. \tag{2.51}$$

Pela imersão (2.6) temos que $V\hookrightarrow L^{q_1^*}(\Omega)\hookrightarrow L^{\sigma n}(\Omega)$, portanto existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$||u_{lm}(t)||^{\sigma}_{L^{\sigma n}(\Omega)}\leq c_1||u_{lm}(t)||\text{ e }||u'_{lm}(t)||_{L^{q_1^*}(\Omega)}\leq c_2||u'_{lm}(t)||.$$

Usando a desigualdade de Hölder com $\dfrac{1}{q_1^*}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}=1$ e as duas desigualdades acima, teremos

$$\begin{aligned}
|(|u_{lm}(t)|^\sigma u'_{lm}(t),u''_{lm}(t))| &\leq \int_\Omega |u_{lm}(t)|^\sigma |u'_{lm}(t)||u''_{lm}(t)|dt\\
&\leq \left(\int_\Omega |u_{lm}(t)|^{\sigma n}dt\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_\Omega |u'_{lm}(t)|^{q_1^*}dt\right)^{\frac{1}{q_1^*}}\left(\int_\Omega |u''_{lm}(t)|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq ||u_{lm}(t)||^\sigma_{L^{\sigma n}(\Omega)}||u'_{lm}(t)||_{L^{q_1^*}(\Omega)}|u''_{lm}(t)|\\
&\leq c_1||u_{lm}(t)||^\sigma c_2||u'_{lm}(t)|||u''_{lm}(t)|.
\end{aligned}$$

Pela estimativa $(2.45)_1$ temos que (u_{lm}) é limitada em $L^\infty(0,\infty,V)$, assim, a inequação acima confere

$$|(|u_{lm}(t)|^\sigma u'_{lm}(t),u''_{lm}(t))|\leq c||u'_{lm}(t)|||u''_{lm}(t)|\leq C[\ ||u'_{lm}(t)||^2+|u''_{lm}(t)|^2],$$

onde a constante C independe de l,m e $t\geq 0$. Assim:

$$-C[\ ||u'_{lm}(t)||^2+|u''_{lm}(t)|^2]\leq (|u_{lm}(t)|^\sigma u'_{lm}(t),u''_{lm}(t)). \tag{2.52}$$

Usando a desigualdade (2.51) com $\varepsilon=d_0$ e a desigualdade (2.52), na inequação (2.50), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{2lm}(t)+&||\theta'_{lm}(t)||^2+\frac{d_0}{2}\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(t)|^2d\Gamma+d_1\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(t)|^2d\Gamma\\
&\leq C[\ ||u'_{lm}(t)||^2+|u''_{lm}(t)|^2], \qquad \forall\ l,m \text{ e } t\geq 0,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

onde $d_1=d_0-\dfrac{n^2}{2d_0}$ é uma constante positiva como vimos anteriormente.

Para obtermos estimativas a partir da desigualdade (2.53), vamos primeiro obter limitações para $(u''_{lm}(0))$ e $(\theta'_{lm}(0))$. Para isso façamos $t=0$ nas equações $(2.31)_1$ e $(2.31)_2$. Em seguida tomamos $v=u''_{lm}(0)$ e $w=\theta'_{lm}(0)$ nas mesmas equações, respectivamente, assim:

$$\left|\begin{array}{l}
|u''_{lm}(0)|^2+((u^0,u''_{lm}(0)))+\displaystyle\int_{\Gamma_1}h_l(.,u_l^1)u''_{lm}(0)d\Gamma+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_i},u''_{lm}(0)\right)+\\
+(|u^0|^\sigma u^0,u''_{lm}(0))=0\\
|\theta'_{lm}(0)|^2+((\theta^0,\theta'_{lm}(0)))+\int_{\Gamma_1}h_l(.,\theta^0)\theta'_{lm}(0)d\Gamma+\\
+\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u_l^1}{\partial x_i},\theta'_{lm}(0)\right)=0.
\end{array}\right. \tag{2.54}$$

Analogamente como feito na equação (2.29), a identidade de Green nos garante:

$$((u^0,u''_{lm}(0)))=-(\Delta u^0,u''_{lm}(0))+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u^0}{\partial\nu}u''_{lm}(0)d\Gamma, \tag{2.55}$$

$$((\theta^0,\theta'_{lm}(0)))=-(\Delta\theta^0,\theta'_{lm}(0))+\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\theta^0}{\partial\nu}\theta'_{lm}(0)d\Gamma. \tag{2.56}$$

Substituindo as equações (2.55) e (2.56) nas equações $(2.54)_1$ e $(2.54)_2$, respectivamente obteremos:

$$\left|\begin{array}{l} |u''_{lm}(0)|^2-(\Delta u^0,u''_{lm}(0))+\displaystyle\int_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial u^0}{\partial\nu}+h_l(.,u_l^1)\right]u''_{lm}(0)d\Gamma \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_i},u''_{lm}(0)\right)+(|u^0|^\sigma u^0,u''_{lm}(0))=0 \\ |\theta'_{lm}(0)|^2-(\Delta\theta^0,\theta'_{lm}(0))+\displaystyle\int_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial\theta^0}{\partial\nu}+h_l(.,\theta^0)\right]\theta'_{lm}(0)d\Gamma+ \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u_l^1}{\partial x_i},\theta'_{lm}(0)\right)=0. \end{array}\right. \tag{2.57}$$

Pelas igualdades em (2.27), temos que as integrais em Γ_1 nas equações $(2.57)_1$ e $(2.57)_2$ são nulas. Da convergência (2.26) e imersão (2.6) aplicadas nas equações do sistema (2.57), resulta que:

$$\left|\begin{array}{ll} |u''_{lm}(0)|^2\le C, & \forall\ l,m \\ |\theta'_{lm}(0)|^2\le C & \forall\ l,m. \end{array}\right. \tag{2.58}$$

Dado $T>0$, integrando a inequação (2.53) de 0 à t, com $t\le T$ vem que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\ |u''_{lm}(t)|^2+||u'_{lm}(t)||^2+|\theta'_{lm}(t)|^2\right]+\int_0^t||\theta'_{lm}(s)||^2ds+\frac{d_0}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(s)|^2d\Gamma ds \\ &\qquad+d_1\int_0^t\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(s)|^2d\Gamma ds \\ &\le\frac{1}{2}\left[\ |u''_{lm}(0)|^2+||u_l^1||^2+|\theta'_{lm}(0)|^2\right]+\int_0^t C[\ ||u'_{lm}(s)||^2+|u''_{lm}(s)|^2]ds. \end{aligned}$$

Pela convergência (2.26) temos que (u_l^1) é limitada em V, e pelas limitações em (2.58), obtemos a desigualdade:

$$|u''_{lm}(t)|^2+||u'_{lm}(t)||^2\le C_1+\int_0^t C[\ ||u'_{lm}(s)||^2+|u''_{lm}(s)|^2]ds.$$

A desigualdade de Gronwall nos garante que, para todo $T\ge 0$ a função $t\mapsto|u''_{lm}(t)|^2+||u'_{lm}(t)||^2$ é limitada, donde concluímos:

$$\left|\begin{array}{l} ||u'_{lm}(t)||\le C,\quad\forall\ l,m \\ |u''_{lm}(t)|\le C,\quad\forall\ l,m \\ |u''_{lm}(t)|^2+||u'_{lm}(t)||^2+|\theta'_{lm}(t)|^2+\displaystyle\int_0^t||\theta'_{lm}(s)||^2ds+\frac{d_0}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}|u''_{lm}(s)|^2d\Gamma ds \\ +d_1\displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_1}|\theta'_{lm}(s)|^2d\Gamma ds\le C\quad\forall\ l,m \text{ e } t\ge 0. \end{array}\right. \tag{2.59}$$

Como anteriormente obtemos as limitações:

$$\left| \begin{array}{l} (u'_{lm}),\ \text{é limitada em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V); \\ (u''_{lm}),\ \text{é limitada em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)); \\ (u''_{lm}),\ \text{é limitada em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)); \\ (\theta'_{lm}),\ \text{é limitada em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,\infty;V). \end{array} \right. \tag{2.60}$$

2.2.4 Passagem ao limite quando $m \to \infty$

No que segue, das estimativas $(2.45)_1$, $(2.45)_2$ e das imersões $L^\infty(0,\infty,V) \hookrightarrow L^2(0,\infty,V)$ $\hookrightarrow L^2(0,\infty,L^2(\Omega))$ obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} (u_{lm}) \text{ é limitada em } L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q); \\ (u'_{lm}) \text{ é limitada em } L^2(0,\infty;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q). \end{array} \right.$$

Seguem das duas limitações acima, que existem subsequências de (u_{lm}) e (u'_{lm}) que ainda serão denotadas por (u_{lm}) e (u'_{lm}), e funções $u_l : \Omega\times]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ e $\bar{u} : \Omega\times]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$u_{lm} \rightharpoonup u_l \text{ e } u'_{lm} \rightharpoonup \bar{u_l} \text{ em } L^2(Q).$$

Vamos mostrar que $\bar{u_l} = u'_l$. Com efeito, por definição de convergência fraca, $\forall g \in (L^2(Q))'$ tem-se:

$$\langle g, u_{lm} \rangle_{(L^2(Q))' \times L^2(Q)} \ \to \ \langle g, u_l \rangle_{(L^2(Q))' \times L^2(Q)}.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $\psi(x,t) \in L^2(Q)$ tal que:

$$\int_0^\infty \int_\Omega u_{lm}(t)\psi(x,t)dxdt \ \to \ \int_0^\infty \int_\Omega u_l(t)\psi(x,t)dxdt,$$

ou seja:

$$\int_0^\infty (u_{lm}(t), \psi(x,t))dt \ \to \ \int_0^\infty (u_l(t), \psi(x,t))dt.$$

Considere $\psi(x,t) = \rho(x)\phi(t)$ com $\rho \in L^2(\Omega)$ e $\phi \in D(0,\infty)$, assim:

$$\int_0^\infty (u_{lm}(t), \rho)\phi(t)dt \ \to \ \int_0^\infty (u_l(t), \rho)\phi(t)dt \ \ \forall \phi \in D(0,\infty),$$

portanto:

$$(u_{lm}(t), \rho) \ \to \ (u_l(t), \rho) \ \text{ em } D'(0,\infty).$$

Analogamente:

$$(u'_{lm}(t), \rho) \;\rightarrow\; (\bar{u_l}\,(t), \rho) \;\text{ em } D'(0, \infty).$$

Usando o fato derivada distribucional ser contínua, teremos que

$$\frac{d}{dt}(u_{lm}(t), \rho) \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(u_l(t), \rho).$$

Da unicidade do limite em $D'(0, \infty)$ temos que $\frac{d}{dt}(u_l(t), \rho) = (\bar{u_l}\,(t), \rho)$, e pela proposição 1.6, segue que $u'_l = \bar{u_l}$.

Portanto, raciocinando de maneira análoga, obtemos das estimativas em (2.45) e (2.60), podemos obter subsequências de (u_{lm}) e (θ_{lm}) que ainda representaremos por (u_{lm}) e (θ_{lm}) e funções $u_l : \Omega \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $\theta_l : \Omega \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$\left| \begin{array}{l}
u_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} u_l \text{ em } L^\infty(0, \infty; V); \\
u'_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_l \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty; V); \\
u'_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_l \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)); \\
u'_{lm} \rightharpoonup u'_l \text{ em } L^2(0, \infty; L^2(\Gamma_1)); \\
u''_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} u''_l \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)); \\
u''_{lm} \rightharpoonup u''_l \text{ em } L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Gamma_1)); \\
\theta_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} \theta_l \text{ em } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)); \\
\theta_{lm} \rightharpoonup \theta_l \text{ em } L^2(0, \infty; V); \\
\theta'_{lm} \overset{*}{\rightharpoonup} \theta'_l \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)); \\
\theta'_{lm} \rightharpoonup \theta'_l \text{ em } L^2_{loc}(0, \infty; V).
\end{array} \right. \tag{2.61}$$

A estimativa $(2.60)_1$ implica que (u'_{lm}) é limitada em $L^\infty_{loc}(0, \infty, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$. Assim utilizando a estimativa $(2.60)_3$ e o fato de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma_1)$, obtemos via Teorema de Aubin-Lions, que:

$$u'_{lm} \;\rightarrow\; u'_l \;\text{ em } L^2_{loc}(0, \infty, L^2(\Gamma_1)).$$

Usando a convergência acima e a condição (iii) da Proposição 2.1 sobre h_l, obtemos

$$\int_0^\infty \int_{\Gamma_1} |h_l(x, u'_{lm}(t)) - h_l(x, u'_l(t))|^2 dxdt \leq (C_l)^2 \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} |u'_{lm}(t) - u'_l(t)|^2 dxdt$$
$$= (C_l)^2 ||u'_{lm} - u'_l||^2_{L^2(0,\infty,L^2(\Gamma_1))} \rightarrow 0 \;\text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$h_l(., u'_{lm}) \;\rightarrow\; h_l(., u'_l) \;\text{ em } L^2_{loc}(0, \infty, L^2(\Gamma_1)). \tag{2.62}$$

Similarmente, usando as estimativas $(2.45)_4$ e $(2.60)_4$ nós obtemos

$$h_l(.,\theta_{lm}) \;\to\; h_l(.,\theta_l) \;\text{ em } L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)). \tag{2.63}$$

As estimativas $(2.45)_1$ e $(2.45)_2$, a imersão (2.6) e o teorema de Aubin-Lions, nos permitem obter subsequência de (u_{lm}) que ainda denotaremos por (u_{lm}), tal que

$$|u_{lm}|^\sigma u_{lm} \;\overset{*}{\rightharpoonup}\; |u_l|^\sigma u_l \;\text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega)). \tag{2.64}$$

As convergências (2.61)-(2.64) nos permitem a passagem ao limite quando $m\to\infty$ nas equações aproximadas $(2.31)_1$ e $(2.31)_2$. Usando a densidade de V^l_m em V, obtemos, $\forall\, v\in V$ e $\forall\,\psi\in D(0,\infty)$

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty (u_l''(t),v)\psi(t)dt+\int_0^\infty ((u_l(t),v))\psi(t)dt+\int_0^\infty\int_{\Gamma_1} h_l(.,u_l'(t))v\psi(t)d\Gamma dt+\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\int_0^\infty\left(\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}(t),v\right)\psi(t)dt+\int_0^\infty (|u_l(t)|^\sigma u_l(t),v)\psi(t)dt=0;\\ \displaystyle\int_0^\infty(\theta_l'(t),w)\psi(t)dt+\int_0^\infty((\theta_l(t),w))\psi(t)dt+\int_0^\infty\int_{\Gamma_1} h_l(.,\theta_l(t))w\psi(t)d\Gamma dt+\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\int_0^\infty\left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_i}(t),w\right)\psi(t)dt=0.\end{array}\right. \tag{2.65}$$

Seja $S=\{v\psi; v\in D(\Omega) \text{ e } \psi\in D(0,\infty)\}$. Tomemos $v\psi\in S$. Como $v\in D(\Omega)$ temos que:

$$\int_0^\infty\int_{\Gamma_1} h_l(.,u_l'(t))v(x)\psi(t)d\Gamma dt=0.$$

Neste caso

$$-\int_0^\infty(\Delta u_l(t),v)\psi(t)dt=\int_0^\infty((u_l(t),v))\psi(t)dt.$$

Assim, obtemos

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty(u_l''(t),v)\psi(t)dt=\langle u_l'',v\psi\rangle_{D'(Q)\times D(Q)};\\ \displaystyle\int_0^\infty((u_l(t),v))\psi(t)dt=-\langle\Delta u_l,v\psi\rangle_{D'(Q)\times D(Q)};\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\int_0^\infty\left(\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}(t),v\right)\psi(t)dt=\left\langle\sum_{i=1}^n\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i},v\psi\right\rangle_{D'(Q)\times D(Q)};\\ \displaystyle\int_0^\infty(|u_l(t)|^\sigma u_l(t),v)\psi(t)dt=\langle|u_l|^\sigma u_l,v\psi\rangle_{D'(Q)\times D(Q)}.\end{array}\right. \tag{2.66}$$

Usando as igualdades de (2.66) na equação $(2.65)_1$ e a densidade de S em $D'(Q)$, vem que

$$u_l''-\Delta u_l+\sum_{i=1}^n\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}+|u_l|^\sigma u_l=0 \text{ em } D'(Q),$$

portanto, obtemos $\Delta u_l \in L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega))$, pois u_l'', $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}$ e $|u_l|^\sigma u_l \in L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega))$.

Da mesma forma, obtemos $\Delta\theta_l \in L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega))$. Portanto, valem

$$\left|\begin{array}{l} u_l'' - \Delta u_l + \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta_l}{\partial x_i} + |u_l|^\sigma u_l = 0 \ \text{ em } \ L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega)), \\ \theta_l' - \Delta\theta_l + \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_l'}{\partial x_i}(x,t) = 0 \ \text{ em } \ L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.67}$$

De $\Delta u_l \in L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega))$ e da convergência $(2.61)_1$, segue, como feito em Lions [5] ou Medeiros e Milla Miranda [12], que:

$$\frac{\partial u_l}{\partial\nu} \in L^\infty_{loc}(0,\infty,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Similarmente obtemos:

$$\frac{\partial\theta_l}{\partial\nu} \in L^\infty_{loc}(0,\infty,H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Multiplicando ambos os lados da equação $(2.67)_1$ por $v\psi$ com $v\in V$ e $\psi\in D(0,\infty)$, integrando a equação resultante em Ω e $[0,\infty)$, usando a fórmula de Green-Gauss, e a regularidade, recém obtida de $\dfrac{\partial u_l}{\partial\nu}$ em Γ_1, concluímos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (u_l'',v)\psi dt + \int_0^\infty ((u_l,v))\psi dt + \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial u_l}{\partial\nu}, v\right\rangle \psi dt + \\ &\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left(\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}, v\right)\psi dt + \int_0^\infty (|u_l|^\sigma u_l, v)\psi dt = 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Analogamente obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (\theta_l',w)\psi dt + \int_0^\infty ((\theta_l,w))\psi dt + \int_0^\infty \left\langle \frac{\partial\theta_l}{\partial\nu}, w\right\rangle \psi dt + \\ &\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_i}, w\right)\psi dt = 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Note que nas duas equações acima utilizamos a dualidade $\langle\ ,\ \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$. Comparando a equação $(2.65)_1$ com a equação (2.68), nós obtemos, em particular $\forall v\in D(\Omega)$ e $\forall\psi\in D(0,\infty)$:

$$\int_0^\infty \left\langle \frac{\partial u_l}{\partial\nu}, v\right\rangle \psi dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} h_l(.,u_l'(t)) v\psi(t) d\Gamma dt = 0,$$

isto, é:

$$\left\langle \frac{\partial u_l}{\partial\nu} + \int_{\Gamma_1} h_l(.,u_l'), v\psi \right\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} = 0,\ \forall v\in D(\Omega) \ \text{ e } \ \forall\psi\in D(0,\infty).$$

Novamente, pela densidade de S em D(Q) e usando o fato de $h_l(.,u_l')$ pertencer à $L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1))$, concluímos que:

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} + h_l(.,u_l') = 0, \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)). \tag{2.70}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial \nu} + h_l(.,\theta_l) = 0, \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty,L^2(\Gamma_1)). \tag{2.71}$$

2.2.5 Passagem ao limite quando $l \to \infty$

Nesta seção obteremos algumas estimativas que nos permitam passar ao limite quando $l \to \infty$ nas equações (2.65) assim, obtendo um par de soluções $\{u,\theta\}$ que satisfaçam as condições (2.22)-(2.25). Notemos que as estimativas (2.45) e (2.60) são válidas também para a sequência de funções (u_l) e (θ_l). Com efeito, da convergência $(2.61)_1$, segue da proposição 1.2 que

$$\|u_l\|_{L^\infty(0,\infty;V)} \leq \liminf \|u_{lm}\|_{L^\infty(0,\infty;V)} \leq C, \quad \forall l,m \in \mathbb{N}$$

ou seja, (u_l) é limitada em $L^\infty(0,\infty;V)$. Analogamente, obtemos as outras limitações.

Dessa forma, podemos obter subsequências de (u_l) e (θ_l), que ainda serão denotadas por (u_l) (θ_l), respectivamente, e funções $u : \Omega\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ e $\theta : \Omega\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ tais que:

$$\left|\begin{array}{l}
u_l \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,\infty;V);\\
u_l' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V);\\
u_l' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega));\\
u_l' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1));\\
u_l'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega));\\
u_l'' \rightharpoonup u'' \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1));\\
\theta_l \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \text{ em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega));\\
\theta_l \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,\infty;V);\\
\theta_l' \overset{*}{\rightharpoonup} \theta' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega));\\
\theta_l' \rightharpoonup \theta' \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty;V).
\end{array}\right. \tag{2.72}$$

Da mesma forma como em (2.64) temos que:

$$|u_l|^\sigma u_l \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^\sigma u \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty,L^2(\Omega)). \tag{2.73}$$

Pela convergência $(2.72)_2$ temos que

$$u_l' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^{\infty}_{loc}(0,\infty; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

A convergência acima, a convergência $(2.72)_6$ e o Teorema de Aubin-Lions nos garante a convergência forte

$$u_l' \to u' \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)). \tag{2.74}$$

Fixando um real $T > 0$ arbitrário, a partir da convergência (2.74), obtemos em particular que

$$u_l'(x,t) \to u(x,t), \quad \text{q.s. em } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T).$$

Fixe agora $(x,t) \in \Sigma_1$. Então o conjunto $\{u_l'(x,t);\ l \in \mathbb{N}\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Pelo item (iv) da Proposição 2.1 e da continuidade de h temos:

$$h_l(x, u_l'(x,t)) \to h(x, u'(x,t)) \ \text{ q.s. em } \Sigma_1, \tag{2.75}$$

pois:

$$|h_l(x,u_l') - h(x,u')| \le |h_l(x,u_l') - h(x,u_l')| + |h(x,u_l') - h(x,u')|.$$

A equação $(2.67)_1$, juntamente com a equação (2.70), nos permite concluir que:

$$(u_l''(t), u_l'(t)) + ((u_l(t), u_l'(t))) + \int_{\Gamma_1} h_l(., u_l'(t)), u_l'(t) d\Gamma + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t), u_l'(t) \right)$$
$$+ (|u_l(t)|^{\sigma} u_l(t), u_l'(t)) = 0,$$

isto, é:

$$\int_{\Gamma_1} h_l(., u_l'(t)), u_l'(t) d\Gamma = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_l'(t)|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_l(t)||^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t), u_l'(t) \right)$$
$$- (|u_l(t)|^{\sigma} u_l(t), u_l'(t)). \tag{2.76}$$

Notemos que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t) u_l'(t) dx \right| \le \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u_l'(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u_l'(t)|^2 dx \right],$$

assim

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_l}{\partial x_i}(t), u_l'(t) \right) \right| \le C \left[||\theta_l(t)||^2 + |u_l'(t)|^2 \right]. \tag{2.77}$$

Obtemos também, usando a imersão (2.6), que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |u_l(t)|^\sigma u_l(t) u_l'(t)dx\right| &\leq \int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+1}|u_l'(t)|dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u_l(t)|^{2\sigma+2}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_l'(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega |u_l(t)|^{2\sigma+2}dx\right)^{\frac{1}{2\sigma+2}}\right]^{\sigma+1} \left(\int_\Omega |u_l'(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2}\left[||u_l(t)||^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}(\Omega)} + |u_l'(t)|^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[c_1||u_l(t)||^{2\sigma+2} + |u_l'(t)|^2\right],
\end{aligned}
$$

portanto

$$|(|u_l(t)|^\sigma u_l(t), u_l'(t))| \leq C\left[||u_l(t)||^{2\sigma+2} + |u_l'(t)|^2\right], \tag{2.78}$$

onde a constante $C > 0$ independe de l e $t > 0$.

Temos que $u_l \in L^\infty(0, T, V)$, $u_l' \in L^\infty(0, T, V)$ e $u_l'' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. Pelo Teorema 1.7, temos que $u_l \in C^0([0, T], V)$ e $u_l' \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, donde faz sentido calcular $u_l(0)$, $u_l(T)$, $u_l'(0)$ e $u_l'(T)$. As sequências $(u_l(0))$, $(u_l(T))$ são limitadas em V e, as sequências $(u_l'(0))$ e $(u_l'(T))$ são limitadas em $L^2(\Omega)$. Integrando de 0 à T a equação (2.76), usando as desigualdades (2.77) e (2.78), junto com as estimativas em (2.45) e a convergência (2.26) obtemos:

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} h_l(., u_l'(t))u_l'(t)d\Gamma \leq C, \ \forall l \text{ e } t \in [0, T].$$

Como $h_l(x, u_l'(t))u_l'(t) \geq 0$, então

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |h_l(., u_l'(t))||u_l'(t)|d\Gamma \leq C, \ \forall l \text{ e } t \in [0, T]. \tag{2.79}$$

Assim, da convergência (2.75) e da limitação (2.79), resulta do Teorema de Strauss que

$$h_l(x, u_l') \to h(x, u') \ \text{ em } \ L^1(\Gamma_1 \times (0, T)) \equiv L^1(0, T, L^1(\Gamma_1)).$$

Portanto

$$h_l(., u_l') \to h(., u') \ \text{ em } L^1_{loc}(0, \infty, L^1(\Gamma_1)). \tag{2.80}$$

De maneira similar obtemos

$$h_l(., \theta_l) \to h(., \theta) \ \text{ em } L^1_{loc}(0, \infty, L^1(\Gamma_1)). \tag{2.81}$$

As convergências (2.72), (2.73), (2.80) e (2.81), garantem a passagem do limite quando $l \to \infty$ nas equações em (2.65), e assim obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\infty (u''(t), v)\psi(t)dt + \int_0^\infty ((u(t), v))\psi(t)dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} h(., u'(t))v\psi(t)d\Gamma dt + \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}(t), v \right) \psi(t)dt + \int_0^\infty (|u(t)|^\sigma u(t), v)\psi(t)dt = 0; \\ \displaystyle\int_0^\infty (\theta'(t), w)\psi(t)dt + \int_0^\infty ((\theta(t), w))\psi(t)dt + \int_0^\infty \int_{\Gamma_1} h(., \theta(t))w\psi(t)d\Gamma dt + \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \left(\frac{\partial u'}{\partial x_i}(t), w \right) \psi(t)dt = 0, \qquad \forall v \in V \text{ e } \psi \in D(0, \infty). \end{array} \right.$$

Analogamente como feito em (2.65), obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle u'' - \Delta u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + |u|^\sigma u = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty, L^2(\Omega)), \\ \displaystyle \theta' - \Delta \theta + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u'}{\partial x_i}(x, t) = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty, L^2(\Omega)), \end{array} \right. \tag{2.82}$$

ou seja, o par $\{u, \theta\}$ satisfaz (2.23).

De $(2.72)_1$ e da equação $(2.67)_1$ temos que $\Delta u_l \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u$, em $L^\infty_{loc}(0, \infty, L^2(\Omega))$. Então

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ em } L^\infty_{loc}(0, \infty, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{2.83}$$

As convergências (2.80) e (2.83) implicam em

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} \to \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ em } D'(\Gamma_1 \times (0, \infty)) \text{ e } h_l(., u_l') \to h(., u') \text{ em } D'(\Gamma_1 \times (0, \infty)). \tag{2.84}$$

Tomando o limite na equação (2.70), usando as duas convergências acima e a regularidade de $h(., u')$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(., u') = 0 \text{ em } L^1_{loc}(0, \infty, L^1(\Gamma_1)). \tag{2.85}$$

De maneira similar

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} + h(., \theta) = 0 \text{ em } L^1_{loc}(0, \infty, L^1(\Gamma_1)), \tag{2.86}$$

ou seja, o par $\{u, \theta\}$ satisfaz a condição (2.24).

2.2.6 Condições iniciais

Esta seção tem como objetivo a verificação das condições iniciais, isto é, vamos mostrar que $u(0) = u^0$, $\theta(0) = \theta^0$ e $u'(0) = u^1$. Fixado $T > 0$, pelas convergências $(2.72)_1$

e $(2.72)_2$ temos que $u \in L^\infty(0,T,V)$ e $u' \in L^\infty(0,T,V)$, portanto pelo teorema 1.7, $u \in C^0([0,T];V)$. Logo faz sentido calcular $u(0)$. Analogamente, das convergências $(2.72)_3$, $(2.72)_5$, $(2.72)_7$ e $(2.72)_9$, segue que faz sentido calcular $u'(0)$ e $\theta(0)$.

De $u_l \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T,V)$, obtemos que $\forall \varphi \in C^1([0,T])$ com $\varphi(0)=1$ e $\varphi(T)=0$:

$$\int_0^T \langle u_l(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi'(t)dt \to \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi'(t)dt, \ \forall v \in V. \tag{2.87}$$

Analogamente, de $u_l' \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T,V)$

$$\int_0^T \langle u_l'(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi(t)dt \to \int_0^T \langle u'(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi(t)dt, \ \forall v \in V. \tag{2.88}$$

Assim, das convergências (2.87) e (2.88), obtemos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[\langle u_l(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi(t)\right] dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\langle u(t), v\rangle_{V\times V'} \varphi(t)\right] dt, \ \forall v \in V.$$

Portanto:

$$\langle u_l(T), v\rangle_{V\times V'} \varphi(T) - \langle u_l(0), v\rangle_{V\times V'} \varphi(0) \to \langle u(T), v\rangle_{V\times V'} \varphi(T) - \langle u(0), v\rangle_{V\times V'} \varphi(0)$$

implicando que:

$$\langle u_l(0), v\rangle_{V\times V'} \to \langle u(0), v\rangle_{V\times V'} \ \forall v \in V.$$

De $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, concluímos que

$$(u_l(0), v) \to (u(0), v) \ \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.89}$$

Como $u_l(0) = u^0, \ \forall l \in \mathbb{N}$,então

$$(u_l(0), v) \to \left(u^0, v\right) \ \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.90}$$

Pelas convergências (2.89) e (2.90) e da unicidade do limite fraco, segue que $u(0) = u^0$. Da mesma forma, obtemos que $\theta(0) = \theta^0$.

Para mostrar que $u'(0) = u^1$ procedemos também de maneira análoga, com uma pequena diferença de que as condições iniciais não estão fixadas como nos exemplos anteriores. Fixado $T > 0$, da convergência $u_l' \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T,V)$ obtemos

$$(u_l'(0), v) \to (u'(0), v) \ \forall v \in L^2(\Omega).$$

Notemos que $u_l'(0) = u_l^1$, então de $u_l^1 \to u^1$ em $H_0^1(\Omega)$ e do fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue que $u_l'(0) \to u^1$ em $L^2(\Omega)$, donde $u_l'(0) \rightharpoonup u^1$ em $L^2(\Omega)$, ou seja

$$(u_l'(0), v) \to \left(u^1, v\right) \ \forall v \in L^2(\Omega).$$

Mais uma vez, a unicidade do limite fraco garante que $u'(0) = u^1$.

2.3 Apresentação e prova do teorema 2.2

No que segue, mostraremos que existe solução para o sistema (2.1) quando considera-se os dados iniciais um pouco menos gerais do que no teorema 2.1. Em compensação vamos supor a função h dependente de uma única variável e satisfazendo hipóteses análogas as anteriores. Mais precisamente, considere as funções $\alpha, \beta : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \geq \alpha_0 > 0, \quad \forall x \in \Gamma_1, \ (\alpha_0 \text{ constante }) \\ \beta \in W^{1,\infty}(\Gamma_1) \geq \beta_0 > 0, \quad \forall x \in \Gamma_1, \ (\beta_0 \text{ constante }), \end{array} \right. \tag{2.91}$$

$$\left| \begin{array}{l} h \in C^0(\mathbb{R}) \text{ tal que } h(0) = 0 \\ (h(s) - h(r))(s - r) \geq d_0(s - r)^2 \quad \forall\ s, r \in \ \mathbb{R} \ \ e \ \ d_0 > 0 \text{ (constante)}, \end{array} \right. \tag{2.92}$$

$$2\alpha_0\beta_0 d_0^2 \geq n^2. \tag{2.93}$$

Antes da demonstração do próximo teorema iremos introduzir alguns resultados:

Proposição 2.2. *Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Então a solução u do problema:*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad em \quad \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad em \quad \Gamma_1 \end{array} \right.$$

pertence a $V \cap H^2(\Omega)$ e

$$||u||^2_{H^2(\Omega)} \leq C\left[|f|^2 + ||g||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\right],$$

onde a constante $C > 0$ independe de f, g e u.

Demonstração: Veja Medeiros [14]. ∎

Proposição 2.3. *Em $V \cap H^2(\Omega)$, as normas de $H^2(\Omega)$ e a norma*

$$u \mapsto \left[|\Delta u| + \left|\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|\right|\right]^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

Demonstração: Veja Medeiros [14]. ∎

Proposição 2.4. *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função lipschitziana com $h(0) = 0$. Então $h(u) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ para $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e a aplicação*

$$\begin{aligned} h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ u &\mapsto h(u) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Veja Marcus [8]. ∎

Proposição 2.5. *Considere h como na proposição 2.4 e α satisfazendo a hipótese $(2.91)_1$. Então $\alpha h(u) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ para $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e*

$$||\alpha h(u)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C||h(u)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \ \forall\ u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1),$$

onde a constante $C > 0$ independe de α, h e u.

Demonstração: Notemos que por hipótese $\alpha \in W^{1,\infty}(\Gamma_1)$, logo estão bem definidas as aplicações lineares contínuas

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Gamma_1) & \text{e} & H^1(\Gamma_1) \to H^1(\Gamma_1) \\ u \mapsto \alpha u & & u \mapsto \alpha u \end{array}$$

Das imersões contínuas $H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, por interpolação dos espaços segue que é contínua a aplicação:

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ u &\mapsto \alpha u \end{aligned}$$

Da proposição 2.4 temos que se $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ então $h(u) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, logo $\forall\ u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, é contínua a aplicação:

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ h(u) &\mapsto \alpha h(u) \end{aligned}$$

donde:

$$||\alpha h(u)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C||h(u)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}, \ \forall\ u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

∎

Proposição 2.6. *Considere h como na proposição 2.4 e α satisfazendo a hipótese* $(2.91)_1$*. Suponha que $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $u^1 \in V$, satisfazendo*

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha(x)h(u^1) = 0 \quad em \quad \Gamma_1.$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe w e $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$||w - u^0||_{V\cap H^2(\Omega)} < \varepsilon, \quad ||z - u^1|| < \varepsilon$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha(x)h(z) = 0 \quad em \quad \Gamma_1.$$

Demonstração: Tome $\varepsilon > 0$. Desde que $V \cap H^2(\Omega)$ é denso em V, então dado $\delta > 0$ com $0 < \delta < \varepsilon$, existe $z \in V \cap H^2(\Omega)$ tal que $\|z - u^1\| < \delta$. Da proposição 2.4 e de $V \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, obtemos:

$$\|h(z) - h(u^1)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq C\|z - u^1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \|z - u^1\| < \varepsilon.$$

Notemos que de $u^0 \in V \cap H^2(\Omega)$ temos que $\Delta u^0 \in L^2(\Omega)$ e de $z \in V \cap H^2(\Omega)$ temos que $\alpha h(z) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Seja w a solução de

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w = -\Delta u^0 \quad \text{em} \quad \Omega; \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0; \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = -\alpha h(z) \quad \text{em} \quad \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Pela proposição 2.2 temos que $w \in V \cap H^2(\Omega)$ e a proposição 2.3 implica em:

$$\|w - u^0\|^2_{V\cap H^2(\Omega)} = |\Delta w - \Delta u^0|^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u^0}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\alpha h(z) - \alpha h(u^1)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} < c\varepsilon^2.$$

Assim, nós encontramos w, z satisfazendo as condições da proposição. ■

Apresentaremos agora, o resultado que propomos no início dessa seção.

Teorema 2.2. *Assumamos as hipóteses* (2.4), (2.91)-(2.93)*. Considere*

$$u^0 \in V \cap H^2(\Omega), \; u^1 \in V \; e \; \theta^0 \in H^1_0(\Omega) \cap D(-\Delta), \tag{2.94}$$

verificando:

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha h(u^1) = 0 \;\; e \;\; \frac{\partial \theta^0}{\partial \nu} + \beta h(\theta^0) = 0 \;\; em \;\; \Gamma_1. \tag{2.95}$$

Então existe um par de funções $\{u, \theta\}$ *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V); \\ u' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}(0,\infty;V); \\ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)); \\ \theta \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\infty;V); \\ \theta' \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0,\infty;V), \end{array} \right. \tag{2.96}$$

satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + |u|^\sigma u = 0 \ em \ L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ \theta' - \Delta \theta + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u'}{\partial x_i} = 0 \ em \ L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)), \end{array} \right. \tag{2.97}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha h(u') = 0 \ em \ L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)) \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \nu} + \beta h(\theta) = 0 \ em \ L^1_{loc}(0,\infty;L^1(\Gamma_1)) \end{array} \right. \tag{2.98}$$

$$u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1, \qquad \theta(0) = \theta^0. \tag{2.99}$$

Demonstração: A proposição 2.1 nos garante uma sequência (h_l) de funções $C^0(\mathbb{R})$ que satisfazem as hipóteses (i)-(iv) da mesma. Pela hipótese (2.94), temos $\theta^0 \in V \cap H^2(\Omega)$. Assim como na apresentação do problema principal, como $\theta^0 \in H^1_0(\Omega) \cap D(-\Delta)$ e h_l satisfaz propriedades análogas as da hipótese (2.92), temos que:

$$\frac{\partial \theta^0}{\partial \nu} + \beta h_l(\theta^0) = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma_1. \tag{2.100}$$

A proposição 2.6 nos garante a existência de duas sequências (u^0_l) e (u^1_l) de vetores de $V \cap H^2(\Omega)$ tais que:

$$u^0_l \to u^0, \quad \text{em } V \cap H^2(\Omega) \quad \text{e} \quad u^1_l \to u^1, \quad \text{em} \quad V. \tag{2.101}$$

Além disso:

$$\frac{\partial u^0_l}{\partial \nu} + \alpha h_l(u^1_l) = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma_1. \tag{2.102}$$

Fixe $l \in \mathbb{N}$. Considere uma base especial $\gamma = \{w^l_1, w^l_2, w^l_3, ...\}$ de $V \cap H^2(\Omega)$ que pode ser tomada ortonormal usando o processo de Gram-Schmidt. Tomemos a base γ de forma que u^0_l, u^1_l, θ^0 pertençam ao subespaço gerado por w^l_1, w^l_2, w^l_3, que será denotado por $[w^l_1, w^l_2, w^l_3]$. Seja $V^l_m = [w^l_1, w^l_2, ..., w^l_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base γ. Considere as soluções

$$u_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jlm}(t) w_j^l \quad e \quad \theta_{lm}(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jlm}(t) w_j^l$$

do problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} (u''_{lm}(t), v) + ((u_{lm}(t), v)) + \displaystyle\int_{\Gamma_1} \alpha h_l(u'_{lm}(t)) v d\Gamma + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta_{lm}}{\partial x_i}(t), v \right) + \\ +(|u_{lm}(t)|^\sigma u_{lm}(t), v) = 0, \ \forall \ v \in V_m^l; \\ (\theta'_{lm}(t), w) + ((\theta_{lm}(t), w)) + \displaystyle\int_{\Gamma_1} \beta h_l(\theta_{lm}(t)) w d\Gamma + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u'_l m}{\partial x_i}(t), w \right) = 0 \ \forall \ w \in V_m^l; \\ u_{lm}(0) = u_l^0, \quad u'_{lm}(0) = u_l^1, \quad \theta_{lm}(0) = \theta^0. \end{array} \right. \tag{2.103}$$

Procedendo como na demonstração do teorema 2.1, obtemos, via Teorema de Carathéodory, uma solução local em $[0, t_{lm})$ do problema aproximado. Da mesma forma como em (2.31), fazendo $v = u'_{lm}(t)$ na equação $(2.103)_1$, $w = \theta_{lm}(t)$ na equação $(2.103)_2$, usando a hipótese (ii) sobre h_l e a hipótese (2.91) obtemos a inequação:

$$\frac{d}{dt} E_{1lm}(t) + ||\theta_{lm}(t)||^2 + \frac{\alpha_0 d_0}{2} \int_{\Gamma_1} |u'_{lm}(t)|^2 d\Gamma + d_1^* \int_{\Gamma_1} |\theta_{lm}(t)|^2 d\Gamma \leq 0,$$

onde $d_1^* = \beta_0 d_0 - \dfrac{n^2}{2\alpha_0 d_0}$ e $E_{1lm}(t)$ é como introduzido em (2.39). É fácil ver que, pela hipótese (2.93), temos $d_1^* \geq 0$. Integrando de 0 à t com $t < t_{lm}$ a desigualdade acima, usando as convergências em (2.101) e a imersão (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} E_{1lm}(t) &+ \int_0^t ||\theta_{lm}(s)||^2 ds + \frac{\alpha_0 d_0}{2} \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds + d_1^* \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\theta_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|u_l^1|^2 + ||u_l^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2}{\sigma+2} ||u^0||_{L^{\sigma+2}(\Omega)}^{\sigma+2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[|u^1|^2 + ||u^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2c_1}{\sigma+2} ||u^0||^{\sigma+2} \right] + \eta, \qquad \forall l \geq l_0 \text{ e } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima podemos obter limitações que permitam prolongar a solução ao intervalo $[0, \infty)$ e obter as estimativas postas em (2.45).

De maneira análoga ao que foi feito com a II estimativa, diferenciando as equações $(2.103)_1$ e $(2.103)_2$ com relação a t, tomando-se nas equações resultantes $v = u''_{lm}(t)$ e $w = \theta'_{lm}(t)$, respectivamente, e usando a imersão (2.6), obtemos, após integração de 0 à t que

$$\begin{aligned} E_{2lm} &+ \int_0^t ||\theta'_{lm}(s)||^2 ds + \frac{\alpha_0 d_0}{2} \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u''_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds + d_1^* \int_0^t \int_{\Gamma_1} |\theta'_{lm}(s)|^2 d\Gamma ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\ |u''_{lm}(0)|^2 + ||u_l^1||^2 + |\theta'_{lm}(0)|^2 \right] + \int_0^t C[\ ||u'_{lm}(s)||^2 + |u''_{lm}(s)|^2] ds, \end{aligned} \tag{2.104}$$

onde $E_{2lm}(t)$ é como introduzido em (2.49).

Tomando $v = u''_{lm}(0)$ na equação $(2.103)_1$, $w = \theta'_{lm}(0)$ na equação $(2.103)_2$ e usando as equações (2.100) e (2.102), obtemos:

$$\left| \begin{array}{ll} |u''_{lm}(0)|^2 \leq C, & \forall\ l, m; \\ |\theta'_{lm}(0)|^2 \leq C, & \forall\ l, m. \end{array} \right.$$

Estas limitações levadas a inequação (2.104) nos permite aplicar a desigualdade de Gronwall e em seguida obter as estimativas postas em (2.60).

Com esses resultados, procedendo como na prova do teorema 2.1, obtemos um par de soluções $\{u, \theta\}$ satisfazendo (2.96)-(2.99).

■

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

Neste capítulo, apresentaremos o decaimento exponencial da energia associada a solução do teorema 2.2, onde esta energia será dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[|u'(t)|^2 + ||u(t)||^2 + |\theta(t)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u(t)|^{\sigma+2}dx\right], \text{ com } t \geq 0.$$

Para obtermos este decaimento, precisaremos a princípio estabelecer algumas notações e hipóteses.

Assuma que existe $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) \leq 0\} \text{ e } \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\}, \tag{3.1}$$

onde $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que $m(x) = x - x^0$ e $\xi \cdot \eta$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por:

$$R(x^0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} ||m(x)||_{\mathbb{R}^n}, \quad \tau_0 = \max_{x\in\Gamma_1}[m(x)\cdot\nu(x)] > 0.$$

Considere a função h e o número real $\sigma > 0$, satisfazendo:

$$|h(s)| \leq k^*|s|, \ \forall s \in \mathbb{R}, \ (k^* > 0 \text{ constante}), \tag{3.2}$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{n-1} < \sigma < \dfrac{2}{n-2}, \text{ se } n \geq 3 \\ \sigma > 2, \text{ se } n = 1, 2. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Como $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, introduzimos as seguintes notações:

$$|u| \leq k_1||u||^2, \ \forall v \in V \quad \text{e} \quad ||u||_{L^2(\Gamma_1)} \leq k_2||u||^2, \ \forall\, u \in V. \tag{3.4}$$

Introduziremos também:

$$
\left|\begin{array}{l}
d_1^* = \beta_0 d_0 - \dfrac{n^2}{2\alpha_0 d_0}; \\
C^* = 4R(x^0) + (n-1)(1+2k_1); \\
k = \dfrac{1}{\tau_0}(k^*)^2 ||\alpha||^2_{L^\infty(\Gamma_1)} (R(x^0))^2; \\
L = (n-1)^2 k_2 (k^*)^2 \|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_1)}; \\
M = \sigma(n-1) - 2; \\
N = 4n(R(x^0))^2 + n(n-1)^2 k_1; \\
P = K + L + R(x^0).
\end{array}\right. \tag{3.5}
$$

Note que a Hipótese (2.93) nos garante que $d_1^* \geq 0$ e a hipótese (3.2) nos garante $M > 0$.

3.1 Decaimento exponencial da energia

Nesta seção, apresentaremos o Teorema que garante o decaimento exponencial da energia e daremos a sua demonstração.

Teorema 3.1. *Sejam* $\{u, \theta\}$ *soluções dadas pelo Teorema 2.2 e considere as hipóteses* (3.1)-(3.3)*. Então se* $\varepsilon_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2N}, \dfrac{\alpha_0 d_0}{2P}, \dfrac{1}{k_1}\right\}$*, obtemos:*

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

onde:

$$\eta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\};\ \textit{com}\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2C^*}\ \textit{e}\ \varepsilon_3 = \min\left\{\frac{\varepsilon_2}{2}, \varepsilon_2 M\right\}.$$

Demonstração:

Como $\{u, \theta\}$ são soluções dadas no Teorema 2.2, se multiplicarmos a equação $(2.97)_1$ por $u'(t)$ e a equação $(2.97)_2$ por $\theta(t)$, e após, integrarmos sobre Ω, obteremos, após fazermos manipulações análogas aos da prova deste mesmo Teorema:

$$\frac{d}{dt}E(t) + ||\theta(t)||^2 + \frac{\alpha_0 d_0}{2}\int_{\Gamma_1} |u'(t)|^2 d\Gamma + d_1^* \int_{\Gamma_1} |\theta(t)|^2 d\Gamma \leq 0.$$

Da inequação acima temos que $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq 0$, e portanto a energia $E(t)$ é uma função não crescente.

Assumindo a hipótese (3.2), temos que as aproximações (h_l) de h dadas pela Proposição 2.1 satisfazem:

$$|h_l(s)| \leq \frac{3}{2}k^*|s|, \ \forall \ s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \ l \in \mathbb{N}.$$

A menos por uma mudança na notação da constante, para simplificar a notação, escreveremos:

$$|h_l(s)| \leq k^*|s|, \ \forall \ s \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \ l \in \mathbb{N}.$$

Consideremos as funções $\{u_l, \theta_l\}$ dadas como na prova do teorema 2.2, juntamente com h_l, u_l^0, u_l^1 e θ^0. Nós temos $u_l' \in L^\infty_{loc}(0, \infty, V)$ e pela proposição 1.8 temos que:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h_l(u_l'(x,t)) = h_l'(u_l'(x,t)) \frac{\partial u_l'}{\partial x_i}(x,t).$$

Assim $h_l(u_l') \in L^\infty_{loc}(0, \infty, V)$. Mais ainda, temos:

$$\alpha h_l(u_l') \in L^\infty_{loc}(0, \infty, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Então da equação (2.70), obtemos:

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} \in L^\infty_{loc}(0, \infty, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Portanto:

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} + \alpha h_l(u_l') = 0 \in L^\infty_{loc}(0, \infty, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Por um caminho similar:

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial \nu} + \alpha h_l(u_l') = 0 \in L^2_{loc}(0, \infty, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

As regularidades $u_l \in L^\infty_{loc}(0, \infty, V)$ e $\Delta u_l \in L^\infty_{loc}(0, \infty, L^2(\Omega))$ implicam em

$$u_l \in L^\infty_{loc}(0, \infty, V \cap H^2(\Omega)).$$

Analogamente:

$$\theta_l \in L^2_{loc}(0, \infty, V \cap H^2(\Omega)).$$

Com isso temos que $\{u_l, \theta_l\}$ satisfazendo a classe (2.96), as equações

$$\left| \begin{array}{l} u_l'' - \Delta u_l + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \theta_l}{\partial x_i} + |u_l|^\sigma u_l = 0 \ em \ L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)) \\ \theta_l' - \Delta \theta_l + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_l'}{\partial x_i} = 0 \ em \ L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)), \end{array} \right. \tag{3.6}$$

e verificando as condições iniciais

$$u_l(0) = u_l^0, \qquad u_l'(0) = u_l^1 \qquad \theta_l(0) = \theta^0.$$

Nós provaremos o Teorema 3.1 para as funções $\{u_l, \theta_l\}$, pois assim, o Teorema 3.1 seguirá quando tomarmos o limite inferior em l. Introduzimos a energia

$$E_l(t) = \frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + ||u_l(t)||^2 + |\theta_l(t)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+2}dx\right], \text{ com } t \geq 0$$

e o funcional:

$$\rho(t) = 2(u_l'(t), m\cdot\nabla u_l(t)) + (n-1)(u_l'(t), u_l(t)), \text{ com } t \geq 0. \tag{3.7}$$

Considere a energia perturbada:

$$E_{\varepsilon l} = E_l + \varepsilon\rho(t), \quad (\varepsilon > 0). \tag{3.8}$$

Mostremos que $|\rho(t)| \leq C^* E_l(t)$, $\forall t \geq 0$, onde C^* é como introduzido em $(3.5)_2$. Com efeito:

$$\begin{aligned}
|\rho(t)| &\leq 2\int_\Omega |u_l'(t)||m(x)\cdot\nabla u_l(t)|dx + (n-1)\int_\Omega |u_l'(t)||u_l(t)| \\
&\leq 2R(x^0)|u_l'(t)|||u_l(t)|| + (n-1)|u_l'(t)||u_l(t)| \\
&\leq 2R(x^0)\frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + ||u_l(t)||^2\right] + (n-1)\frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + |u_l(t)|^2\right] \\
&\leq 4R(x^0)\frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + ||u_l(t)||^2\right] + (n-1)\frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + k_1||u_l(t)||^2\right] \\
&\leq \left[4R(x^0) + (n-1)(1+2k_1)\right]\frac{1}{2}\left[|u_l'(t)|^2 + ||u_l(t)||^2\right] \leq C^* E_l(t).
\end{aligned}$$

Assim $|E_{\varepsilon l} - E_l(t)| = |\varepsilon\rho(t)| \leq \varepsilon C^* E_l(t).$, donde

$$(1-\varepsilon C^*)E_l(t) \leq E_{\varepsilon l}(t) \leq (1+\varepsilon C^*)E_l(t)$$

Fazendo $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2C^*} = \varepsilon_1$ na desigualdade acima, obtemos:

$$\frac{1}{2}E_l(t) \leq E_{\varepsilon l}(t) \leq \frac{3}{2}E_l(t), \ \forall\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \text{ e } \forall\ t \geq 0 \tag{3.9}$$

Multiplicando a equação $(3.6)_1$ por $u_l'(t)$, a equação $(3.6)_2$ por $\theta_l'(t)$ e integrando em Ω, obtemos:

$$E_l'(t) + ||\theta_l(t)||^2 + \frac{\alpha_0 d_0}{2}\int_{\Gamma_1} |u_l'(t)|^2 d\Gamma + d_1^*\int_{\Gamma_1} |\theta_l(t)|^2 d\Gamma \leq 0.$$

Por (3.4), temos que $\dfrac{1}{2k_1}|\theta_l(t)|^2 \leq \dfrac{1}{2}||\theta_l(t)||^2$, portanto a inequação acima assume a forma:

$$E_l'(t) + \frac{1}{2k_1}|\theta_l(t)|^2 + \frac{1}{2}||\theta_l(t)||^2 + \frac{\alpha_0 d_0}{2}\int_{\Gamma_1}|u_l'(t)|^2 d\Gamma + d_1^*\int_{\Gamma_1}|\theta_l(t)|^2 d\Gamma \leq 0. \tag{3.10}$$

Pela equação $(3.6)_1$, segue que:

$$u_l'' = \Delta u_l - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i} - |u_l|^\sigma u_l \ em \ L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{3.11}$$

Derivando com relação a t a expressão (3.7), vem:

$$\begin{aligned}\rho'(t) =& 2(u_l''(t), m\cdot\nabla u_l(t)) + 2(u_l'(t), m\cdot\nabla u_l'(t)) + (n-1)(u_l''(t), u_l(t)) && (3.12)\\ &+ (n-1)(u_l'(t), u_l'(t)). && (3.13)\end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned}\rho'(t) =& 2(\Delta u_l(t), m\cdot\nabla u_l(t)) - 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}(t), m\cdot\nabla u_l(t)\right) - 2(|u_l(t)|^\sigma u_l(t), m\cdot\nabla u_l(t))\\ &+ 2(u_l'(t), m\cdot\nabla u_l'(t)) + (n-1)(\Delta u_l(t), u_l(t)) - (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l(t)}{\partial x_i}, u_l(t)\right)\\ &- (n-1)(|u_l(t)|^\sigma u_l(t), u_l(t)) + (n-1)(u_l'(t), u_l'(t)).\end{aligned}$$

Façamos separadamente a análise de cada um dos termos da equação acima. Iremos omitir a variável t, a fim de não sobrecarregar a notação.

Análise de $2(\Delta u_l, m\cdot\nabla u_l)$.

$$2(\Delta u_l, m\cdot\nabla u_l) = 2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)dx = 2\sum_{i,k=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}dx.$$

Analisando apenas na integral acima, pelo Teorema de Gauss, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}dx &= -\int_\Omega\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Gamma\frac{\partial u_l}{\partial x_i}m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\nu_i d\Gamma\\ &= -\int_\Omega\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial m_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}dx - \int_\Omega\frac{\partial u_l}{\partial x_i}m_k\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_k}dx +\\ &+\int_\Gamma\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i\right)\left(m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} m_k \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} dx &= -\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} m_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) dx \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(m_k \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right) dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_l}{\partial x_i} m_k \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \nu_k d\Gamma \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx - \int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} m_k \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} dx \\
&+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma.
\end{aligned}$$

Logo:

$$-\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} m_k \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma. \tag{3.15}$$

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14), obteremos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2} m_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx = &-\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial m_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\partial m_k}{\partial x_k} dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i\right)\left(m_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
2(\Delta u_l, m \cdot \nabla u_l) = &-2||u_l||^2 + n||u_l||^2 - \sum_{i,k=1}^n \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma \\
&+ 2\sum_{i,k=1}^n \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i\right)\left(m_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) d\Gamma = (n-2)||u_l||^2 + J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

A seguir faremos uma análise dos termos J_1 e J_2. Notemos que, como feito em L.A. medeiros e Milla Miranda [13], $\dfrac{\partial u_l}{\partial x_i} = \nu_i \dfrac{\partial u_l}{\partial \nu}$ em Γ_0, daí:

$$\begin{aligned}
-\sum_{i,k=1}^n \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma &= -\sum_{i,k=1}^n \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma - \sum_{i,k=1}^n \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma \\
&= -\sum_{i,k=1}^n \int_{\Gamma_0} \nu_i^2 \left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma - \sum_{i,k=1}^n \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 m_k \nu_k d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2 (m \cdot \nu) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} ||\nabla u_l||^2_{\mathbb{R}^n} (m \cdot \nu) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$J_1 = -\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2 (m \cdot \nu) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} ||\nabla u_l||^2_{\mathbb{R}^n} (m \cdot \nu) d\Gamma. \tag{3.16}$$

Temos também:

$$2\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i\right)\left(m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)d\Gamma = 2\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\nu_i^2\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}m_k\nu_k\right)d\Gamma +$$
$$+\,2\sum_{i,k=1}^{n}\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i\right)\left(m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)d\Gamma$$
$$= 2\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2(m\cdot\nu)\,d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\,(m\cdot\nabla u_l)\,d\Gamma.$$

A solução u_l satisfaz a equação $(2.98)_1$, logo $\dfrac{\partial u_l}{\partial \nu} = -\alpha h(u_l')$ em $L^1_{loc}(0,\infty,L^1(\Gamma_1))$. Usando a hipótese (3.2) e o fato de $m(x)\cdot\nu(x)\geq \tau_0>0$ em Γ_1, obtemos:

$$2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\,(m\cdot\nabla u_l)\,d\Gamma = -2\int_{\Gamma_1}\alpha h(u_l')\,(m\cdot\nabla u_l)\,d\Gamma \leq 2\int_{\Gamma_1}|\alpha||h(u_l')||\,(m\cdot\nabla u_l)\,|d\Gamma$$
$$\leq 2\int_{\Gamma_1}||\alpha||_{L^\infty(\Gamma_1)}(k^*)|u_l'|R(x^0)|||\nabla u_l||_{\mathbb{R}^n}\frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\tau_0}}d\Gamma$$
$$\leq 2\left(\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\tau_0}||\alpha||^2_{L^\infty(\Gamma_1)}(k^*)^2(R(x^0))^2|u_l'|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma_1}\tau_0||\nabla u_l||_{\mathbb{R}^n}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{\tau_0}||\alpha||^2_{L^\infty(\Gamma_1)}(k^*)^2(R(x^0))^2\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma + \int_{\Gamma_1}||\nabla u_l||_{\mathbb{R}^n}(m\cdot\nu)d\Gamma$$
$$= k\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1}||\nabla u_l||_{\mathbb{R}^n}(m\cdot\nu)d\Gamma.$$

Portanto

$$J_2 \leq 2\int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2(m\cdot\nu)\,d\Gamma + k\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma + \int_{\Gamma_1}||\nabla u_l||_{\mathbb{R}^n}(m\cdot\nu)d\Gamma. \tag{3.17}$$

Usando a equação (3.16), a inequação (3.17), e o fato de $m(x)\cdot\nu(x)\leq 0$, obtemos a estimativa:

$$J_1 + J_2 \leq \int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\right)^2(m\cdot\nu)\,d\Gamma + k\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma.$$

Consequentemente:

$$2(\Delta u_l, m\cdot\nabla u_l) \leq (n-2)||u_l||^2 + k\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma. \tag{3.18}$$

Análise de $-2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}, m\cdot\nabla u_l\right)$.

$$\begin{aligned}
\left|-2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}, m\cdot\nabla u_l\right)\right| &\leq 2\sum_{i,k=1}^{n}\int_\Omega |m_k|\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right|dx\\
&\leq 2\sum_{i,k=1}^{n}\int_\Omega \left(2\sqrt{n}|m_k|\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right|\right)dx\\
&\leq \sum_{i,k=1}^{n}2\left(\int_\Omega 4n|m_k|^2\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \frac{1}{4n}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \sum_{i,k=1}^{n}\left[4n|m_k|^2\int_\Omega\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|^2dx+\frac{1}{4n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right|^2dx\right]\\
&\leq 4n(R(x^0))^2||\theta_l||^2+\frac{1}{4}||u_l||^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}, m\cdot\nabla u_l\right)\leq 4n(R(x^0))^2||\theta_l||^2+\frac{1}{4}||u_l||^2. \tag{3.19}$$

Análise de $-2(|u_l|^\sigma u_l, m\cdot\nabla u_l)$.

$$\begin{aligned}
-2(|u_l|^\sigma u_l, m\cdot\nabla u_l) &= -2\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |u_l|^\sigma u_l m_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k}dx = -\frac{2}{\sigma+2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega m_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(|u_l|^{\sigma+2}\right)dx\\
&= \frac{2}{\sigma+2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial m_k}{\partial x_k}|u_l|^{\sigma+2}dx-\frac{2}{\sigma+2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Gamma |u_l|^{\sigma+2}m_k\nu_k d\Gamma\\
&= \frac{2}{\sigma+2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial m_k}{\partial x_k}|u_l|^{\sigma+2}dx-\frac{2}{\sigma+2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u_l|^{\sigma+2}d\Gamma.
\end{aligned}$$

Notemos que $\frac{\partial m_k}{\partial x_k}=1$ e pela hipótese (3.1), temos que $m\cdot\nu>0$ em Γ_1. Portanto:

$$-2(|u_l|^\sigma u_l, m\cdot\nabla u_l)\leq\frac{2n}{\sigma+2}\int_\Omega |u_l|^{\sigma+2}dx. \tag{3.20}$$

Análise de $(u_l', m\cdot\nabla u_l')$.

$$\begin{aligned}
(u_l', m\cdot\nabla u_l') &= \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega 2u_l' m_k\frac{\partial u_l'}{\partial x_k}dx = \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega m_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(u_l')^2\right]dx\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial m_k}{\partial x_k}(u_l')^2dx+\sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma m_k\nu_k(u_l')^2dx\\
&= -n|u_l'|^2+\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u_l'|^2d\Gamma.
\end{aligned}$$

Consequentemente:

$$(u_l', m\cdot\nabla u_l') \leq -n|u_l'|^2 + R(x^0)\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2 d\Gamma. \tag{3.21}$$

Análise de $(n-1)(\Delta u_l, u_l)$.

$$\begin{aligned}(n-1)(\Delta u_l, u_l) &= (n-1)\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}\right)u_l dx = (n-1)\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}u_l dx\\ &= -(n-1)\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}dx + (n-1)\sum_{i=1}^n\int_\Gamma \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\nu_i u_l d\Gamma\\ &= -(n-1)\|u_l\|^2 + (n-1)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_l}{\partial \nu}u_l d\Gamma.\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}(n-1)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_l}{\partial\nu}u_l d\Gamma &= -(n-1)\int_{\Gamma_1}\alpha h(u_l')u_l d\Gamma \leq \left|-(n-1)\int_{\Gamma_1}\alpha h(u_l')u_l d\Gamma\right|\\ &\leq (n-1)\int_{\Gamma_1}|\alpha||h(u_l')||u_l|d\Gamma\\ &\leq (n-1)\int_{\Gamma_1}\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_1)}k^*\sqrt{2(n-1)k_2}|u_l'|\frac{1}{\sqrt{2(n-1)k_2}}|u_l|d\Gamma\\ &\leq (n-1)\left(\int_{\Gamma_1}\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_1)}(k^*)^2 2(n-1)k_2|u_l'|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\\ &\left(\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2(n-1)k_2}|u_l|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{(n-1)}{2}\left[\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_1)}(k^*)^2 2(n-1)k_2\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2 d\Gamma\right]\\ &+\frac{(n-1)}{2}\left[\frac{1}{2(n-1)k_2}\int_{\Gamma_1}|u_l|^2 d\Gamma\right]\\ &= (n-1)^2k_2(k^*)^2\|\alpha\|^2_{L^\infty(\Gamma_1)}\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2 d\Gamma + \frac{1}{4k_2}\|u_l\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\ &\leq L\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2 d\Gamma + \frac{1}{4}\|u_l\|^2.\end{aligned}$$

Portanto:

$$(n-1)(\Delta u_l, u_l) \leq -(n-1)\|u_l\|^2 + L\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2 d\Gamma + \frac{1}{4}\|u_l\|^2. \tag{3.22}$$

Análise de $-(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i},u_l\right)$.

$$\begin{aligned}
\left|-(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i},u_l\right)\right| &\le (n-1)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right||u_l|dx\\
&= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(2k_1n(n-1))^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|\frac{1}{(2k_1n(n-1))^{\frac{1}{2}}}|u_l|dx\\
&\le (n-1)\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\int_\Omega 2k_1n(n-1)\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\frac{1}{2k_1n(n-1)}|u_l|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\le \frac{(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(2k_1n(n-1))\int_\Omega\left|\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i}\right|^2dx+\frac{1}{2k_1n(n-1)}\int_\Omega|u_l|^2dx\right]\\
&\le k_1n(n-1)^2||\theta_l||^2+\frac{1}{4k_1}|u_l|^2.
\end{aligned}$$

De (3.4) temos que $\frac{1}{4k_1}|u_l|^2\le\frac{1}{4}||u_l||^2$, assim:

$$-(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta_l}{\partial x_i},u_l\right)\le n(n-1)^2k_1||\theta_l||^2+\frac{1}{4}||u_l||^2. \tag{3.23}$$

Análise de $-(n-1)(|u_l|^\sigma u_l,u_l)$.

$$-(n-1)(|u_l|^\sigma u_l,u_l)=-(n-1)\int_\Omega|u_l|^{\sigma+2}. \tag{3.24}$$

Análise de $(n-1)(u_l',u_l')$.

$$(n-1)(u_l',u_l')=(n-1)|u_l'|^2. \tag{3.25}$$

Adicionando as equações (e inequações) (3.18)-(3.25), simplificando os termos semelhantes e levando em consideração as notações estabelecidas nas três últimas equações de (3.5), segue que:

$$\rho'\le-\frac{1}{4}||u_l||^2-|u_l'|^2-\frac{M}{\sigma+2}\int_\Omega|u_l|^{\sigma+2}dx+N||\theta_l||^2+P\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma. \tag{3.26}$$

Da equação (3.8) obtemos:

$$E_{\varepsilon l}'\le E_l'+\varepsilon\rho'. \tag{3.27}$$

Usando as desigualdades (3.10), (3.26) na equação (3.27), vem que:

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon l}'\le&-\frac{1}{2k_1}|\theta_l|^2-\frac{1}{2}||\theta_l||^2-\frac{\alpha_0d_0}{2}\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma-d_1^*\int_{\Gamma_1}|\theta_l|^2d\Gamma-\frac{\varepsilon}{4}||u_l||^2\\
&-\varepsilon|u_l'|^2-\frac{\varepsilon M}{\sigma+2}\int_\Omega|u_l|^{\sigma+2}dx+\varepsilon N||\theta_l||^2+\varepsilon P\int_{\Gamma_1}|u_l'|^2d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Notemos que para acontecer $\varepsilon N||\theta_l||^2 - \dfrac{1}{2}||\theta_l||^2 < 0$ será preciso que $\varepsilon N < \dfrac{1}{2}$, isto é $\varepsilon < \dfrac{1}{2N}$. Da mesma forma para $\varepsilon P \displaystyle\int_{\Gamma_1} |u_l'|^2 d\Gamma - \dfrac{1}{2}\alpha_0 d_0 \int_{\Gamma_1} |u_l'|^2 d\Gamma < 0$, devemos ter $\varepsilon < \dfrac{\alpha_0 d_0}{2P}$. Se $\varepsilon < \dfrac{1}{k_1}$ então $-\dfrac{1}{2k_1} < -\dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim tomando $\varepsilon_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2N}, \dfrac{\alpha_0 d_0}{2P}, \dfrac{1}{k_1}\right\}$ na inequação (3.28), teremos:

$$E_{\varepsilon l}' \leq -\varepsilon_2 |u_l'|^2 - \frac{\varepsilon_2}{4}||u_l||^2 - \frac{\varepsilon_2}{2}|\theta_l|^2 - \frac{\varepsilon_2 M}{2}\frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_l|^{\sigma+2}dx.$$

Agora escolhendo $\varepsilon_3 = \min\left\{\dfrac{\varepsilon_2}{2}, \varepsilon_2 M\right\}$, teremos que $\varepsilon_3 \leq \dfrac{\varepsilon_2}{2}$, donde $\dfrac{\varepsilon_3}{2} \leq \dfrac{\varepsilon_2}{4} \leq \dfrac{\varepsilon_2}{2} \leq \varepsilon_2$, ou seja $-\varepsilon_2 \leq -\dfrac{\varepsilon_2}{2} \leq -\dfrac{\varepsilon_2}{4} \leq -\dfrac{\varepsilon_3}{2}$, assim:

$$E_{\varepsilon l}' \leq -\frac{\varepsilon_3}{2}|u_l'|^2 - \frac{\varepsilon_3}{2}||u_l||^2 - \frac{\varepsilon_3}{2}|\theta_l|^2 - \frac{\varepsilon_3}{2}\frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u_l|^{\sigma+2}dx = -\varepsilon_3 E_l.$$

Consequentemente:

$$E_{\varepsilon l}'(t) \leq -\varepsilon E_l(t), \ \forall\ t \geq 0 \text{ e } \forall\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3. \tag{3.29}$$

Fazendo $\eta = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$, pela inequação (3.9), temos que:

$$-\frac{3}{2}E_l(t) \leq -E_{\eta l}(t) \Rightarrow -\eta E_l(t) \leq -\frac{2}{3}E_{\eta l}(t)\ \forall\ t \geq 0.$$

Assim, a equação (3.29) assume a forma:

$$E_{\eta l}'(t) \leq -\eta E_l(t) \leq -\frac{2}{3}E_{\eta l}(t),\ \forall\ t \geq 0,$$

ou seja:

$$E_{\eta l}'(t) + \frac{2}{3}\eta E_{\eta l}(t) \leq 0,\ \forall\ t \geq 0.$$

Logo a solução da EDO $E_{\eta l}'(t) + \dfrac{2}{3}\eta E_{\eta l}(t) = 0$ satisfaz:

$$E_{\eta l}(t) \leq E_{\eta l}(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t},\ \forall\ t \geq 0.$$

Da inequação (3.9), obtemos:

$$\frac{E_l(t)}{2} \leq E_{\eta l}(t) \leq E_{\eta l}(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t} \leq \frac{3}{2}E_l(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t},$$

donde:

$$E_l(t) \leq 3E_l(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t},\ \forall t \geq 0 \tag{3.30}$$

Façamos agora uma análise da inequação (3.30), antes de tomar o limite inferior em l. Das convergências em (2.101) e da imersão $V \hookrightarrow L^{\sigma+2}(\Omega)$ temos que

$$\liminf_{l\to\infty} E_l(0) = \frac{1}{2}\left[|u^1|^2 + ||u^0||^2 + |\theta^0|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\int_\Omega |u^0|^{\sigma+2}dx\right] = E(0). \tag{3.31}$$

Ainda da imersão $V \hookrightarrow L^{\sigma+2}(\Omega)$ e pelo fato de $u_l \in L^{\infty}_{loc}(0,\infty,V)$, temos que $u_l(t) \in L^{\sigma+2}(\Omega)$. Consequentemente $|u_l(t)|^{\sigma+2} \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+2}dx < \infty$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Segue que $\displaystyle\sup_{l\in\mathbb{N}} \int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+2}dx < \infty$ e pelo lema de Fatou:

$$\int_\Omega |u(t)|^{\sigma+2}dx \leq \liminf_{l\in\mathbb{N}} \int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+2}dx.$$

Tomando o limite inferior em l, na inequação (3.30), e usando a equação (3.31) obtemos:

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{1}{2}\left[\liminf_{l\in\mathbb{N}} |u_l'(t)|^2 + \liminf_{l\in\mathbb{N}} ||u_l(t)||^2 + \liminf_{l\in\mathbb{N}} |\theta_l(t)|^2 + \frac{2}{\sigma+2}\liminf_{l\in\mathbb{N}} \int_\Omega |u_l(t)|^{\sigma+2}dx\right] \\ &\leq 3e^{-\frac{2}{3}\eta t} \liminf_{l\in\mathbb{N}} E_l(0) = 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t}, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{2}{3}\eta t},\ \forall t \geq 0,$$

e o resultado segue. ■

Referências Bibliográficas

[1] Brezis, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Velarg,2011.

[2] Castro, N.N. de O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano.* João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[3] Clark, M.R.,Oliveira, A.M., Lourêdo, A.T.; *Boundary Stabilization for Coupled System.* Nonlinear Analysis, (74) 2011.

[4] Lions, J.L.: *Quelques Méthods de Résolution dos Problèms aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris,1969.

[5] Lions, J.L.: *Problèms aux Limites dans les Équations aux Dèrivèes Partielles*, Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1962.

[6] Lisana, M.: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidade de Los Andes, Venezuela, 2000.

[7] Louredo, A.T.: *Existência e Decaimento de Soluções para Sistemas Acoplados*, Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFRJ (2008).

[8] Marcus, M., Mizael, V.L.: *Every Superposition Operator Mapping one Sobolev Space into Another is Continuous*, J. Funct. Anal. 33 (1979) 217-229.

[9] Matos, M.P.: *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0, T; X)$. Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[10] Medeiros, L.A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006

[11] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferencias Parcias*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1989.

[12] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *Espaços de Sobolev (Iniciação ao Problemas Elíticos não Homogêneos)*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2000.

[13] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *Hidden Regularity for Semilinear Hyperbolic Partial Differential Equations*, Ann. Fac, Sci Toulouse 9 (1)(1988), 103-120.

[14] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *On a Boundary Value Problem for Wave Equations: Existence Uniqueness-Asymptotic Behavior*, Revista de Matemáticas Aplicadas, Universidade de Chile 17 (1996) 47-73.

[15] Medeiros, L.A., Rivera, P.H.: *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1975.

[16] Oliveira, A.M.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico envolvendo o Operador p-Laplaciano no* $\mathbb{R}^3$, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFPB (2006)

[17] Paz, F.L.A.: *Existência de Solução e Estabilidade na Fronteira da Equação da Onda Semilinear*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFCG (2012).

[18] Pereira, Y.R.L.: *Estudo de um Siatema Termo-Elástico* Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFPI (2012).

[19] Ribeiro, N.F.M.: *Dual de espaços* $L^p(p > 1)$ *de Funçoes vetoriais*. Gazeta de Matemática Nº 133-136, Lisboa, 1976.

[20] Strauss, W.A.: *On Weak Solutions of Semilinear Hyperbolic Equations*, An. Acad. Brasil. Ciênc. 42 (1970), 645-651.