Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática

Teresina 14/07/2015

NOME:_______________________________________ INSCRIÇÃO: ____________

1. Marque V ou F, justificando brevemente sua resposta:

   (a) (   ) O conjunto $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Q}$ é enumerável;

   (b) (   ) Sequências convergentes, de números racionais, sempre convergem para números racionais;

   (c) (   ) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \bar{X}$;

   (d) (   ) Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções convexas, com $f(I) \subset J$, e g monótona não decrescente. Então $g(f(x))$ é convexa;

   (e) (   ) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \geq 0 \\ -1, & se\ x < 0 \end{cases}$ possui uma primitiva, isto é, existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$;

   (f) (   ) Se $X \subset \mathbb{R}$ é discreto então qualquer conjunto de funções $f : X \to \mathbb{R}$ é equicontínuo.

2. Dois pontos P e Q do plano são *simétricos* em relação à uma reta r nesse plano quando r é a mediatriz do segmento PQ. Duas figuras são ditas simétricas em relação à reta r quando cada ponto de uma delas é simétrico de um ponto da outra em relação à essa reta.

   (a) Mostre que se $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é simétrico ao ponto $Q \in \mathbb{R}^2$ em relação à *diagonal* $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ então $Q = (y, x)$;

   (b) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ uma bijeção. Mostre que os gráficos de f e f^{-1} são simétrico em relação à diagonal Δ;

   (c) Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função monótona tal que $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$. Mostre que o gráfico de f é simétrico (a si próprio) em relação à diagonal Δ. Conclua que a única função crescente, nestas condições, é a função identidade;

   (d) Dê exemplo de uma função decrescente $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$.

3. Seja $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ um conjunto infinito enumerável.

   (a) Mostre que o conjuntos das partes finitas de X é enumerável;

(b) É enumerável o conjunto $P(X)$ das partes de X?

4. Seja $x \in \mathbb{R}$ não nulo e $a_n = \frac{n}{x^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$;

   (b) Determine os valores de x que tornam a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente;

   (c) Determine os valores de x que tornam a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente;

   (d) Estude a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nos casos $x = 1$ e $x = -1$.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Dê uma demosntração de que $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexa. Sugestão: use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

6. Prove que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é enumerável.

7. Prove que, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

8. (a) Prove que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua;

   (b) Dê exemplo de uma sequência de funções contínuas $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ pontualmente, $\forall x \in X$, mas f não é contínua.

9. (a) Dado $X \subset \mathbb{R}$ compacto, prove que se X tem medida nula então X tem conteúdo nulo;

   (b) Dê exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ de medida nula mas tal que X não tenha conteúdo nulo.

Boa Sorte!

Observações:

1. $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$ **é o anel dos inteiros módulo** n**. Isto é** $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**;**

2. **Uma função** $f : I \to \mathbb{R}$ **é dita convexa quando** $\forall\ t \in [0, 1]$ **tem-se que**

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

   para todo $x, y \in I$**;**

3. **Um conjunto** Σ **de funções** $f : X \to \mathbb{R}$ **é dito equicontínuo no ponto** $a \in X$ **quando dado** $\epsilon > 0$ **existe** $\delta > 0$ **tal que** $|x - a| < \delta$ **tem-se que** $|f(x) - f(a)| < \epsilon$**, qualquer que seja** $f \in \Sigma$**. Diremos que** Σ **é equicontínuo se este for equicontínuo em todo ponto** $a \in X$**.**

FOLHA DE RESPOSTA INSCRIÇÃO: ______________