Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 04/02/2016

NOME:____ CPF: ____________________

1. Se $a_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$ para todo inteiro $n \geq 1$, decida se existe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e, se for o caso, calcule seu valor.

2. Mostre que a série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$
é convergente e calcule sua soma.

3. Mostre que se $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência monótona decrescente que tende para zero, então a série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ é convergente. Conclua que ser convergente não implica em convergência absoluta.

4. Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Prove que se cada F_n tem interior vazio então a união $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ também tem interior vazio.

5. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se semi-contínua superiormente num ponto x_0 se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Prove que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente em $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se $\limsup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leq f(x_0)$.

6. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável com f' é limitada. Prove que existe $c \neq 0$ tal que a função $h(x) = x + cf(x)$ é injetiva.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que
$$\int_a^b xf(x)dx = a\int_a^c f(x)dx + b\int_c^b f(x)dx.$$

8. Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

9. A fim de que a sequência de funções $f_k : X \to \mathbb{R}$ convirga uniformemente, é necessário e suficiente que, para cada $\delta > 0$ dado, exista $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|f_m(x) - f_k(x)| < \delta$$
para todo $m, k \geq k_0$ e para todo $x \in X$.

Bom Trabalho!