Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática

Teresina 03/06/2014

NOME:____ INSCRIÇÃO: ____________

1. Marque V ou F, justificando brevemente sua resposta:

   (a) ( ) Toda sequência limitada possui exatamente uma subsequência convergente;

   (b) ( ) Se x_n é uma sequência convergente então $\frac{1}{x_n}$ também é convergente;

   (c) ( ) Se $\lim x_n = +\infty$ e y_n é limitada então $\lim(x_n y_n) = +\infty$;

   (d) ( ) Se c_n e d_n são sequências com c_n e $c_n d_n$ limitadas, então d_n é limitada;

   (e) ( ) Não existe sequência que tenha duas subsequências, uma convergindo para $-\pi$ e a outra para $\sqrt{7}$;

   (f) ( ) Como a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, então a série $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge;

   (g) ( ) A derivada de uma função par é uma função impar e a derivada de uma função impar é uma função par.

   (h) ( ) Se f é contínua num ponto a então f é derivável em a

   (i) ( ) O conjuntos dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é enumerável.

   (j) ( ) Se o ponto crítico c da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $c_n \neq c$ então $f''(c) = 0$.

2. Considere a sequência $a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n^2-5}$.

   (a) Mostre que $\sqrt{n}.a_n \to 1$ e conclua que $a_n > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ para n suficientemente grande;

   (b) Conclua que a série $\sum \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n^2-5}$ é divergente.

3. Seja $f : X \to X$ uma função. Um subconjunto $Y \subset X$ é dito f-*estável* quando $f(Y) \subset Y$. Mostre que se $f : X \to X$ é uma função e X só admite $\varnothing$ e X como subconjuntos f-estáveis, então X é enumerável.

4. Calcule o valor da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Conclua que a série de Suiseth $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ é convergente e calcule seu valor.

5. (a) Defina função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável num ponto $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Seja $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Mostre que a existência do limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é equivalente a $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
   (c) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Suponha que existam $f'(c)$ e $f''(c)$ num ponto crítico $c \in I$ e que $f''(c) < 0$. Prove que c é um ponto de máximo local, isto é existe um número $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(c)$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

6. (a) Defina polinômio de Taylor e enuncie a fórmula de Taylor infinitesimal.
   (b) Defina função convexa.
   (c) Enuncie a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.
   (d) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I. Um teorema diz que f é convexa se, e somente se, para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Prove que se $f'' \geq 0$ então f é convexa.

7. Um alpinista começa sua escalada em uma montanha às 8hs da manhã e segue sua escalada para o topo da montanha, chegando lá às 18hs. Na manhã seguinte, ele parte do topo as 8hs da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega no destino, onde começou no dia anterior, às 18hs. Mostre que existe um ponto no caminho que o alpinista irá cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as escaladas.

8. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.
   (a) Defina somas inferior $s(f,P)$ e superior $S(f,P)$ de f relativa a uma partição P de $[a,b]$.
   (b) Defina a integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ de f, no caso em que existe, através da somas inferior e superior. Usando essa definição, mostre que a função constante $f(x) = \lambda$ é integrável no intervalo $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$.

9. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que as afirmações abaixo são equivalentes:
   (a) $\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x = 0$
   (b) Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então $f(c) = 0$
   (c) $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

   Conclua que dadas f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis e tais que $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula, tem-se $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Suponha que a série $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \mathrm{sen} nx)$ converge uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$. Prove as relações de Euler:
   (a) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$,
   (b) Para $m \geq 1$, $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \,\mathrm{d}x$ e $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{sen} mx \,\mathrm{d}x$.

Boa Sorte!

FOLHA DE RESPOSTA INSCRIÇÃO: _______________